

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA FEDERACIJE BOSNE I HERCEGOVINE :: TUZLA 2025



RICHMOND PARK
INTERNATIONAL SCHOOLS
TUZLA

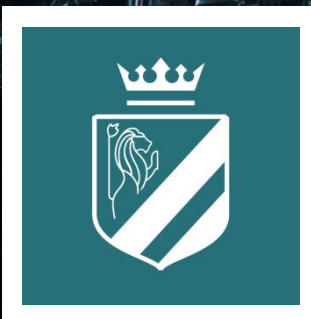


BILTEN

10.5.2025

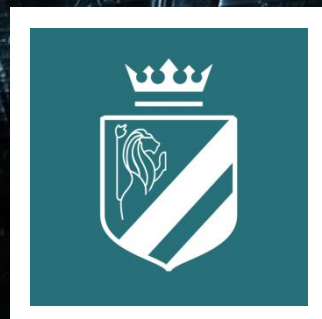
MATEMATIKA

SADRŽAJ



1. Satnica
2. Komisija za ocjenjivanje radova
3. Testatori
4. Škole, učesnice takmičenja
5. Prijavljeni takmičari i mentori
6. Zadaci za 6.razred
7. Zadaci za 7.razred
8. Zadaci za 8.razred
9. Zadaci za 9.razred
10. Rješenja zadataka za 6.razred
11. Rješenja zadataka za 7.razred
12. Rješenja zadataka za 8.razred
13. Rješenja zadataka za 9.razred
14. Rezultati učenika u kategoriji 6.razred
15. Rezultati učenika u kategoriji 7.razred
16. Rezultati učenika u kategoriji 8.razred
17. Rezultati učenika u kategoriji 9.razred
18. Galerija slika

SATNICA



08:30 – 09:30

REGISTRACIJA UČESNIKA

09:30 – 09:45

SVEČANO OTVARANJE TAKMIČENJA

10:00 – 13:00

IZRADA ZADATAKA

13:00 – 14:00

RUČAK ZA UČENIKE I NASTAVNIKE

13:00 – 16:00

RAD KOMISIJE ZA PREGLED ZADATAKA

16:00

PRELIMINARNI REZULTATI

16:00 - 17:00

RJEŠAVANJE ŽALBI UČENIKA

17:00

KONAČNI REZULTATI I DODJELA DIPLOMA

O ŠKOLI



Telefon:

035 951 315

Web stranica:

tuzla.rps.edu.ba

E-mail:

tuzla@rps.edu.ba

Adresa:

**Slavinovičkog odreda
b.b**

Richmond Park Međunarodna osnovna i srednja škola u Tuzli su dio porodice od 14 obrazovnih ustanova u više gradova BiH koje se protežu od vrtića, osnovnih i srednjih škola do Internacionalnog Burch Univerziteta u Sarajevu.

Škole nude mnogo prilika da kroz školovanje i učenje, učenici pokažu i otkriju sve svoje talente, učestvuju u što više klubova, projekata i vannastavnih aktivnosti te tako usmjere svoje talente na budućnost.

Nastava se na većini časova izvodi na engleskom jeziku što omogućava učenicima iz Bosne i Hercegovine da usavrše izgovor i gramatiku engleskog jezika a učenicima iz inostranstva da se što jednostavnije uklape u nastavni proces. Nastavni plan i program je odobren od strane Ministarstva za obrazovanje i nauku BiH uz integrisani Cambridge program.

Certificirana Cambridge ustanova koja nudi mogućnost djeci da pohađaju programe iz engleskog jezika, matematike i fizike, te steknu Cambridge diplomu koja može biti od velikog značaja za njihovu budućnost.

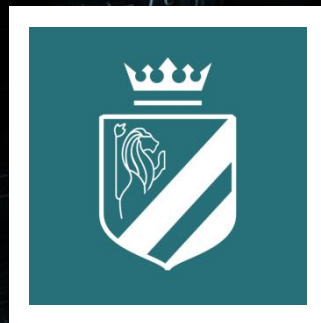
Od aprila 2024. godine, naša škola je certificirana za polaganje testova međunarodno priznatog sertifikata o digitalnoj pismenosti ICDL.

Naši nastavnici i osoblje dva puta godišnje pohađaju seminare gdje se educiraju i razvijaju svoje nastavne metode te dijele iskustva. Škola pridaje veliki značaj tome da ima najbolje moguće educirano osoblje.

Škola je opremljena vrhunskim savremenim tehnologijama poput pametnih tabli, soba za odmor, multimedijalne sale, računara za učenike i osoblje, korištenja interaktivnih aplikacija i pomagala u nastavi, košarkaškog i nogometnog igrališta, te cijeli kampus je pod punim video nadzorom.

Brinemo o potpunoj sigurnosti naših učenika te se ponosimo činjenicom da je naše okruženje zaista prilagođeno djeci i njihovim potrebama gdje mogu slobodno i opušteno obavljati sve svoje aktivnosti.

KOMISIJE



ČLANOVI ORGANIZACIONOG ODBORA U ŠKOLI

1. Sadmira Delić, dipl.ing.el. – direktor RPIS Tuzla
2. Džasen Brigić, prof.
3. Dina Hulusić Mehanović, prof
4. Sandra Golubović, prof.

KOMISIJA ZA ISPRAVAK RADOVA

1. Prof.Dr. Zenan Šabanac, predsjednik Komisije
2. Admir Beširević
3. Adisa Bolić
4. Amar Kurić
5. Azur Đonlagić
6. Demir Papić
7. Vedran Karahodžić
8. Mirza Čvorak

KOMISIJA ZA TEHNIČKU OBRADU PODATAKA

1. Nedžad Husić, dipl.ing.el.

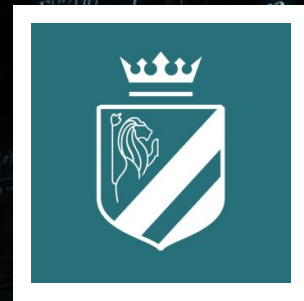
TESTATORI

1. Senada Peštalić, prof
2. Esad Zlatić, prof
3. Selma Osmanović, prof.
4. Rusmir Jašarević, prof.
5. Merima Šehić, prof.
6. Aldina Pašić, prof
7. Edin Kadrić, prof
8. Džemir Cerić, prof
9. Dženan Kurtović, prof.
10. Metin Yilmaz, prof

ŠKOLE VI

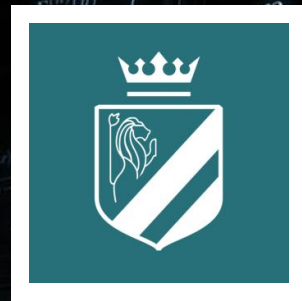
UČESNICI/E U KATEGORIJI 6.RAZRED

R.B.	IME I PREZIME	ŠKOLA
1	Ahmed Djedović	JU OŠ „Breške“ Tuzla
2	Ahmed Karačić	JU OŠ "Šejh Muhamed ef. Hadžijamaković" Sarajevo
3	Ajša Čobo	JU OŠ „Hamdija Kreševljaković" Kakanj
4	Alim Zambaković	JU OŠ "Prva osnovna škola" Zavidovići
5	Amal Mujezinović	JU OŠ "HARMANI II" Bihać
6	Amani Horozović	JU OŠ „5. oktobar“, Sanski Most
7	Amar Nuhanović	JU OŠ „Pazar“ Tuzla
8	Amina Dučić	JU OŠ "Husein ef.Đozo" Goražde
9	Anur Miljković	Richmond Park Int. Primary School Sarajevo
10	Asja Purić	JU OŠ "Han Bila" Travnik
11	Ayan Mujkić	JU OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo
12	Dilan Tuzović	JU OŠ "Hrasno" Sarajevo
13	Džanan Hušidić	JU OŠ „Otoka“, Bosanska Krupa
14	Ema Salihbegović	JU OŠ "Malta" Sarajevo
15	Emil Pozderović	JU OŠ „Banovići“ Banovići
16	Emina Pivalić	JU OŠ „5. oktobar“, Sanski Most
17	Emma Omić	JU OŠ "Druga osnovna škola" Zavidovići
18	Esmā Šabaredžović	JU "Deseta osnovna škola" Ilidža
19	Fatima Gekić	JU OŠ "Prva osnovna škola" Donji Vakuf
20	Hadi Memić	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo
21	Haris Delic	JU OŠ "Pofalići" Sarajevo
22	Harun Jusufović	JU "Prva osnovna škola" Srebrenik
23	Iman Pelko	JU OŠ "Kovačići" Sarajevo
24	Kenan Hamza	JU OŠ "Malta" Sarajevo
25	Merjem Smajić	JU OŠ "Isak Samokovlija" Sarajevo
26	Mirza Kelemiš	JU OŠ „Kulin Ban" Visoko
27	Muhamed Salkić	JU OŠ „Lejla Hairlahović - Hušić“, Cazin
28	Muhammed Mešković	JU OŠ "Mirsad Prnjavorac" Vogošća
29	Nađa Begić	JU OŠ "Mehmedalija Mak Dizdar" Sarajevo
30	Nadija Humić	JU OŠ "Klokotnica" Klokotnica
31	Rijad Bekrić	JU OŠ „Kulin Ban" Tešanj
32	Said Brkanić	JU OŠ "Nafija Sarajlić" Sarajevo
33	Selim Sabljica	JU OŠ "Pofalići" Sarajevo
34	Tarik Dizdarevic	JU OŠ "Hrasno" Sarajevo
35	Tarik Duharkić	JU OŠ "Kalibunar" Travnik
36	Tarik Šahinagić	JU OŠ " Ćamil Sijarić" Sarajevo
37	Vedad Begić	JU OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo
38	Vedad Delić	JU OŠ "Edhem Mulabdić" Sarajevo
39	Zerina Mujanović	JU OŠ „Kalesija“ Kalesija



ŠKOLE VII

UČESNICI/E U KATEGORIJI 7.RAZRED

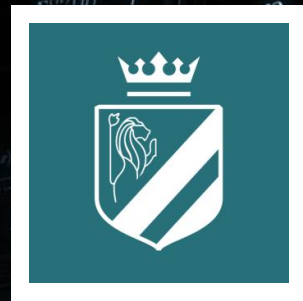


R.B.	IME I PREZIME	ŠKOLA
1	Adi Taletović	JU OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo
2	Aida Talović	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo
3	Ajla Talović	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo
4	Ajna Šehić	JU OŠ "Umihana Čuvidina" Sarajevo
5	Amar Gekić	JU OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo
6	Amna Brkanić	JU OŠ "Nafija Sarajlić" Sarajevo
7	Asja Krnić	JU OŠ „Isak Samokovlija“ Sarajevo
8	Asja Redžović	JU OŠ „Gnojnice“ Gnojnice, Mostar
9	Azra Hadžić	JU OŠ "Alija Nametak" Sarajevo
10	Azra Huseinović	JU OŠ "Travnik" Travnik
11	Bilal Jašarević	JU OŠ "Husein ef.Đozo" Goražde
12	Dalal Smajlović	JU OŠ "Silvije Strahimir Kranjčević" Sarajevo
13	Daris Mehić	JU OŠ „Bužim“, Bužim
14	Dunja Kafedžić	JU OŠ "Kovačići" Sarajevo
15	Edib Devlić	JU OŠ „Kulin Ban" Visoko
16	Edin Višnjjić	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo
17	Eldar Halilović	JU OŠ „Kalesija“ Kalesija
18	Elma Hrelja	JU OŠ "MEHMEDALIJA MAK DIZDAR" Vitkovići
19	Emin Džafić	JU OŠ „Kulin Ban" Visoko
20	Emin Junuzi	JU OŠ „Edhem Mulabdić" Zenica
21	Faris Fadžan	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo
22	Faris Ganić	JU OŠ "Mula Mustafa Bašeskija" Visoko
23	Faris Varnica	JU OŠ "Kovačići" Sarajevo
24	Hana Hodžić	JU OŠ "Travnik" Travnik
25	Jasmina Ćorić	JU "Druga osnovna škola" Konjic
26	Lamija Sitar	JU "Druga osnovna škola" Konjic
27	Lamija Smajilović	JU OŠ "Muhsin Rizvić" Fojnica
28	Lea Pencl	JU OŠ „Isak Samokovlija“ Sarajevo
29	Leila Randall	JU OŠ „Hasan Kikić“ Gračanica
30	Luka Tanasković	JU OŠ "Safvet-beg Bašagić" Sarajevo
31	Mahir Hodžić	JU OŠ "Rapatnica" Srebrenik
32	Mak Hadžić	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo
33	Mak Šimleša	JU OŠ „Sveti Franjo“ Tuzla
34	Medina Džafo	JU OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo
35	Nađa Srkalović	JU OŠ „Huso Hodžić" Tešanj
36	Nea Dujso	JU OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo
37	Samir Hasanović	JU OŠ „Druga osnovna škola", Bosanska Krupa
38	Sanela Aličajić	JU OŠ „Tržačka Raštela" Cazin
39	Sarah Spahić	JU OŠ „Novi Grad" Tuzla
40	Una Hamedović	JU OŠ „Vladimir Nazor Zenica
41	Una Šumar	JU OŠ „Harmani II", Bihać
42	Vedad Sinanović	JU OŠ „Bukinje" Tuzla
43	Zerin Đozo	JU "Druga osnovna škola" Ilidža/Hrasnica

ŠKOLE VIII

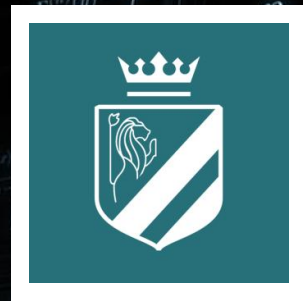
UČESNICI/E U KATEGORIJI 8.RAZRED

R.B.	IME I PREZIME	ŠKOLA
1	Amna Hamzić	JU OŠ "Husein ef.Đozo" Goražde
2	Adem Bišćević	JU OŠ "Mehmed-beg Kapetanović Ljubušak"
3	Adna Bistrić	JU OŠ „Hamdija Kreševljaković“ Kamberi, Gradačac
4	Adnan Hadžikadunić	JU OŠ „1. mart“ Tešanj
5	Alma Fajić	JU OŠ „Poljice“ Lukavac
6	Amina Agović	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo
7	Asja Husejinović	JU "Treća osnovna škola" Ilidža
8	Bakir Kešetović	JU OŠ „Rapatnica“ Srebrenik
9	Bakir Suljić	JU OŠ „Meša Selimović" Zenica
10	Edi Škrgić	JU OŠ „Ćoralić", Cazin
11	Edis Tabak	JU "Druga osnovna škola" Konjic
12	Ella Hamzic	JU OŠ "Nafija Sarajlić" Sarajevo
13	Emin Čišija	JU OŠ „Kulin Ban" Visoko
14	Emina Durmo	JU "Četvrta osnovna škola" Sarajevo
15	Faris Dervišević	JU OŠ „Harmani II" Bihać
16	Hadžera Rustić	JU "Prva osnovna škola" Konjic
17	Hamdi Mehmedovski	JU OŠ "Mirsad Prnjavorac" Vogošća
18	Hamza Drkić	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo
19	Harun Omić	JU OŠ „5. oktobar", Sanski Most
20	Ilma Ohran	JU OŠ „Mehmedalija Mak Dizdar" Visoko
21	Iman Boškailo	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo
22	Inea Dizdarić	JU OŠ "Gornje Prekounje - Ripač" Bihać
23	Ismail Hadžović	JU OŠ "Čamil Sijarić" Sarajevo
24	Ismar Ljubijankić	JU OŠ „Gornja Koprivna", Cazin
25	Kaan Kačapor	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo
26	Kenan Kujrić	JU „Prva osnovna škola" Maglaj
27	Lamija Isović	JU OŠ „Isak Samokovlija" Sarajevo
28	Lamija Rovčanin	JU OŠ "Pofalići" Sarajevo
29	Mahir Sulejmanović	JU "Druga osnovna škola" Živinice
30	Martina Andrić	JU OŠ „Sveti Franjo" Tuzla
31	Mesud Mešić	JU OŠ „Dr. Safvet-beg Bašagić, Gradačac
32	Naida Semić	JU OŠ "Zahid Baručija" Vogošća
33	Omer Kaltak	JU OŠ "Travnik" Travnik
34	Sajra Karagić	JU OŠ "Treća osnovna škola" Bugojno
35	Samra Kulenović	JU OŠ "6. mart" Hadžići
36	Sena Mujagić	JU OŠ "Nafija Sarajlić" Sarajevo
37	Senahid Selatović	JU OŠ "Vitez" Vitez
38	Sergej Smital	JU OŠ "Čengić Vila I" Sarajevo
39	Vedad Lendo	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo
40	Zlata Memić	JU "Druga osnovna škola" Konjic

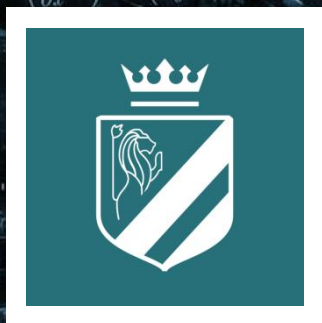


ŠKOLE IX

UČESNICI/E U KATEGORIJI 9.RAZRED



R.B.	IME I PREZIME	ŠKOLA
1	Emil Macić	JU "Deveta osnovna škola" Ilidža
2	Danija Sinanović	JU OŠ "Hasan Kaimija" Sarajevo
3	Amir Karamovic	JU OŠ "Musa Čazim Čatić" Sarajevo
4	Ajdin Talović	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo
5	Armin Šteta	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo
6	Abdullah Muminagić	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo
7	Adi Efendira	JU OŠ "Safvet-beg Bašagić" Visoko
8	Ana Sarić	JU OŠ "Malta" Sarajevo
9	Amar Jukan	JU "Druga osnovna škola" Gračanica
10	Ema Jusufagić	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo
11	Omer Drkić	JU "Druga osnovna škola" Ilidža/Hrasnica
12	Mubina Ramić	JU OŠ „Jezerski" Bosanska Krupa
13	Amina Džananović	JU OŠ "Hasan Kikić " Gračanica
14	Mirza Bubalo	JU "Druga osnovna škola" Konjic
15	Davud Mušinović	JU "Prva osnovna škola" Konjic
16	Zina Ivković	JU OŠ „Suljo Čilić" Jablanica
17	Naida Alispahić	JU OŠ "Husein ef.Đozo" Goražde
18	Una Ugarak	OŠ "Druga osnovna škola" Bugojno
19	Amina Huskić	OŠ "Treća osnovna škola" Bugojno
20	Kenan Hadžić	OŠ "Berta Kučera" Jajce
21	Benjamin Mujkić	JU OŠ „Sjenjak" Tuzla
22	Josip Šimić	JU OŠ „Sveti Franjo" Tuzla
23	Melisa Iskrić	JU OŠ „Ivan Goran Kovačić" Gradačac
24	Kenan Softić	Richmond Park Int. Primary School Tuzla
25	Eldar Zaketović	JU OŠ „Hasan Kikić" Gračanica
26	Tarik Odžak	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo
27	Faris Šabeta	JU OŠ "Musa Čazim Čatić" Sarajevo
28	Merjem Đonko	JU OŠ "Mehmedalija Mak Dizdar" Sarajevo
29	Ahmed Sedić	JU OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo
30	Fatih Čebirić	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo
31	Ahmed Fišek	JU OŠ „Musa Čazim Čatić" Visoko
32	Azra Jašarspahić	JU OŠ „Hamdija Kreševljaković" Kakanj
33	Ilda Bašić	JU „Prva osnovna škola" Maglaj
34	Naida Kadrić	JU OŠ „Safvet-beg Bašagić" Breza
35	Emma Suljaković	JU „Prva osnovna škola" Maglaj
36	Džana Hodžabegović	JU OŠ „Harmani II", Bihać
37	Amina Pivalić	JU OŠ „5. oktobar", Sanski Most
38	Ella Beširević	JU OŠ „Lejla Hairlahović-Hušić", Cazin
39	Tajra Mujezinović	JU OŠ „Ključ", Ključ
40	Dino Ahić	OŠ "Safvet beg Bašagić" Visoko



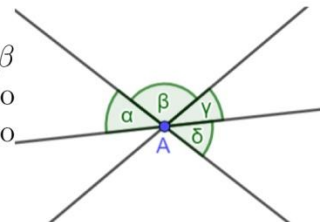
ZADACI



LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo iz matematike učenika osnovnih škola
10. maja/svibnja 2025.

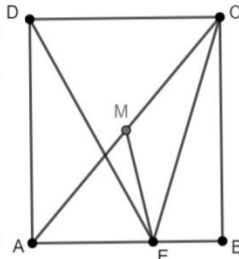
VI razred

1. **zadatak** Tri prave se sijeku u tački A , kao na slici. Poznato je da je ugao β za 14° veći od zbira uglova α i δ . Također, poznato je da je ugao γ tri puta manji od ugla β . Odrediti uglove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Obavezno obrazložiti odgovor!



2. **zadatak** a) Odrediti razlomak koji je jednak razlomku $\frac{4}{29}$, a kojem je brojnik za 2025 manji od nazivnika. Odgovor obrazložiti!
b) Odrediti razlomak koji je jednak razlomku $\frac{7}{135}$, a kojem je proizvod brojnika i nazivnika jednak 212625. Odgovor obrazložiti!

3. **zadatak** U pravougaoniku $ABCD$ stranica AD je za 23cm veća od stranice AB . Na stranici AB je data tačka E . Poznato je da je obim trougla AED jednak 208cm , a obim trougla EBC je jednak 180cm . Također, obim trougla DEC je 4 puta veći od stranice CD .



- a) Odrediti površinu pravougaonika $ABCD$.
b) Označimo sa M sredinu duži AC . Odrediti koji od trouglova AEM i MEC ima veći obim i za koliko.

4. **zadatak** a) Za prirodne brojeve x i y vrijedi da su im i zbir i proizvod djeljivi sa 8. Dokazati da su brojevi x i y djeljivi sa 4.
b) Odrediti sve trojke (a, b, c) cifara takvih da su i zbir i proizvod brojeva $\overline{1ab3a}$ i $\overline{6c2c6}$ djeljivi sa 24.

Napomena: Možete dobiti bodove za dio pod b) ako radite pod pretpostavkom da vrijedi tvrdnja pod a), čak i ukoliko niste dokazali da tvrdnja pod a) zaista vrijedi.

5. **zadatak** Za tabelu $r \times k$ (tabela se sastoji od r redova i k kolona) kažemo da je popunjena "kao zmija", ukoliko je popunjena prirodnim brojevima od 1 do $r \cdot k$ na sljedeći način: prvo se redom, s lijeve na desnu stranu, popunjava prvi red prirodnim brojevima počevši od 1, zatim se popunjavanje nastavlja u drugom redu, ali s desne na lijevu stranu. Generalno, neparne redove popunjavamo s lijeve na desnu stranu, a parne s desne na lijevu stranu. Na slici desno je dat primjer tabele 4×3 (4 reda i 3 kolone) koja je popunjena "kao zmija".

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10

Azur je popunio mnogo veću tabelu "kao zmiju". U njegovoj tabeli postoji kvadrat 2×2 koji je popunjen brojevima kao na slici desno. Odrediti sve mogućnosti za broj kolona Azurove tabele (tj. sve mogućnosti za k).

1793	1792
2024	2025

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.

Sretno!



LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

Federalno prvenstvo iz matematike učenika osnovnih škola

10. maja/svibnja 2025.

VII razred

1. zadatak U trouglu ABC vrijedi $AC < BC$. Tačke M je sredina stranice AB , a D i E su podnožja normala iz tačaka A i B na pravu CM , redom (tačka E je na produžetku CM preko M).

a) Dokazati da je $AD = BE$.

b) Ako je dužina duži CM tri puta veća od dužine duži ME , dokazati da je $AC = BD$.

2. zadatak Izračunati vrijednosti sljedećih izraza:

$$A = \frac{(1 + \frac{2}{1})(1 + \frac{3}{1+2})(1 + \frac{4}{1+2+3})(1 + \frac{5}{1+2+3+4}) \cdots (1 + \frac{9}{1+2+\dots+8})}{(1 - \frac{2}{1+2})(1 - \frac{3}{1+2+3})(1 - \frac{4}{1+2+3+4})(1 - \frac{5}{1+2+3+4+5}) \cdots (1 - \frac{9}{1+2+\dots+9})},$$
$$B = (1 + \frac{3}{1})(1 + \frac{5}{1+3})(1 + \frac{7}{1+3+5})(1 + \frac{9}{1+3+5+7}) \cdots (1 + \frac{89}{1+3+5+\dots+87}).$$

3. zadatak a) Za prirodne brojeve x i y vrijedi da su im i zbir i proizvod djeljivi sa 8. Dokazati da su brojevi x i y djeljivi sa 4.

b) Odrediti sve trojke (a, b, c) cifara takvih da su i zbir i proizvod brojeva $\overline{1ab3a}$ i $\overline{6c2c6}$ djeljivi sa 24.

Napomena: Možete dobiti bodove za dio pod b) ako radite pod pretpostavkom da vrijedi tvrdnja pod a), čak i ukoliko niste dokazali da tvrdnja pod a) zaista vrijedi.

4. zadatak Za tabelu $r \times k$ (tabela se sastoji od r redova i k kolona) kažemo da je popunjena "kao zmija", ukoliko je popunjena prirodnim brojevima od 1 do $r \cdot k$ na sljedeći način: prvo se redom, s lijeve na desnu stranu, popunjava prvi red prirodnim brojevima počevši od 1, zatim se popunjavanje nastavlja u drugom redu, ali s desne na lijevu stranu. Generalno, neparne redove popunjavamo s lijeve na desnu stranu, a parne s desne na lijevu stranu. Na slici desno je dat primjer tabele 4×3 (4 reda i 3 kolone) koja je popunjena "kao zmija".

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10

Azur je popunio mnogo veću tabelu "kao zmiju". U njegovoj tabeli postoji kvadrat 2×2 koji je popunjen brojevima kao na slici desno. Odrediti sve mogućnosti za broj kolona Azurove tabele (tj. sve mogućnosti za k).

1793	1792
2024	2025

5. zadatak U trouglu ABC vrijedi $AB < AC$. Simetrala vanjskog ugla kod vrha A siječe opisanu kružnicu tog trougla u tački S . Tačka T se nalazi na stranici AC tako da vrijedi $AB = TC$.

a) Dokazati da vrijedi $\angle BAC = \angle AST$.

b) Ako je tačka P podnožje normale iz S na AC , tačka Q podnožje normale iz S na BC , a M sredina duži BT , dokazati da je PQ simetrala ugla $\angle MPC$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.

Sretno!



LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

Federalno prvenstvo iz matematike učenika osnovnih škola

10. maja/svibnja 2025.

VIII razred

1. zadatak U pravouglom trouglu ABC (sa pravim uglom kod vrha C) vrijedi $BC = 2^{2027} \cdot 5^{2024}$ i $AC = 3 \cdot 2^{2025} \cdot 5^{2024}$. Iz vrha C povučena je visina CH na hipotenuzu AB . Potom je iz tačke H povučena visina HD na stranicu AC . Dokazati da je dužina duži HD jednaka $288 \cdot 10^{2022}$.

2. zadatak a) Neka su a i b nenulti realni brojevi takvi da vrijedi

$$a^2 = 13a + 3b \quad \text{i} \quad b^2 = 3a + 13b.$$

Odrediti sve mogućnosti za vrijednost izraza ab .

b) Neka su x i y nenulti realni brojevi takvi da vrijedi

$$x^3 = 13x + 3y \quad \text{i} \quad y^3 = 3x + 13y.$$

Odrediti sve mogućnosti za vrijednost izraza $(x^2 - y^2)^2$.

3. zadatak Za tabelu $r \times k$ (tabela se sastoji od r redova i k kolona) kažemo da je popunjena "kao zmijsa", ukoliko je popunjena prirodnim brojevima od 1 do $r \cdot k$ na sljedeći način: prvo se redom, s lijeve na desnu stranu, popunjava prvi red prirodnim brojevima počevši od 1, zatim se popunjavanje nastavlja u drugom redu, ali s desne na lijevu stranu. Generalno, neparne redove popunjavamo s lijeve na desnu stranu, a parne s desne na lijevu stranu. Na slici desno je dat primjer tabele 4×3 (4 reda i 3 kolone) koja je popunjena "kao zmijsa".

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10

Azur je popunio mnogo veću tabelu "kao zmijsu". U njegovoj tabeli postoji kvadrat 2×2 koji je popunjen brojevima kao na slici desno. Odrediti sve mogućnosti za broj kolona Azurove tabele (tj. sve mogućnosti za k).

1793	1792
2024	2025

4. zadatak Odrediti sve parove (p, q) prostih brojeva za koje je broj

$$\frac{p^p + 3pq + 9q^q}{p + 3q}$$

prirodan.

5. zadatak Dat je trapez $ABCD$ u kojem vrijedi $AB \parallel CD$ i $AB > CD$. Neka je M središte osnovice AB , i neka je P proizvoljna tačka na duži CD za koju vrijedi $PC < PD$. Prava PM siječe pravu BC u tački Q , a prava kroz P okomita na osnovice trapeza siječe pravu AQ u tački K . Dokazati da je $\angle QAB = \angle KCD$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.

Sretno!



LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

Federalno prvenstvo iz matematike učenika osnovnih škola

10. maja/svibnja 2025.

IX razred

1. zadatak U koordinatnoj ravni data je tačka $T(2, 4)$. Kroz nju prolaze prave p_1 i p_2 . Prava p_1 siječe x -osu u tački $A(-6, 0)$, a y -osu u tački C . Prava p_2 siječe x -osu u tački B , a y -osu u tački D . Poznato je da je x -koordinata tačke B veća od 2, kao i da je y -koordinata tačke D veća od 4. Ako je površina trougla $\triangle TAB$ dvostruko veća od površine trougla $\triangle TCD$, odrediti koordinate tačke B .

2. zadatak Za realne brojeve x, y i z vrijedi $x + y + z = 6$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{9}{2}$ i $xyz = 2$.

a) Odrediti vrijednost izraza $x^2 + y^2 + z^2$.

b) Odrediti vrijednost izraza $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$.

3. zadatak Odrediti sve parove (p, q) prostih brojeva za koje je broj

$$\frac{p^p + 3pq + 9q^q}{p + 3q}$$

prirodan.

4. zadatak Dat je trapez $ABCD$ u kojem vrijedi $AB \parallel CD$ i $AB > CD$. Neka je M središte osnovice AB , i neka je P proizvoljna tačka na duži CD za koju vrijedi $PC < PD$. Prava PM siječe pravu BC u tački Q , a prava kroz P okomita na osnovice trapeza siječe pravu AQ u tački K . Dokazati da je $\angle QAB = \angle KCD$.

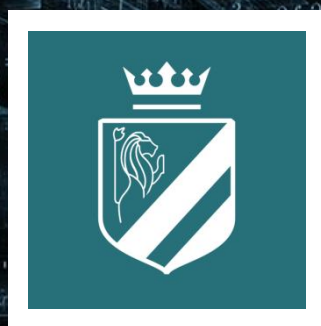
5. zadatak U šumi živi određen broj patuljaka, od kojih svaki posjeduje tačno tri šešira. Na svakom šeširu napisan je jedan od brojeva $1, 2, 3, \dots, 2025$. Nijedan patuljak nema dva šešira sa istim brojem (ali se može desiti da dva različita patuljka imaju šešire sa istim brojem). Svi patuljci su učestvovali u trodnevnom festivalu. Prvi dan svaki patuljak je nosio šešir s najmanjim brojem (od tri šešira koja posjeduje), drugi dan šešir s drugim najmanjim brojem, te treći dan šešir s najvećim brojem. Ispostavilo se da za bilo koja dva različita patuljka vrijedi da su se najviše jedan dan festivala pojavili s istim brojem na šeširu. Koliko najviše patuljaka može živjeti u šumi?

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.

Sretno!



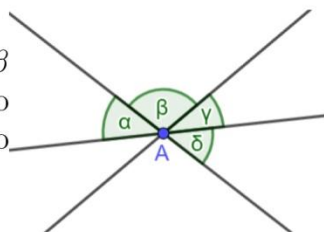
RJEŠENJA

LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
 Federalno prvenstvo iz matematike učenika osnovnih škola
 10. maja/svibnja 2025.

VI razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

1. **zadatak** Tri prave se sijeku u tački A , kao na slici. Poznato je da je ugao β za 14° veći od zbira uglova α i δ . Također, poznato je da je ugao γ tri puta manji od ugla β . Odrediti uglove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Obavezno obrazložiti odgovor!



Rješenje:

Kako su uglovi α i δ unakrsni, to je $\alpha = \delta$. Iz uslova zadatka je $\beta = \alpha + \delta + 14^\circ = 2\alpha + 14^\circ$ i $\beta = 3\gamma$.

Uglovi α, β, γ zajedno obrazuju ispruženi ugao, pa je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Uvrštavanjem $\beta = 3\gamma$ dobijamo

$$\alpha + 4\gamma = 180^\circ,$$

$$\alpha = 180^\circ - 4\gamma.$$

S druge strane, kako je $\beta = 3\gamma = 2\alpha + 14^\circ$, uvrštavanjem $\alpha = 180^\circ - 4\gamma$ dobijamo

$$3\gamma = 2(180^\circ - 4\gamma) + 14^\circ,$$

$$3\gamma = 360^\circ - 8\gamma + 14^\circ,$$

$$11\gamma = 374^\circ,$$

$$\gamma = 34^\circ.$$

Sada lako dobijamo $\beta = 3\gamma = 102^\circ$ i $\alpha = \delta = 180^\circ - 4\gamma = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$.

Šema bodovanja:

- zaključak da je $\alpha = \delta$ 1 bod
- postavljanje uslova $\beta = 3\gamma$ 1 bod
- dobijanje uslova $\beta = 2\alpha + 14^\circ$ 1 bod
- postavljanje uslova $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ 2 boda
- dobijanje jednačine po samo jednoj nepoznatoj 3 boda
- određivanje uglova $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 2 boda

- 2. zadatak**
- a) Odrediti razlomak koji je jednak razlomku $\frac{4}{29}$, a kojem je brojnik za 2025 manji od nazivnika. Odgovor obrazložiti!
- b) Odrediti razlomak koji je jednak razlomku $\frac{7}{135}$, a kojem je proizvod brojnika i nazivnika jednak 212625. Odgovor obrazložiti!

Rješenje:

- a) Traženi razlomak možemo zapisati u obliku $\frac{4x}{29x}$. Odatve po uslovu zadatka imamo da je

$$\begin{aligned} 29x - 4x &= 2025 \Leftrightarrow \\ 25x &= 2025 \Leftrightarrow \\ x &= 81. \end{aligned}$$

Dakle, traženi razlomak je $\frac{4 \cdot 81}{29 \cdot 81} = \frac{324}{2349}$.

Napomena: Učenik može zaključiti da kako je razlika nazivnika i brojnika jednaka 25, razlomak treba proširiti sa $2025 : 25 = 81$.

- b) Traženi razlomak možemo zapisati u obliku $\frac{7x}{135x}$. Po uslovu zadatka je

$$\begin{aligned} 7x \cdot 135x &= 212625, \\ 945 \cdot x \cdot x &= 212625, \\ x \cdot x &= 225 = 15 \cdot 15, \end{aligned}$$

odakle je $x = 15$.

Sada je naš razlomak jednak $\frac{7 \cdot 15}{135 \cdot 15} = \frac{105}{2025}$.

Napomena: U jednakosti $7x \cdot 135x = 212625$ smo mogli rastaviti i lijevu i desnu stranu na proste faktore, te onda odrediti x . Naime, rastavljanjem broja 212165 na proste faktore dobijamo $212165 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$. Kako je $135 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, imamo

$$7 \cdot x \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7.$$

Dijeljenjem sa $7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ dobijamo

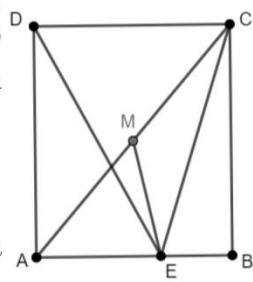
$$x \cdot x = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 15 \cdot 15,$$

odakle je $x = 15$.

Šema bodovanja:

- dio pod a) **4 boda**
 - označavanje traženog razlomka kao $\frac{4x}{29x}$ **1 bod**
 - postavljanje uslova $29x - 4x = 2025$ **1 bod**
 - određivanje x **1 bod**
 - dobijanje traženog razlomka **1 bod**
- dio pod b) **6 bodova**
 - označavanje traženog razlomka kao $\frac{7x}{135x}$ **1 bod**
 - postavljanje uslova $7x \cdot 135x = 212625$ **1 boda**
 - određivanje x **3 boda**
 - * Ako učenik radi kao u napomeni, jedan bod od prethodna tri dobija ako pravilno faktoriše broj 212625.
 - dobijanje traženog razlomka **1 bod**

3. zadatak U pravougaoniku $ABCD$ stranica AD je za 23cm veća od stranice AB . Na stranici AB je data tačka E . Poznato je da je obim trougla AED jednak 208cm , a obim trougla EBC je jednak 180cm . Također, obim trougla DEC je 4 puta veći od stranice CD .



- a) Odrediti površinu pravougaonika $ABCD$.
- b) Označimo sa M sredinu duži AC . Odrediti koji od trouglova AEM i MEC ima veći obim i za koliko.

Rješenje:

- a) Neka je $AB = CD = a$. Tada je $AD = BC = a + 23$. Sabiranjem obima trouglova AED i EBC dobijamo:

$$AD + DE + \underbrace{AE + EB}_{AB} + BC + CE = 208 + 180 = 388.$$

$$2(a + 23) + DE + AB + CE = 388.$$

Kako je iz uslova zadatka obim trougla DEC četiri puta veći od stranice CD , to je $CD + DE + EC = 4CD$, pa je i $AB + DE + EC = 4CD = 4a$.

Sada dobijamo

$$2(a + 23) + 4a = 388,$$

$$6a = 388 - 46 = 342,$$

$$a = 57.$$

Sada je $AD = a + 23 = 80$, pa je površina pravougaonika jednaka $57 \cdot 80 = 4560\text{cm}^2$.

- b) Neka je $AM = MC = x$. Tada je obim trougla AEM jednak $AE + EM + x$, a obim trougla MEC je jednak $CE + EM + x$. Dakle, potrebno je odrediti koja od duži AE i CE je duža i za koliko.

Kako je $57 = AB = AE + BE$, to je $AE = 57 - BE$. S druge strane, kako je obim trougla EBC jednak 180cm i kako je $BC = 80\text{cm}$, to je

$$BE + CE + 80 = 180,$$

$$CE = 100 - BE.$$

Dakle, $CE = 100 - BE = 43 + 57 - BE = 43 + AE$, tj. duž CE je duža za 43cm od duži AE , pa je i obim trougla MEC za 43cm veći od obima trougla AEM .

Šema bodovanja:

- dio pod a) **5 bodova**
 - sabiranje obima i zamjena $AE + EB$ sa AB **1 bod**
 - zamjena $AB + DE + CE$ sa $4CD$ (ili $DE + CE$ sa $3CD$) **1 bod**
 - * Relacije $CD + DE + CE = 4CD$ ili $DE + CE = 3CD$ same za sebe ne nose bodove, već samo ako su uvrštene u neku drugu relaciju.
 - dobijanje jednačine u kojoj je nepoznata jedna od stranica pravougaonika **1 bod**
 - određivanje stranice pravougaonika **1 bod**
 - izračunavanje površine **1 bod**
- dio pod b) **5 bodova**
 - svođenje zadatka na upoređivanje duži AE i CE **2 boda**
 - određivanje razlike dužina duži CE i AE **3 boda**

- 4. zadatak** a) Za prirodne brojeve x i y vrijedi da su im i zbir i proizvod djeljivi sa 8. Dokazati da su brojevi x i y djeljivi sa 4.
- b) Odrediti sve trojke (a, b, c) cifara takvih da su i zbir i proizvod brojeva $\overline{1ab3a}$ i $\overline{6c2c6}$ djeljivi sa 24.

Napomena: Možete dobiti bodove za dio pod b) ako radite pod pretpostavkom da vrijedi tvrdnja pod a), čak i ukoliko niste dokazali da tvrdnja pod a) zaista vrijedi.

Rješenje:

- a) Dokažimo najprije da barem jedan od brojeva x i y mora biti djeljiv sa 4. Njihov proizvod je djeljiv sa $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, tj. sadrži barem tri dvice u faktORIZACIJI na proste faktore. Zbog toga bar jedan od brojeva x i y mora sadržavati barem dvije dvice u sebi (u suprotnom, ako oba broja imaju maksimalno jednu dvicu, proizvod bi imao maksimalno dvije dvice). Međutim, broj koji sadrži dvije dvice u sebi je djeljiv sa 4. Dakle, zaista je barem jedan od brojeva x i y djeljiv sa 4.

S druge strane, njihov zbir je djeljiv sa 8, pa samim tim i sa 4 (jer je $8 = 2 \cdot 4$). Ako bi jedan od brojeva x i y bio djeljiv sa 4, a drugi ne bi, tada ni njihov zbir ne bi bio djeljiv sa 4, što je kontradikcija. Dakle, kako je jedan broj djeljiv sa 4, mora biti i drugi, čime smo dokazali tvrdnju.

Napomena: Pod frazom "broj sadrži barem tri dvice" se misli da kad rastavimo taj broj na proste faktore, faktor 2 se pojavljuje barem tri puta.

- b) Kako je $24 = 3 \cdot 8$, te su brojevi 3 i 8 relativno prosti (tj. njihov najveći zajednički djelilac je jednak 1), broj je djeljiv sa 24 ako je djeljiv sa 3 i sa 8. Na osnovu dokazanog u dijelu pod a) zaključujemo da oba broja moraju biti djeljiva sa 4.

S druge strane, kako je broj 3 prost, da bi proizvod dva broja bio djeljiv sa 3, mora bar jedan od ta dva broja biti djeljiv sa 3. Međutim, pošto je i zbir ovih brojeva djeljiv sa 3, ne može se desiti da je jedan od njih djeljiv sa 3, a drugi nije, tako da moraju oba broja biti djeljiva sa 3.

Posmatrajmo najprije broj $\overline{1ab3a}$. Kako on mora biti djeljiv sa 4, njegov dvocifreni završetak je djeljiv sa 4, pa $a \in \{2, 6\}$.

Za $a = 2$ imamo broj $\overline{12b32}$. Kako je on djeljiv i sa 3, zbir njegovih cifara $1 + 2 + b + 3 + 2 = 8 + b$ mora biti djeljiv sa 3, odakle $b \in \{1, 4, 7\}$.

Za $a = 6$ slično dobijamo da je broj $1 + 6 + b + 3 + 6 = 16 + b$, odakle je $b \in \{2, 5, 8\}$.

S druge strane, da bi broj $\overline{6c2c6}$ bio djeljiv sa 4, mora vrijediti $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Međutim, kako taj broj mora biti djeljiv i sa 3, zbir cifara $6 + c + 2 + c + 6 = 14 + 2c$ mora biti djeljiv sa 3, odakle zaključujemo da $c \in \{2, 5, 8\}$, pa mora vrijediti $c = 5$.

Pronašli smo cifre za koje su oba broja djeljiva sa 3 i 4 (što smo zaključili da mora vrijediti). Tada je njihov proizvod djeljiv sa $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 144$, pa samim tim i sa 24 (jer je $144 = 24 \cdot 6$). Također, pošto su oba broja djeljiva sa 3, njihov zbir je djeljiv sa 3, te još treba da bude djeljiv sa 8. Međutim, njihov zbir ne mora nužno biti djeljiv sa 8 (jer smo samo odredili cifre tako da su oba broja djeljiva sa 4). Kako je drugi broj $\overline{65256}$ djeljiv sa 8, to mora i prvi biti. Od trocifrenih završetaka 132, 432, 732, 236, 536, 836 samo su 432 i 536 djeljivi sa 8, pa su samo te dvije mogućnosti validne.

Dakle, sva rješenja su $(a, b, c) \in \{(2, 4, 5), (6, 5, 5)\}$.

5. zadatak Za tabelu $r \times k$ (tabela se sastoji od r redova i k kolona) kažemo da je popunjena "kao zmija", ukoliko je popunjena prirodnim brojevima od 1 do $r \cdot k$ na sljedeći način: prvo se redom, s lijeve na desnu stranu, popunjava prvi red prirodnim brojevima počevši od 1, zatim se popunjavanje nastavlja u drugom redu, ali s desne na lijevu stranu. Generalno, neparne redove popunjavamo s lijeve na desnu stranu, a parne s desne na lijevu stranu. Na slici desno je dat primjer tabele 4×3 (4 reda i 3 kolone) koja je popunjena "kao zmija".

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10

Azur je popunio mnogo veću tabelu "kao zmiju". U njegovoj tabeli postoji kvadrat 2×2 koji je popunjen brojevima kao na slici desno. Odrediti sve mogućnosti za broj kolona Azurove tabele (tj. sve mogućnosti za k).

1793	1792
2024	2025

Rješenje:

Neka u redu gdje su brojevi 1792 i 1793 lijevo od njih ima još x brojeva. Tada vrijedi i da lijevo od brojeva 2024 i 2025 u redu ispod također ima x brojeva. Tih $2x$ brojeva su 1794, 1795, ..., 2023, pa vrijedi $x + x = 2023 - 1793 = 230$, odakle je $x = 115$. Dakle, najveći broj u redu u kojem su brojevi 1792 i 1793 je broj $1793 + 115 = 1908$.

Kako u svakom redu ima tačno onoliko brojeva koliki je broj kolona tabele, to broj kolona mora biti djelioc broja 1908. Također, kako je u istom redu sa brojem 1908 i broj 1792, to je broj kolona barem $1908 - 1791 = 117$. Dakle, zanimaju nas djelioци broja 1908 veći ili jednaki 117.

Kako je $1908 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 53 = 36 \cdot 53$, to broj kolona mora biti djeljiv sa 53 (u suprotnom bi bio maksimalno 36). Kako su brojevi 53 i $53 \cdot 2 = 106$ manji od 117, imamo sljedeće mogućnosti: $53 \cdot 3 = 159$, $53 \cdot 4 = 212$, $53 \cdot 6 = 318$, $53 \cdot 9 = 477$, $53 \cdot 12 = 636$, $53 \cdot 18 = 954$, $53 \cdot 36 = 1908$.

Međutim, primijetimo da je broj 1908 najveći broj u redu u kojem brojevi idu zdesna na lijevo, tj. u parnom redu. Zbog toga količnik broja 1908 i broja kolona tabele mora biti paran broj, pa mogućnosti $\frac{1908}{212} = 9$, $\frac{1908}{636} = 3$, $\frac{1908}{1908} = 1$ otpadaju. U ostalim slučajevima količnik je paran, pa je 1908 posljednji broj u parnom redu, a u tom redu ima više od 117 brojeva, pa ti brojevi jesu mogućnosti za broj kolona.

Dakle, sve mogućnosti su 159, 318, 477 i 954.

Šema bodovanja:

- zaključak koliko brojeva mora biti lijevo od datog dijela **2 boda**
- zaključak da broj kolona mora biti djelioc broja 1908 **3 boda**
- određivanje svih djelioца broja 1908 **2 boda**
 - * Ukoliko učenik prije određivanja djelioца zaključi da je broj kolona veći ili jednak od 117, onda se prethodni korak odnosi samo na djelioce veće ili jednake 117. Slično vrijedi i ukoliko učenik najprije zaključi da je količnik broja 1908 i broja kolona paran.
- zaključak da broj kolona mora biti djelioc koji je veći ili jednak 117 **1 bod**
- zaključak da količnik broja 1908 i broja kolona mora biti paran i odbacivanje slučajeva gdje je taj količnik neparan **2 boda**

Šema bodovanja:

- dio pod a) **4 boda**
 - dokaz da je bar jedan od brojeva djeljiv sa 4 **2 boda**
 - dokaz da su oba broja djeljiva sa 4 **2 boda**
- dio pod b) **6 bodova**
 - zaključak da zbir i proizvod moraju biti djeljivi sa 3 i 8 i da zbog dokaza pod a) oba broja moraju biti djeljiva sa 4 **1 bod**
 - zaključak da je bar jedan od brojeva djeljiv sa 3 (zbog proizvoda) **1 bod**
 - zaključak da su oba broja djeljiva sa 3 (zbog zbira) **1 bod**
 - određivanje cifri za koje su oba broja djeljiva i sa 4 i sa 8 **2 boda**
 - provjera rješenja i odbacivanje slučajeva koji nisu rješenje **1 bod**

Napomena: Broj bodova ni na koji način ne ovisi od toga koliko rješenja ste dobili, već od postupka rada i ispravnosti zaključaka koje ste donosili.



LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

Federalno prvenstvo iz matematike učenika osnovnih škola

10. maja/svibnja 2025.

VII razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

1. zadatak U trouglu ABC vrijedi $AC < BC$. Tačke M je sredina stranice AB , a D i E su podnožja normala iz tačaka A i B na pravu CM , redom (tačka E je na produžetku CM preko M).

- Dokazati da je $AD = BE$.
- Ako je dužina duži CM tri puta veća od dužine duži ME , dokazati da je $AC = BD$.

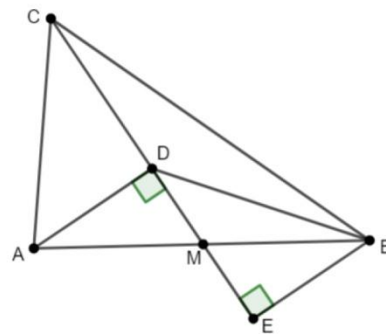
Rješenje:

- a) Kako je $\angle AMD = \angle BME$ (unakrsni uglovi), $AM = BM$ i $\angle DAM = 90^\circ - \angle AMD = 90^\circ - \angle BME = \angle MBE$, po pravilo USU zaključujemo da su trouglovi AMD i BME podudarni, odakle slijedi $AD = BE$, što je i trebalo dokazati.

- b) Iz dokazane podudarnosti trouglova AMD i BME slijedi $MD = ME$. Sada je $CD = CM - MD = 3ME - ME = 2ME$. Kako je i $DE = ME + MD = 2ME$, to je $CD = DE$. Posmatrajmo sada trouglove ADC i EBD .

U njima vrijedi $AD = BE$, $\angle ADC = \angle BED = 90^\circ$, $CD = DE$, pa iz pravila SUS zaključujemo da su ova dva trougla podudarna, odakle slijedi $AC = BD$, što je i trebalo dokazati.

Napomena: Nakon što smo zaključili da je $CD = DE$, tj. da je D sredina duži CE , mogli smo zaključiti da je trougao AEC jednakokraki (u njemu je AD i visina i težišnica), zbog čega je $AC = AE$. Onda završavamo iz podudarnosti trouglova AME i BMD ($AM = BM$, $\angle AME = \angle BMD$, $ME = MD$), jer ta podudarnost povlači $BD = AE = AC$.



Šema bodovanja:

- Dio pod a) **3 boda**
- Zaključak da je $DM = ME$ **1 bod**
- Dokaz da je $DC = DE$ **2 boda**
- Dokaz da su trouglovi ADC i BED podudarni i zaključak $AC = BD$ **4 boda**

* Ukoliko učenik radi kao u napomeni, posljednja 4 boda se osvajaju na sljedeći način: 2 boda za dokaz $AC = AE$ i 2 boda za dokaz $AE = BD$.

2. zadatak Izračunati vrijednosti sljedećih izraza:

$$A = \frac{(1 + \frac{2}{1})(1 + \frac{3}{1+2})(1 + \frac{4}{1+2+3})(1 + \frac{5}{1+2+3+4}) \cdots (1 + \frac{9}{1+2+\cdots+8})}{(1 - \frac{2}{1+2})(1 - \frac{3}{1+2+3})(1 - \frac{4}{1+2+3+4})(1 - \frac{5}{1+2+3+4+5}) \cdots (1 - \frac{9}{1+2+\cdots+9})},$$

$$B = (1 + \frac{3}{1})(1 + \frac{5}{1+3})(1 + \frac{7}{1+3+5})(1 + \frac{9}{1+3+5+7}) \cdots (1 + \frac{89}{1+3+5+\cdots+87}).$$

Rješenje:

Izračunajmo najprije brojnik izraza A . Imamo

$$\begin{aligned} &(1 + \frac{2}{1})(1 + \frac{3}{1+2})(1 + \frac{4}{1+2+3})(1 + \frac{5}{1+2+3+4}) \cdots (1 + \frac{9}{1+2+\cdots+8}) = \\ &\frac{1+2}{1} \cdot \frac{1+2+3}{1+2} \cdot \frac{1+2+3+4}{1+2+3} \cdot \frac{1+2+3+4+5}{1+2+3+4} \cdots \frac{1+2+\cdots+8}{1+2+\cdots+7} \cdot \frac{1+2+\cdots+9}{1+2+\cdots+8} = \\ &\frac{\cancel{1+2}}{1} \cdot \frac{\cancel{1+2+3}}{\cancel{1+2}} \cdot \frac{\cancel{1+2+3+4}}{\cancel{1+2+3}} \cdot \frac{\cancel{1+2+3+4+5}}{\cancel{1+2+3+4}} \cdots \frac{\cancel{1+2+\cdots+8}}{\cancel{1+2+\cdots+7}} \cdot \frac{1+2+\cdots+9}{\cancel{1+2+\cdots+8}} = \\ &\frac{9 \cdot 10}{2} = 45. \end{aligned}$$

Slično, nazivnik izraza A je jednak

$$\begin{aligned} &(1 - \frac{2}{1+2})(1 - \frac{3}{1+2+3})(1 - \frac{4}{1+2+3+4})(1 - \frac{5}{1+2+3+4+5}) \cdots (1 - \frac{9}{1+2+\cdots+9}) = \\ &\frac{1+2-2}{1+2} \cdot \frac{1+2+3-3}{1+2+3} \cdot \frac{1+2+3+4-4}{1+2+3+4} \cdot \frac{1+2+3+4+5-5}{1+2+3+4+5} \cdots \frac{1+2+\cdots+9-9}{1+2+\cdots+9} = \\ &\frac{1}{\cancel{1+2}} \cdot \frac{\cancel{1+2}}{\cancel{1+2+3}} \cdot \frac{\cancel{1+2+3}}{\cancel{1+2+3+4}} \cdot \frac{\cancel{1+2+3+4}}{\cancel{1+2+3+4+5}} \cdots \frac{\cancel{1+2+\cdots+8}}{1+2+\cdots+9} = \frac{1}{45}. \end{aligned}$$

Sada je $A = \frac{45}{\frac{1}{45}} = 45 \cdot 45 = 2025$.

Izračunajmo sada izraz B . Imamo

$$\begin{aligned} B &= (1 + \frac{3}{1})(1 + \frac{5}{1+3})(1 + \frac{7}{1+3+5})(1 + \frac{9}{1+3+5+7}) \cdots (1 + \frac{89}{1+3+5+\cdots+87}) = \\ &\frac{\cancel{1+3}}{1} \cdot \frac{\cancel{1+3+5}}{\cancel{1+3}} \cdot \frac{\cancel{1+3+5+7}}{\cancel{1+3+5}} \cdot \frac{\cancel{1+3+5+7+9}}{\cancel{1+3+5+7}} \cdots \frac{1+3+5+\cdots+89}{\cancel{1+3+5+\cdots+87}} = \\ 1+3+5+\cdots+89 &= (1+89) + (3+87) + (5+85) + \cdots + (43+47) + 45 = 22 \cdot 90 + 45 = 2025. \end{aligned}$$

Šema bodovanja:

- Računanje izraza A **4 boda**
 - računanje brojnika ili nazivnika (ono što učenik prvo izračuna) **2 boda**
 - računanje brojnika ili nazivnika (ono što učenik drugo izračuna) **1 bod**
 - dobijanje konačnog rezultata **1 bod**
- Računanje izraza B **6 bodova**
 - dobijanje $B = 1 + 3 + 5 + \cdots + 89$ **4 boda**
 - računanje izraza $1 + 3 + 5 + \cdots + 89$ **2 boda**

Napomena: Ukoliko se kod učenika u radu ne vidi jasno zašto će se odgovarajući brojevi skratiti, ne dobija sve bodove za taj dio. Na primjer, moguće je da učenik kod izraza B prostim računanjem dobije da je prvi razlomak jednak $\frac{4}{1} = \frac{2^2}{1^2}$, drugi $\frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2}$, treći $\frac{16}{9} = \frac{4^2}{3^2}$, te zaključi da će se tako svi brojevi skratiti i dobije $45^2 = 2025$, dobija samo 2 od 6 bodova za izraz B . Naime, to što su za prva tri razlomka brojnik i nazivnik uzastopni kvadrati ne mora da znači da će isto vrijediti za ostale razlomke.

- 3. zadatak** a) Za prirodne brojeve x i y vrijedi da su im i zbir i proizvod djeljivi sa 8. Dokazati da su brojevi x i y djeljivi sa 4.
- b) Odrediti sve trojke (a, b, c) cifara takvih da su i zbir i proizvod brojeva $\overline{1ab3a}$ i $\overline{6c2c6}$ djeljivi sa 24.

Napomena: Možete dobiti bodove za dio pod b) ako radite pod pretpostavkom da vrijedi tvrdnja pod a), čak i ukoliko niste dokazali da tvrdnja pod a) zaista vrijedi.

Rješenje:

- a) Dokažimo najprije da barem jedan od brojeva x i y mora biti djeljiv sa 4. Njihov proizvod je djeljiv sa $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, tj. sadrži barem tri dvice u faktORIZACIJI na proste faktore. Zbog toga bar jedan od brojeva x i y mora sadržavati barem dvije dvice u sebi (u suprotnom, ako oba broja imaju maksimalno jednu dvicu, proizvod bi imao maksimalno dvije dvice). Međutim, broj koji sadrži dvije dvice u sebi je djeljiv sa 4. Dakle, zaista je barem jedan od brojeva x i y djeljiv sa 4.

S druge strane, njihov zbir je djeljiv sa 8, pa samim tim i sa 4 (jer je $8 = 2 \cdot 4$). Ako bi jedan od brojeva x i y bio djeljiv sa 4, a drugi ne bi, tada ni njihov zbir ne bi bio djeljiv sa 4, što je kontradikcija. Dakle, kako je jedan broj djeljiv sa 4, mora biti i drugi, čime smo dokazali tvrdnju.

Napomena: Pod frazom "broj sadrži barem tri dvice" se misli da kad rastavimo taj broj na proste faktore, faktor 2 se pojavljuje barem tri puta.

- b) Kako je $24 = 3 \cdot 8$, te su brojevi 3 i 8 relativno prosti (tj. njihov najveći zajednički djelilac je jednak 1), broj je djeljiv sa 24 ako je djeljiv sa 3 i sa 8. Na osnovu dokazanog u dijelu pod a) zaključujemo da oba broja moraju biti djeljiva sa 4.

S druge strane, kako je broj 3 prost, da bi proizvod dva broja bio djeljiv sa 3, mora bar jedan od ta dva broja biti djeljiv sa 3. Međutim, pošto je i zbir ovih brojeva djeljiv sa 3, ne može se desiti da je jedan od njih djeljiv sa 3, a drugi nije, tako da moraju oba broja biti djeljiva sa 3.

Posmatrajmo najprije broj $\overline{1ab3a}$. Kako on mora biti djeljiv sa 4, njegov dvocifreni završetak je djeljiv sa 4, pa $a \in \{2, 6\}$.

Za $a = 2$ imamo broj $\overline{12b32}$. Kako je on djeljiv i sa 3, zbir njegovih cifara $1 + 2 + b + 3 + 2 = 8 + b$ mora biti djeljiv sa 3, odakle $b \in \{1, 4, 7\}$.

Za $a = 6$ slično dobijamo da je broj $1 + 6 + b + 3 + 6 = 16 + b$, odakle je $b \in \{2, 5, 8\}$.

S druge strane, da bi broj $\overline{6c2c6}$ bio djeljiv sa 4, mora vrijediti $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Međutim, kako taj broj mora biti djeljiv i sa 3, zbir cifara $6 + c + 2 + c + 6 = 14 + 2c$ mora biti djeljiv sa 3, odakle zaključujemo da $c \in \{2, 5, 8\}$, pa mora vrijediti $c = 5$.

Pronašli smo cifre za koje su oba broja djeljiva sa 3 i 4 (što smo zaključili da mora vrijediti). Tada je njihov proizvod djeljiv sa $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 144$, pa samim tim i sa 24 (jer je $144 = 24 \cdot 6$). Također, pošto su oba broja djeljiva sa 3, njihov zbir je djeljiv sa 3, te još treba da bude djeljiv sa 8. Međutim, njihov zbir ne mora nužno biti djeljiv sa 8 (jer smo samo odredili cifre tako da su oba broja djeljiva sa 4). Kako je drugi broj $\overline{65256}$ djeljiv sa 8, to mora i prvi biti. Od trocifrenih završetaka 132, 432, 732, 236, 536, 836 samo su 432 i 536 djeljivi sa 8, pa su samo te dvije mogućnosti validne.

Dakle, sva rješenja su $(a, b, c) \in \{(2, 4, 5), (6, 5, 5)\}$.

Šema bodovanja:

- dio pod a) 4 boda
 - dokaz da je bar jedan od brojeva djeljiv sa 4 2 boda
 - dokaz da su oba broja djeljiva sa 4 2 boda
- dio pod b) 6 bodova
 - zaključak da zbir i proizvod moraju biti djeljivi sa 3 i 8 i da zbog dokaza pod a) oba broja moraju biti djeljiva sa 4 1 bod
 - zaključak da je bar jedan od brojeva djeljiv sa 3 (zbog proizvoda) 1 bod
 - zaključak da su oba broja djeljiva sa 3 (zbog zbira) 1 bod
 - određivanje cifri za koje su oba broja djeljiva i sa 4 i sa 8 2 boda
 - provjera rješenja i odbacivanje slučajeva koji nisu rješenje 1 bod

Napomena: Broj bodova ni na koji način ne ovisi od toga koliko rješenja ste dobili, već od postupka rada i ispravnosti zaključaka koje ste donosili.

4. zadatak Za tabelu $r \times k$ (tabela se sastoji od r redova i k kolona) kažemo da je popunjena "kao zmija", ukoliko je popunjena prirodnim brojevima od 1 do $r \cdot k$ na sljedeći način: prvo se redom, s lijeve na desnu stranu, popunjava prvi red prirodnim brojevima počevši od 1, zatim se popunjavanje nastavlja u drugom redu, ali s desne na lijevu stranu. Generalno, neparne redove popunjavamo s lijeve na desnu stranu, a parne s desne na lijevu stranu. Na slici desno je dat primjer tabele 4×3 (4 reda i 3 kolone) koja je popunjena "kao zmija".

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10

Azur je popunio mnogo veću tabelu "kao zmiju". U njegovoj tabeli postoji kvadrat 2×2 koji je popunjen brojevima kao na slici desno. Odrediti sve mogućnosti za broj kolona Azurove tabele (tj. sve mogućnosti za k).

1793	1792
2024	2025

Rješenje:

Neka u redu gdje su brojevi 1792 i 1793 lijevo od njih ima još x brojeva. Tada vrijedi i da lijevo od brojeva 2024 i 2025 u redu ispod također ima x brojeva. Tih $2x$ brojeva su 1794, 1795, ..., 2023, pa vrijedi $x + x = 2023 - 1793 = 230$, odakle je $x = 115$. Dakle, najveći broj u redu u kojem su brojevi 1792 i 1793 je broj $1793 + 115 = 1908$.

Kako u svakom redu ima tačno onoliko brojeva koliki je broj kolona tabele, to broj kolona mora biti djelioc broja 1908. Također, kako je u istom redu sa brojem 1908 i broj 1792, to je broj kolona barem $1908 - 1791 = 117$. Dakle, zanimaju nas djelioci broja 1908 veći ili jednaki 117.

Kako je $1908 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 53 = 36 \cdot 53$, to broj kolona mora biti djeljiv sa 53 (u suprotnom bi bio maksimalno 36). Kako su brojevi 53 i $53 \cdot 2 = 106$ manji od 117, imamo sljedeće mogućnosti: $53 \cdot 3 = 159$, $53 \cdot 4 = 212$, $53 \cdot 6 = 318$, $53 \cdot 9 = 477$, $53 \cdot 12 = 636$, $53 \cdot 18 = 954$, $53 \cdot 36 = 1908$.

Međutim, primijetimo da je broj 1908 najveći broj u redu u kojem brojevi idu zdesna na lijevo, tj. u parnom redu. Zbog toga količnik broja 1908 i broja kolona tabele mora biti paran broj, pa mogućnosti $\frac{1908}{212} = 9$, $\frac{1908}{636} = 3$, $\frac{1908}{1908} = 1$ otpadaju. U ostalim slučajevima količnik je paran, pa je 1908 posljednji broj u parnom redu, a u tom redu ima više od 117 brojeva, pa ti brojevi jesu mogućnosti za broj kolona.

Dakle, sve mogućnosti su 159, 318, 477 i 954.

Šema bodovanja:

- zaključak koliko brojeva mora biti lijevo od datog dijela **2 boda**
- zaključak da broj kolona mora biti djelioc broja 1908 **3 boda**
- određivanje svih djelioca broja 1908 **2 boda**
 - * Ukoliko učenik prije određivanja djelioca zaključi da je broj kolona veći ili jednak od 117, onda se prethodni korak odnosi samo na djelioce veće ili jednake 117. Slično vrijedi i ukoliko učenik najprije zaključi da je količnik broja 1908 i broja kolona paran.
- zaključak da broj kolona mora biti djelioc koji je veći ili jednak 117 **1 bod**
- zaključak da količnik broja 1908 i broja kolona mora biti paran i odbacivanje slučajeva gdje je taj količnik neparan **2 boda**

- 5. zadatak** U trouglu ABC vrijedi $AB < AC$. Simetrala vanjskog ugla kod vrha A siječe opisanu kružnicu tog trougla u tački S . Tačka T se nalazi na stranici AC tako da vrijedi $AB = TC$.
- Dokazati da vrijedi $\angle BAC = \angle AST$.
 - Ako je tačka P podnožje normale iz S na AC , tačka Q podnožje normale iz S na BC , a M sredina duži BT , dokazati da je PQ simetrala ugla $\angle MPC$.

Rješenje:

- Neka je $\angle BAC = \alpha$, te označimo sa x uglove na koje vanjska simetrala dijeli vanjski ugao. Jasno je da vrijedi $2x + \alpha = 180^\circ$. Kako u trouglu AST vrijedi $x + \angle AST + \angle ATS = 180^\circ$, da bismo dokazali $\angle AST = \alpha$, dovoljno je dokazati $\angle ATS = x$, tj. dovoljno je dokazati da vrijedi $AS = ST$. Dokazat ćemo da su trouglovi ABS i TCS podudarni, odakle će slijediti tvrdnja.
Kako su periferijski uglovi nad istom tetivom jednaki, zaključujemo da je $\angle ABS = \angle ACS = y$ (uglovi nad tetivom AS). Iz istog razloga je i $\angle SBC = \angle SAC = x$ te $\angle BSC = \angle BAC = \alpha$. Kako u trouglu BSC imamo uglove $\angle CBS = x$ i $\angle CSB = \alpha$, zbog $2x + \alpha = 180^\circ$ slijedi $\angle BCS = x$, odakle je $BS = CS$.
Sada po pravilu SUS zaključujemo da su trouglovi ABS i TCS podudarni (vrijedi $AB = CT$, $\angle ABS = \angle TCS = y$, $SB = SC$), pa je $AS = ST$, što smo i htjeli dokazati.

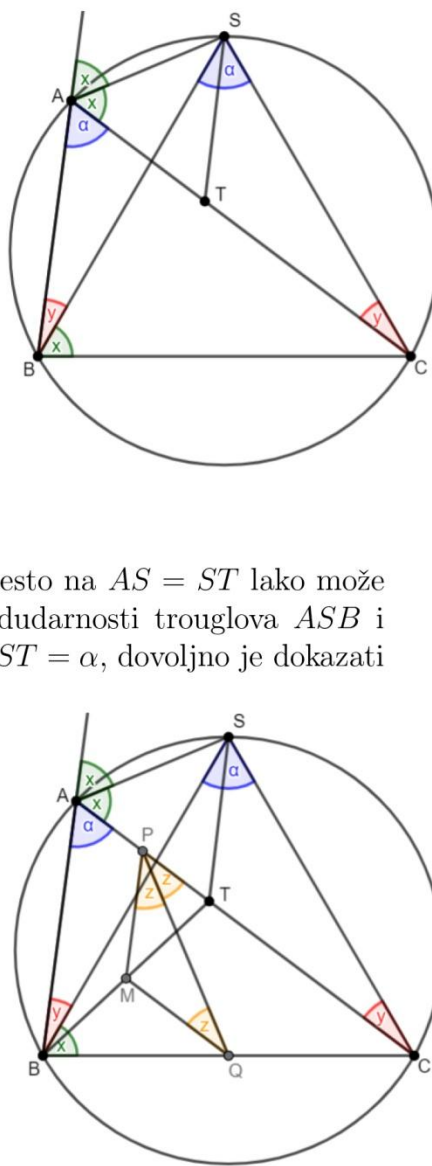
Napomena za dio pod a): Tvrdnja zadatka se umjesto na $AS = ST$ lako može svesti na $\angle ASB = \angle CST$ (što također slijedi iz podudarnosti trouglova ASB i CSD). Naime, kako je $\angle CSB = \alpha$, da bi vrijedilo $\angle AST = \alpha$, dovoljno je dokazati $\angle ASB = \angle CST$.

- Kako su trouglovi AST i BCS jednakokraki, to u njima visina polovi osnovicu, što znači da su tačke P i Q sredine duži AT i BC , redom.
Zbog toga su MP i MQ srednje linije trouglova BTA i BCT , redom, odakle je $PM = \frac{AB}{2} = \frac{CT}{2} = MQ$, tj. trougao MPQ je jednakokraki, odakle je $\angle MPQ = \angle MQP$.

Kako je srednja linija paralelna suprotnoj stranici, to je prava MQ paralelna pravoj TC (tj. AC), pa zbog jednakosti uglova na transferzali zaključujemo $\angle CPQ = \angle MQP = \angle MPQ$, pa je PQ simetrala ugla $\angle MPC$, što je i trebalo dokazati.

Napomena za dio pod b): Nakon što se zaključi da su P i Q sredine duži AT i BC i da je trougao MPQ jednakokraki, može se završiti na nešto drugačiji način. Naime, kako je $MP \parallel AB$ i $MQ \parallel AC$, to je $\angle QMP = 180^\circ - \angle BAC = 2x$ (uglovi sa paralelnim kracima). Zbog toga je $\angle MPQ = \angle MQP = 90^\circ - x$. Konačno, zbog paralelnosti MP i AB je $\angle MPC = \angle BAC = \alpha = 180^\circ - 2x = 2 \cdot (90^\circ - x) = 2 \cdot \angle MPQ$, odakle slijedi tvrdnja.

Napomena (za oba dijela): Nije bilo neophodno uvoditi posebne oznake x, y, z za te uglove, s obzirom da se svi mogu izraziti preko uglova trougla ABC . Naime, zbog $2x + \alpha = 180^\circ$ vrijedi $x = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Također, vrijedi $y = \beta - x = \beta - (\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}) = \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Konačno, kako je $MP \parallel AB$, to je $2z = \alpha$, odakle je $z = \frac{\alpha}{2}$.



Šema bodovanja:

- dio pod a) **6 bodova**
 - svođenje zadatka na $AS = ST$ ili $\angle ASB = \angle CST$ **1 bod**
 - zaključak $\angle ABS = \angle ACS$ **1 bod**
 - dokaz da vrijedi $BS = CS$ **2 boda**
 - zaključak da su trouglovi ABS i ACS podudarni **2 boda**
 - * Ukoliko učenik samo zaključi da je dovoljno dokazati da su trouglovi ABS i ACS podudarni, dobija 1 od posljednja 2 boda. Međutim, ako uz to tačno zaključi koji element mu fali za podudarnost, dobija čitava 2 boda iz posljednje tačke (npr. ako zaključi da su uglovi $\angle ABS$ i $\angle ACS$ jednaki, te konstatuje da je za podudarnost još dovoljno dokazati $BS = CS$).
- dio pod b) **4 boda**
 - zaključak da su P i Q sredine duži AT i BC **1 bod**
 - zaključak da je trougao MPQ jednakokraki **1 bod**
 - dokaz da je $\angle MQP = \angle QPC$ **1 bod**
 - * Prethodni bod učenik može osvojiti ukoliko dokaže da vrijedi $\angle QMP = 180^\circ - \alpha = 2x$ i $\angle MPC = \angle BAC$ (potrebne su obje jednakosti).
 - završetak dokaza **1 bod**



LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

Federalno prvenstvo iz matematike učenika osnovnih škola

10. maja/svibnja 2025.

VIII razred

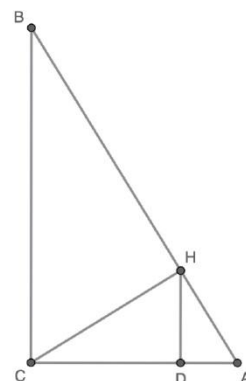
Rješenja zadataka i šeme bodovanja

- 1. zadatak** U pravouglom trouglu ABC (sa pravim uglom kod vrha C) vrijedi $BC = 2^{2027} \cdot 5^{2024}$ i $AC = 3 \cdot 2^{2025} \cdot 5^{2024}$. Iz vrha C povučena je visina CH na hipotenuzu AB . Potom je iz tačke H povučena visina HD na stranicu AC . Dokazati da je dužina duži HD jednaka $288 \cdot 10^{2022}$.

Rješenje 1:

Primjenom Pitagorine teoreme na trougao $\triangle CAB$ dobijamo:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(3 \cdot 2^{2025} \cdot 5^{2024})^2 + (2^{2027} \cdot 5^{2024})^2} = \\ &= \sqrt{9 \cdot 2^{4050} \cdot 5^{4048} + 2^{4054} \cdot 5^{4048}} = \\ &= \sqrt{2^{4050} \cdot 5^{4048} \cdot (9 + 16)} = \\ &= \sqrt{2^{4050} \cdot 5^{4048} \cdot 25} = \\ &= 2^{2025} \cdot 5^{2024} \cdot 5 = \\ &= 10^{2025}. \end{aligned}$$



Izračunajmo sada visinu CH i stranicu AH na dva načina.

- 1. način** Imamo da je površina trougla $\triangle CAB$ jednaka:

$$P_{\triangle CAB} = \frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{AC \cdot BC}{2},$$

pa je

$$CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \cdot 2^{2025} \cdot 5^{2024} \cdot 2^{2027} \cdot 5^{2024}}{10^{2025}} = \frac{3 \cdot 2^{5052} \cdot 5^{4048}}{2^{2025} \cdot 5^{2025}} = 3 \cdot 2^{2027} \cdot 5^{2023}.$$

Primjenom Pitagorine teoreme na trougao $\triangle CAH$ imamo:

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{9 \cdot 2^{5050} \cdot 5^{4048} - 9 \cdot 2^{5054} \cdot 5^{4046}} = \\ &= \sqrt{9 \cdot 2^{5050} \cdot 5^{4046} \cdot (25 - 16)} = \\ &= \sqrt{81 \cdot 2^{5050} \cdot 5^{4046}} = \\ &= 9 \cdot 2^{2025} \cdot 5^{2023}. \end{aligned}$$

2. način Primjenom Pitagorine teoreme na trouglove $\triangle CAH$ i $\triangle CHB$ imamo:

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 \quad \text{i} \quad CH^2 = BC^2 - BH^2.$$

Izjednačavanjem ove dvije jednačine dobijamo:

$$AC^2 - AH^2 = BC^2 - BH^2$$

$$BC^2 - AC^2 = BH^2 - AH^2 = (BH - AH)(BH + AH) = (BH - AH) \cdot AB,$$

odakle je

$$BH - AH = \frac{BC^2 - AC^2}{AB} = \frac{2^{4054} \cdot 5^{4048} - 9 \cdot 2^{4050} \cdot 5^{4048}}{10^{2025}} = \frac{2^{4050} \cdot 5^{4048} \cdot (2^4 - 9)}{2^{2025} \cdot 5^{2025}} = 7 \cdot 2^{2025} \cdot 5^{2023}$$

Sada je

$$2AH = (BH + AH) - (BH - AH) = 10^{2025} - 7 \cdot 2^{2025} \cdot 5^{2023} = 2^{2025} \cdot 5^{2023} \cdot (25 - 7) = 9 \cdot 2^{2026} \cdot 5^{2023},$$

pa je $AH = 9 \cdot 2^{2025} \cdot 5^{2023}$. Uvrštavanjem dobijamo

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{9 \cdot 2^{4050} \cdot 5^{4048} - 81 \cdot 2^{4050} \cdot 5^{4046}} = \sqrt{9 \cdot 2^{4050} \cdot 5^{4046} \cdot (25 - 9)} = 3 \cdot 2^{2027} \cdot 5^{2022}$$

Konačno, površina trougla $\triangle CAH$ jednaka je:

$$P_{\triangle CAH} = \frac{HD \cdot AC}{2} = \frac{CH \cdot AH}{2},$$

pa je

$$HD = \frac{CH \cdot AH}{AC} = \frac{3 \cdot 2^{2027} \cdot 5^{2023} \cdot 9 \cdot 2^{2025} \cdot 5^{2023}}{3 \cdot 2^{2025} \cdot 5^{2024}} = 9 \cdot 2^{2027} \cdot 5^{2022} = 9 \cdot 2^5 \cdot 10^{2022} = 288 \cdot 10^{2022},$$

što je i trebalo dokazati.

Rješenje 2:

Isto kao u prvom rješenju izračunamo dužine stranica AB i AH . Sada možemo primijeniti Talesovu teoremu na paralelne duži HD i BC :

$$\frac{HD}{BC} = \frac{AH}{AB}$$

$$HD = \frac{AH \cdot BC}{AB} = \frac{9 \cdot 2^{2025} \cdot 5^{2023} \cdot 2^{2027} \cdot 5^{2024}}{10^{2025}} = \frac{9 \cdot 10^{2025} \cdot 2^{2027} \cdot 5^{2022}}{10^{2025}} = 9 \cdot 2^5 \cdot 10^{2022} = 288 \cdot 10^{2022},$$

što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- izračun stranice AB **1 bod**
- izračun stranice AH **5 bodova**
- izračun stranice CH **3 boda**
- izračun stranice HD **3 boda**
- dokaz da je $HD = 288 \cdot 10^{2022}$ **1 bod**

* U prve četiri stavke iz bodovne šeme učenik može izgubiti po bod u svakoj stavci ako napravi računsku grešku u računskim operacijama sa stepenima (do maksimalno -2 boda). Ako ta računaska greška ne uključuje grešku u operacijama sa stepenima (npr. učenik pogrešno sabere dva prirodna broja i slično), tada mu se neće oduzeti bod. Komisija ima pravo da procijeni šta predstavlja računsku grešku u operacijama sa stepenima, a šta ne.

2. zadatak a) Neka su a i b nenulti realni brojevi takvi da vrijedi

$$a^2 = 13a + 3b \quad \text{i} \quad b^2 = 3a + 13b.$$

Odrediti sve mogućnosti za vrijednost izraza ab .

b) Neka su x i y nenulti realni brojevi takvi da vrijedi

$$x^3 = 13x + 3y \quad \text{i} \quad y^3 = 3x + 13y.$$

Odrediti sve mogućnosti za vrijednost izraza $(x^2 - y^2)^2$.

Rješenje:

a) Oduzimanjem druge od prve jednačine dobijamo:

$$(a - b)(a + b) = 10(a - b). \tag{1}$$

Ako je $a = b$ uvrštavanjem u prvu jednačinu dobijamo $a^2 = 16a$, pa je $a = 16$ (jer je $a \neq 0$). Dakle, imamo $a = b = 16$, odnosno $ab = 256$.

Ako je $a \neq b$, onda skraćivanjem zagrade $a - b$ u jednačini (1) dobijamo $a + b = 10$. Sabiranjem date dvije jednačine dobijamo:

$$a^2 + b^2 = 16(a + b) = 160.$$

$$\text{Sada je } ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{10^2 - 160}{2} = -30.$$

Dakle, moguće vrijednosti izraza ab su 256 i -30 .

Napomena: Vrijednost $ab = -30$ se zaista može dostići, na primjer za $a = 5 + \sqrt{55}$, $b = 5 - \sqrt{55}$. Učenik/ica neće izgubiti bodove ako ovo ne dokaže.

b) Ako je $x = y$ ili $x = -y$ tada je vrijednost traženog izraza očigledno jednaka 0. U nastavku pretpostavljamo da je $x \neq y$ i $x \neq -y$.

Oduzimanjem druge od prve jednačine dobijamo:

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= 10(x - y) \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2) &= 10(x - y) \\ x^2 + xy + y^2 &= 10. \end{aligned} \tag{2}$$

Sabiranjem date dvije jednačine dobijamo:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 16(x + y) \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2) &= 16(x + y) \\ x^2 - xy + y^2 &= 16. \end{aligned} \tag{3}$$

Sada oduzimanjem jednačine (3) od jednačine (2) dobijamo $2xy = -6$, odnosno $xy = -3$. Slijedi da je $x^2 + y^2 = 13$. Sada dobijamo da je $(x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2 = 13^2 - 4 \cdot (-3)^2 = 169 - 36 = 133$.

Dakle, moguće vrijednosti izraza $(x^2 - y^2)^2$ su 0 i 133.

Napomena: Obe vrijednosti traženog izraza se mogu dostići, na primjer za $x = y = 4$ dobijamo $(x^2 - y^2)^2 = 0$, dok za $x = -\sqrt{\frac{1}{2}(13 - \sqrt{133})}$, $y = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{2}(13 - \sqrt{133})(13 + \sqrt{133})}$ dobijamo $(x^2 - y^2)^2 = 133$. Učenik/ica neće izgubiti bodove ako ovo ne dokaže.

Šema bodovanja:

- dio pod a) **4 boda**
 - Dokaz da je $a + b = 10$ ako je $a \neq b$ **2 boda**
 - Dokaz da je $a^2 + b^2 = 160$ ako je $a \neq b$ **1 bod**
 - Dokaz da je $ab = -30$ ako je $a \neq b$ **1 bod**
 - * Učeniku/ici se oduzima bod ako zaboravi provjeriti slučaj $a - b = 0$ ili ga ne riješi ispravno.
- dio pod b) **6 bodova**
 - Dokaz da je $x^2 + xy + y^2 = 10$ i $x^2 - xy + y^2 = 16$ ako je $|x| \neq |y|$ **3 boda**
 - * Ako učenik/ica dobije samo jednu od ove dvije jednačine dobija 2 boda
 - Dokaz da je $(x^2 - y^2)^2 = 133$ ako je $|x| \neq |y|$ **3 boda**
 - * dokaz da je $xy = -3$ ili $x^2 + y^2 = 13$ **1 bod**
 - * dokaz da je $(x^2 - y^2)^2 = 133$ **2 boda**
 - * Učeniku/ici se oduzima bod ako zaboravi provjeriti bilo koji od slučajeva $x + y = 0$ ili $x - y = 0$ ili ih ne riješi ispravno.

3. zadatak Za tabelu $r \times k$ (tabela se sastoji od r redova i k kolona) kažemo da je popunjena "kao zmija", ukoliko je popunjena prirodnim brojevima od 1 do $r \cdot k$ na sljedeći način: prvo se redom, s lijeve na desnu stranu, popunjava prvi red prirodnim brojevima počevši od 1, zatim se popunjavanje nastavlja u drugom redu, ali s desne na lijevu stranu. Generalno, neparne redove popunjavamo s lijeve na desnu stranu, a parne s desne na lijevu stranu. Na slici desno je dat primjer tabele 4×3 (4 reda i 3 kolone) koja je popunjena "kao zmija".

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10

Azur je popunio mnogo veću tabelu "kao zmiju". U njegovoj tabeli postoji kvadrat 2×2 koji je popunjen brojevima kao na slici desno. Odrediti sve mogućnosti za broj kolona Azurove tabele (tj. sve mogućnosti za k).

1793	1792
2024	2025

Rješenje:

Neka u redu gdje su brojevi 1792 i 1793 lijevo od njih ima još x brojeva. Tada vrijedi i da lijevo od brojeva 2024 i 2025 u redu ispod također ima x brojeva. Tih $2x$ brojeva su 1794, 1795, ..., 2023, pa vrijedi $x + x = 2023 - 1793 = 230$, odakle je $x = 115$. Dakle, najveći broj u redu u kojem su brojevi 1792 i 1793 je broj $1793 + 115 = 1908$.

Kako u svakom redu ima tačno onoliko brojeva koliki je broj kolona tabele, to broj kolona mora biti djelioc broja 1908. Također, kako je u istom redu sa brojem 1908 i broj 1792, to je broj kolona barem $1908 - 1791 = 117$. Dakle, zanimaju nas djelioци broja 1908 veći ili jednaki 117.

Kako je $1908 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 53 = 36 \cdot 53$, to broj kolona mora biti djeljiv sa 53 (u suprotnom bi bio maksimalno 36). Kako su brojevi 53 i $53 \cdot 2 = 106$ manji od 117, imamo sljedeće mogućnosti: $53 \cdot 3 = 159$, $53 \cdot 4 = 212$, $53 \cdot 6 = 318$, $53 \cdot 9 = 477$, $53 \cdot 12 = 636$, $53 \cdot 18 = 954$, $53 \cdot 36 = 1908$.

Međutim, primijetimo da je broj 1908 najveći broj u redu u kojem brojevi idu zdesna na lijevo, tj. u parnom redu. Zbog toga količnik broja 1908 i broja kolona tabele mora biti paran broj, pa mogućnosti $\frac{1908}{212} = 9$, $\frac{1908}{636} = 3$, $\frac{1908}{1908} = 1$ otpadaju. U ostalim slučajevima količnik je paran, pa je 1908 posljednji broj u parnom redu, a u tom redu ima više od 117 brojeva, pa ti brojevi jesu mogućnosti za broj kolona.

Dakle, sve mogućnosti su 159, 318, 477 i 954.

Šema bodovanja:

- zaključak koliko brojeva mora biti lijevo od datog dijela **2 boda**
- zaključak da broj kolona mora biti djelioc broja 1908 **3 boda**
- određivanje svih djelioца broja 1908 **2 boda**
 - * Ukoliko učenik prije određivanja djelioца zaključi da je broj kolona veći ili jednak od 117, onda se prethodni korak odnosi samo na djelioce veće ili jednake 117. Slično vrijedi i ukoliko učenik najprije zaključi da je količnik broja 1908 i broja kolona paran.
- zaključak da broj kolona mora biti djelioc koji je veći ili jednak 117 **1 bod**
- zaključak da količnik broja 1908 i broja kolona mora biti paran i odbacivanje slučajeva gdje je taj količnik neparan **2 boda**

4. zadatak Odrediti sve parove (p, q) prostih brojeva za koje je broj

$$\frac{p^p + 3pq + 9q^q}{p + 3q}$$

prirodan.

Rješenje:

Ako su oba broja p i q neparna, brojnik će biti zbir tri neparna broja, pa samim tim neparan, dok će nazivnik biti paran, tako da dati razlomak ne može biti prirodan broj. Kako je jedini paran prost broj 2 zaključujemo da je $p = 2$ ili $q = 2$.

1. slučaj $p = 2$. Tada imamo da je broj $\frac{4+6q+9q^q}{3q+2} = \frac{2(3q+2)+9q^q}{3q+2} = 2 + \frac{9q^q}{3q+2}$ prirodan. Iz toga zaključujemo da $3q + 2 \mid 9q^q$. S obzirom da je q prost broj, jedini prirodni djelci broja $9q^q$ su oblika $q^k, 3q^k$ ili $9q^k$ za neki nenegativan cijeli broj k . Pošto $3q + 2$ nije djeljiv sa 3, zaključujemo da je to neki djelioc oblika q^k , tj. jednak je nekom od brojeva $1, q, q^2, q^3, \dots, q^q$. Očigledno je $3q + 2 > q$, pa mora vrijediti $3q + 2 \geq q^2$, tj. $q(q - 3) \leq 2$. Za $q \geq 5$, lijeva strana posljednje nejednakosti je bar 10, pa nejednakost ne vrijedi. Dakle jedine mogućnosti su $q = 2$ i $q = 3$. Direktnom provjerom dobijamo da nijedna opcija nije rješenje.

2. slučaj $q = 2$. Tada imamo da je broj $\frac{p^p+6p+36}{p+6} = \frac{6(p+6)+p^p}{p+6} = 6 + \frac{p^p}{p+6}$ prirodan. Iz toga zaključujemo da $p + 6 \mid p^p$. S obzirom da je p prost broj, jedini prirodni djelci broja p^p su $1, p, p^2, p^3, \dots, p^p$. Očigledno je $p + 6 > p$, pa mora vrijediti $p + 6 \geq p^2$, tj. $p(p - 1) \leq 6$. Za $p \geq 5$, lijeva strana posljednje nejednakosti je bar 20, pa nejednakost ne vrijedi. Dakle jedine mogućnosti su $p = 2$ i $p = 3$. Direktnom provjerom dobijamo da $p = 2$ nije rješenje, dok $p = 3$ jeste.

Dakle, jedino rješenje je $(p, q) = (3, 2)$.

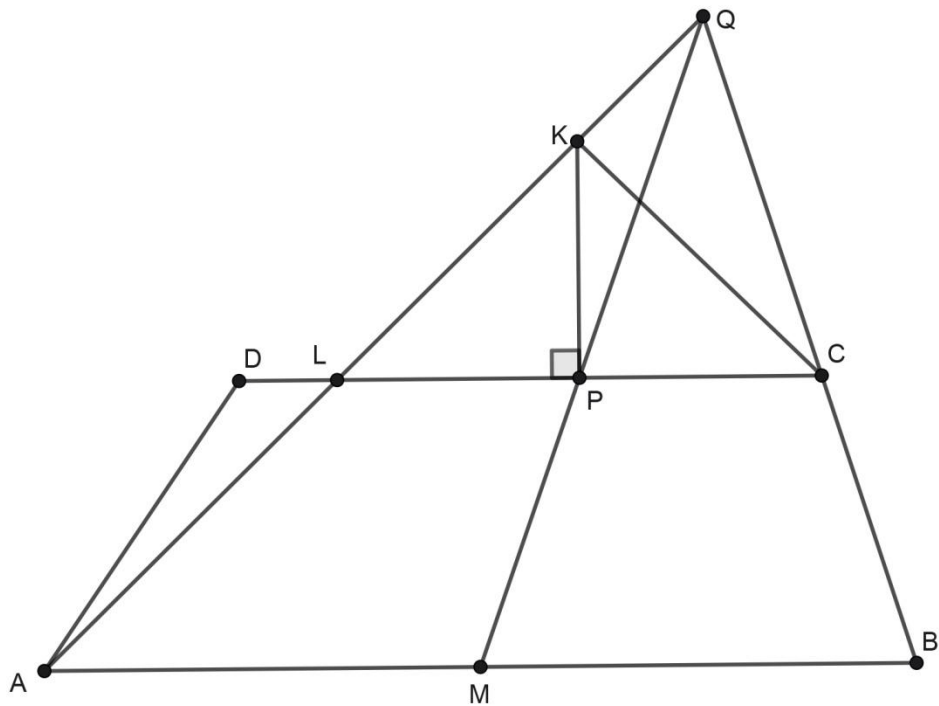
Šema bodovanja:

- zaključak da je jedan od brojeva p ili q jednak 2 **2 boda**
- zaključak da je $3q + 2$ djelioc broja $9q^q$ u prvom slučaju ILI zaključak da je $p + 6$ djelioc broja p^p u drugom slučaju **1 bod**
- rješavanje slučaja $p = 2$ **4 boda**
 - zaključak da je $3q + 2$ djelioc oblika q^k **2 boda**
 - dokaz da nema rješenja u ovom slučaju **2 boda**
- rješavanje slučaja $q = 2$ **3 boda**
 - zaključak da broj $p + 6$ pripada skupu $\{1, p, p^2, \dots, p^p\}$ **1 bod**
 - kraj dokaza u ovom slučaju **2 boda**

5. zadatak Dat je trapez $ABCD$ u kojem vrijedi $AB \parallel CD$ i $AB > CD$. Neka je M središte osnovice AB , i neka je P proizvoljna tačka na duži CD za koju vrijedi $PC < PD$. Prava PM siječe pravu BC u tački Q , a prava kroz P okomita na osnovice trapeza siječe pravu AQ u tački K . Dokazati da je $\angle QAB = \angle KCD$.

Rješenje:

Neka je L tačka presjeka pravih AQ i CD . Iz $CD \parallel AB$ slijedi $\angle KLC = \angle QLC = \angle QAB$, pa da bismo dokazali $\angle QAB = \angle KCD$, dovoljno je dokazati da vrijedi $\angle KLC = \angle KCD = \angle KCL$, tj. dovoljno je dokazati da je trougao KLC jednakokraki.



Kako je u trouglu KLC duž KP visina, da bismo dokazali da je on jednakokraki dovoljno je dokazati da je P sredina duži CL (jer onda iz $KP = KP$, $\angle KPC = \angle KPL = 90^\circ$ i $PC = PL$ slijedi $\triangle KPC \cong \triangle KPL$, odakle je $KC = KL$).

Pošto je $PC \parallel MB$, iz Talesove teoreme imamo $\frac{PC}{MB} = \frac{QP}{QM}$. Slično, pošto je $PL \parallel MA$, iz Talesove teoreme imamo $\frac{PL}{MA} = \frac{QP}{QM}$. Iz prethodne dvije jednakosti slijedi $\frac{PC}{MB} = \frac{PL}{MA}$, a kako je $MB = MA$ (M je središte duži AB), to vrijedi $PC = PL$. Drugim riječima, P je središte duži CL , što smo i htjeli dokazati. Ovim je dokaz završen.

Šema bodovanja:

- Uvođenje tačke L i zaključak $\angle KLC = \angle QAB$ **2 boda**
 - * Ukoliko učenik uvede tačku L i izrazi neki od uglova $\angle ALC, \angle ALD, \angle DLQ$ preko ugla $\angle QAB$, ali ne i ugao $\angle KLC$, dobija 1 od 2 boda.
- Zaključak da je dovoljno dokazati da je trougao KLC jednakokraki **1 bod**
- Zaključak da je dovoljno dokazati da je P sredina duži CL **2 boda**
 - * Ukoliko učenik ne konstatuje da P treba biti sredina, nego kaže da je dovoljno dokazati $\triangle KPC \cong \triangle KPL$ ili $\angle LKP = \angle CKP$, dobija 1 od 2 boda.
- Dokaz da je $PC = PL$ **5 bodova**
 - * Za primjenu barem jedne od Talesovih teorema koje vode ka ovom zaključku, dobija se 1 od 5 bodova. Također, za zaključak "kako je M sredina duži AB , to je P sredina duži CL ", bez dodatnog objašnjenja, dobija se 1 od 5 bodova.

LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

Federalno prvenstvo iz matematike učenika osnovnih škola

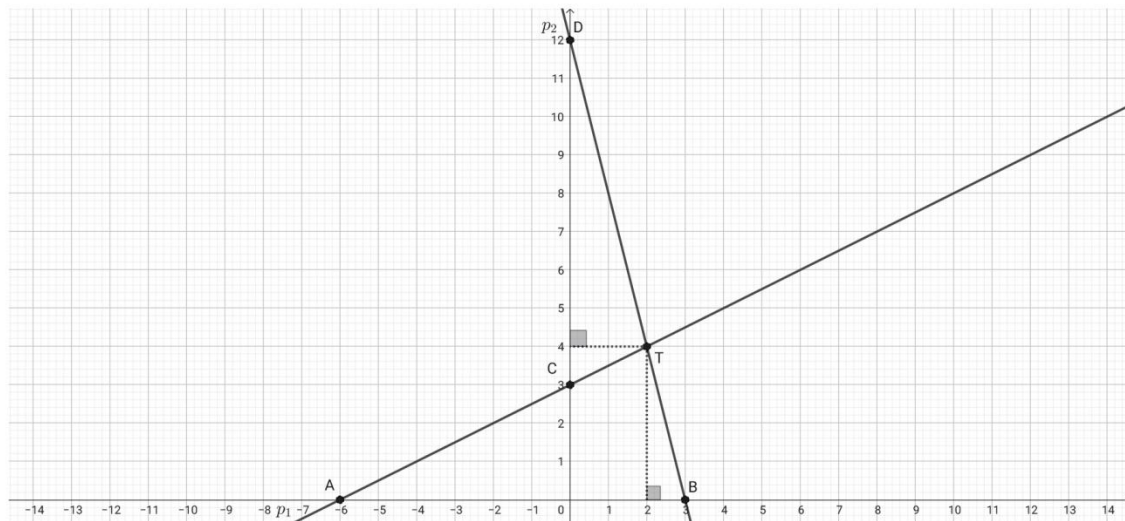
10. maja/svibnja 2025.

IX razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

- 1. zadatak** U koordinatnoj ravni data je tačka $T(2, 4)$. Kroz nju prolaze prave p_1 i p_2 . Prava p_1 siječe x -osu u tački $A(-6, 0)$, a y -osu u tački C . Prava p_2 siječe x -osu u tački B , a y -osu u tački D . Poznato je da je x -koordinata tačke B veća od 2, kao i da je y -koordinata tačke D veća od 4. Ako je površina trougla $\triangle TAB$ dvostruko veća od površine trougla $\triangle TCD$, odrediti koordinate tačke B .

Rješenje:



Prava p_1 prolazi kroz tačke $A(-6, 0)$ i $T(2, 4)$. Zato je njena jednačina data sa

$$\begin{aligned}y - 4 &= \frac{0 - 4}{-6 - 2}(x - 2) \Leftrightarrow \\y &= \frac{1}{2}(x - 2) + 4 \Leftrightarrow \\y &= \frac{1}{2}x + 3.\end{aligned}$$

Tačka C pripada ovoj pravoj i ima x -koordinatu 0 (jer se nalazi na y -osi), pa uvrštavanjem u jednačinu prave dobijamo da je njena y -koordinata jednaka $\frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3$. Dakle, koordinate tačke C su $(0, 3)$.

Kako je dužina visine iz tačke T na AB jednaka 4, to je površina trougla $\triangle TAB$ jednaka

$$\frac{AB \cdot 4}{2} = 2AB.$$

Slično, površina trougla $\triangle TCD$ je jednaka $\frac{2 \cdot CD}{2} = CD$. Kako je površina trougla $\triangle TAB$ dvostruko veća od površine trougla $\triangle TCD$, slijedi da je $2AB = 2CD$, tj. $AB = CD$.

Neka tačka B ima koordinate $(b, 0)$. Tada je $AB = b + 6$ (jer je $b > 2 > 0$), pa je i $CD = b + 6$, te kako je y -koordinata tačke D veća od 4 (samim tim i od 3), ona je jednaka $3 + b + 6 = b + 9$. tj. tačka D ima koordinate $(0, b + 9)$.

Neka prava kroz tačke B, T, D ima jednačinu $y = kx + n$. Kako tačke B, T, D pripadaju toj pravoj, dobijamo:

$$0 = kb + n,$$

$$4 = 2k + n,$$

$$b + 9 = n.$$

Uvrštavanjem $n = b + 9$ u drugu jednačinu, dobijamo $4 = 2k + b + 9$, odakle je $k = -\frac{b+5}{2}$. Uvrštavanjem u prvu jednačinu dobijamo $0 = -\frac{b+5}{2} \cdot b + n = -\frac{b+5}{2} \cdot b + b + 9$, što se nakon množenja sa 2 svodi na

$$b^2 + 3b - 18 = 0,$$

$$b^2 + 6b - 3b - 18 = 0,$$

$$b(b + 6) - 3(b + 6) = 0,$$

$$(b + 6)(b - 3) = 0.$$

Kako je $b > 2$, to je $b + 6 \neq 0$, pa vrijedi $b = 3$. Dakle, tačka B ima koordinate $(3, 0)$.

Napomena 1: Do relacije $b^2 + 3b - 18 = 0$ smo mogli doći i korištenjem Talesove teoreme. Naime, kako su prava $x = 2$ i y -osa paralelne, iz Talesove teoreme slijedi $\frac{b-2}{4} = \frac{b}{b+9}$, što se nakon sređivanja svodi na datu relaciju.

Napomena 2: Kako prava p_2 prolazi kroz tačke $T(2, 4)$ i $D(b, 0)$, možemo odrediti njenu jednačinu (pri čemu će k i n zavisiti od b). Tako dobijamo da ta prava ima jednačinu $y = -\frac{4}{b-2}x + \frac{4b}{b-2}$, pa ona siječe y -osu u tački $(0, \frac{4b}{b-2})$, odakle slijedi $b + 9 = \frac{4b}{b-2}$, što se opet svodi na istu relaciju.

Šema bodovanja:

- Određivanje tačke C **2 boda**
 - * Učenik dobija 1 od prethodna 2 boda ako samo odredi jednačinu prave p_1 .
- Dokaz da tačka D ima koordinate $(0, b + 9)$, ili bilo koja relacija iz koje se vidi da je y -koordinata tačke D za 9 veća od x -koordinata tačke B **2 boda**
 - * Učenik dobija 1 od prethodna 2 boda ako samo pokaže da je $AB = CD$.
- Dobijanje jednačine $b^2 + 3b - 18 = 0$ (ili slične jednačine po k ili n) **4 boda**

Prethodna 4 boda se mogu parcijalno osvojiti u zavisnosti na koji način učenik radi.

Ako radi kao u rješenju:

 - postavljanje relacija $0 = kb + n, 4 = 2k + n, b + 9 = n$ **1 bod**
 - eliminacija jedne od varijabli **1 bod**
 - dobijanje date relacije **2 boda**

Ako radi kao u prvoj napomeni:

 - pravilno postavljanje Talesove teoreme (ili sličnosti trouglova) **3 boda**
 - dobijanje date relacije **1 bod**

Ako radi kao u drugoj napomeni:

 - određivanje jednačine date prave (preko b) **2 boda**
 - zaključak da je y -koordinata tačke D jednaka $\frac{4b}{b-2}$ **1 bod**
 - dobijanje date relacije **1 bod**
- Rješavanje relacije $b^2 + 3b - 18 = 0$ (uz odbacivanje slučaja $b = -6$) **2 boda**

2. zadatak Za realne brojeve x, y i z vrijedi $x + y + z = 6$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{9}{2}$ i $xyz = 2$.

- a) Odrediti vrijednost izraza $x^2 + y^2 + z^2$.
- b) Odrediti vrijednost izraza $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$.

Rješenje:

Imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{9}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{xy + yz + zx}{xyz} &= \frac{9}{2} \Leftrightarrow \\ xy + yz + zx &= \frac{9}{2} \cdot xyz = \frac{9}{2} \cdot 2 = 9. \end{aligned}$$

a) Sada je $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 6^2 - 2 \cdot 9 = 18$.

b) **I način:**

Imamo

$$\begin{aligned} (xy + yz + zx)^2 &= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2 \cdot xy \cdot yz + 2 \cdot yz \cdot zx + 2 \cdot zx \cdot xy = \\ &= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z), \end{aligned}$$

pa je $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z) = 9^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 = 57$.

II način: Imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x + y + z}{xyz} = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{6}{2} = \frac{57}{4}. \end{aligned}$$

Sada je

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 + \left(\frac{2}{y}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) = 57.$$

Šema bodovanja:

- Računanje izraza $xy + yz + zx$ **2 boda**
- Ostatak dijela a) **3 boda**
 - Kvadriranje izraza $x + y + z$ **1 bod**
 - Računanje izraza $x^2 + y^2 + z^2$ **2 boda**
- Ostatak dijela b) **5 bodova**

Ako se radi na I način:

- Kvadriranje izraza $xy + yz + zx$ **1 bod**
- Dobijanje $xy \cdot yz + yz \cdot zx + zx \cdot xy = 12$ **3 boda**
- Računanje izraza $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ **1 bod**

Ako se radi na II način:

- Zapisivanje $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 4\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$ **2 boda**
- Računanje izraza $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ **2 boda**
- Računanje izraza $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ **1 bod**

3. zadatak Odrediti sve parove (p, q) prostih brojeva za koje je broj

$$\frac{p^p + 3pq + 9q^q}{p + 3q}$$

prirodan.

Rješenje:

Ako su oba broja p i q neparna, brojnik će biti zbir tri neparna broja, pa samim tim neparan, dok će nazivnik biti paran, tako da dati razlomak ne može biti prirodan broj. Kako je jedini paran prost broj 2 zaključujemo da je $p = 2$ ili $q = 2$.

1. slučaj $p = 2$. Tada imamo da je broj $\frac{4+6q+9q^q}{3q+2} = \frac{2(3q+2)+9q^q}{3q+2} = 2 + \frac{9q^q}{3q+2}$ prirodan. Iz toga zaključujemo da $3q + 2 \mid 9q^q$. S obzirom da je q prost broj, jedini prirodni djeloci broja $9q^q$ su oblika $q^k, 3q^k$ ili $9q^k$ za neki nenegativan cijeli broj k . Pošto $3q + 2$ nije djeljiv sa 3, zaključujemo da je to neki djelioc oblika q^k , tj. jednak je nekom od brojeva $1, q, q^2, q^3, \dots, q^q$. Očigledno je $3q + 2 > q$, pa mora vrijediti $3q + 2 \geq q^2$, tj. $q(q - 3) \leq 2$. Za $q \geq 5$, lijeva strana posljednje nejednakosti je bar 10, pa nejednakost ne vrijedi. Dakle jedine mogućnosti su $q = 2$ i $q = 3$. Direktnom provjerom dobijamo da nijedna opcija nije rješenje.

2. slučaj $q = 2$. Tada imamo da je broj $\frac{p^p+6p+36}{p+6} = \frac{6(p+6)+p^p}{p+6} = 6 + \frac{p^p}{p+6}$ prirodan. Iz toga zaključujemo da $p + 6 \mid p^p$. S obzirom da je p prost broj, jedini prirodni djeloci broja p^p su $1, p, p^2, p^3, \dots, p^p$. Očigledno je $p + 6 > p$, pa mora vrijediti $p + 6 \geq p^2$, tj. $p(p - 1) \leq 6$. Za $p \geq 5$, lijeva strana posljednje nejednakosti je bar 20, pa nejednakost ne vrijedi. Dakle jedine mogućnosti su $p = 2$ i $p = 3$. Direktnom provjerom dobijamo da $p = 2$ nije rješenje, dok $p = 3$ jeste.

Dakle, jedino rješenje je $(p, q) = (3, 2)$.

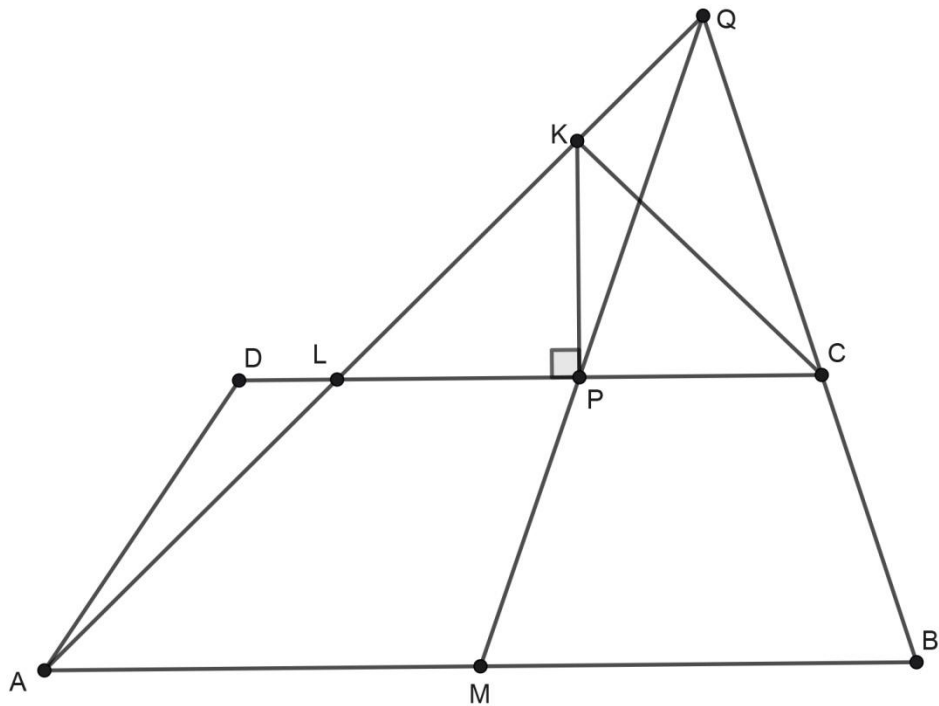
Šema bodovanja:

- zaključak da je jedan od brojeva p ili q jednak 2 **2 boda**
- zaključak da je $3q + 2$ djelioc broja $9q^q$ u prvom slučaju ILI zaključak da je $p + 6$ djelioc broja p^p u drugom slučaju **1 bod**
- rješavanje slučaja $p = 2$ **4 boda**
 - zaključak da je $3q + 2$ djelioc oblika q^k **2 boda**
 - dokaz da nema rješenja u ovom slučaju **2 boda**
- rješavanje slučaja $q = 2$ **3 boda**
 - zaključak da broj $p + 6$ pripada skupu $\{1, p, p^2, \dots, p^p\}$ **1 bod**
 - kraj dokaza u ovom slučaju **2 boda**

4. zadatak Dat je trapez $ABCD$ u kojem vrijedi $AB \parallel CD$ i $AB > CD$. Neka je M središte osnovice AB , i neka je P proizvoljna tačka na duži CD za koju vrijedi $PC < PD$. Prava PM siječe pravu BC u tački Q , a prava kroz P okomita na osnovice trapeza siječe pravu AQ u tački K . Dokazati da je $\angle QAB = \angle KCD$.

Rješenje:

Neka je L tačka presjeka pravih AQ i CD . Iz $CD \parallel AB$ slijedi $\angle KLC = \angle QLC = \angle QAB$, pa da bismo dokazali $\angle QAB = \angle KCD$, dovoljno je dokazati da vrijedi $\angle KLC = \angle KCD = \angle KCL$, tj. dovoljno je dokazati da je trougao KLC jednakokraki.



Kako je u trouglu KLC duž KP visina, da bismo dokazali da je on jednakokraki dovoljno je dokazati da je P sredina duži CL (jer onda iz $KP = KP$, $\angle KPC = \angle KPL = 90^\circ$ i $PC = PL$ slijedi $\triangle KPC \cong \triangle KPL$, odakle je $KC = KL$).

Pošto je $PC \parallel MB$, iz Talesove teoreme imamo $\frac{PC}{MB} = \frac{QP}{QM}$. Slično, pošto je $PL \parallel MA$, iz Talesove teoreme imamo $\frac{PL}{MA} = \frac{QP}{QM}$. Iz prethodne dvije jednakosti slijedi $\frac{PC}{MB} = \frac{PL}{MA}$, a kako je $MB = MA$ (M je središte duži AB), to vrijedi $PC = PL$. Drugim riječima, P je središte duži CL , što smo i htjeli dokazati. Ovim je dokaz završen.

Šema bodovanja:

- Uvođenje tačke L i zaključak $\angle KLC = \angle QAB$ **2 boda**
 - * Ukoliko učenik uvede tačku L i izrazi neki od uglova $\angle ALC, \angle ALD, \angle DLQ$ preko ugla $\angle QAB$, ali ne i ugao $\angle KLC$, dobija 1 od 2 boda.
- Zaključak da je dovoljno dokazati da je trougao KLC jednakokraki **1 bod**
- Zaključak da je dovoljno dokazati da je P sredina duži CL **2 boda**
 - * Ukoliko učenik ne konstatuje da P treba biti sredina, nego kaže da je dovoljno dokazati $\triangle KPC \cong \triangle KPL$ ili $\angle LKP = \angle CKP$, dobija 1 od 2 boda.
- Dokaz da je $PC = PL$ **5 bodova**
 - * Za primjenu barem jedne od Talesovih teorema koje vode ka ovom zaključku, dobija se 1 od 5 bodova. Također, za zaključak "kako je M sredina duži AB , to je P sredina duži CL ", bez dodatnog objašnjenja, dobija se 1 od 5 bodova.

5. zadatak U šumi živi određen broj patuljaka, od kojih svaki posjeduje tačno tri šešira. Na svakom šeširu napisan je jedan od brojeva $1, 2, 3, \dots, 2025$. Nijedan patuljak nema dva šešira sa istim brojem (ali se može desiti da dva različita patuljka imaju šešire sa istim brojem). Svi patuljci su učestvovali u trodnevnom festivalu. Prvi dan svaki patuljak je nosio šešir s najmanjim brojem (od tri šešira koja posjeduje), drugi dan šešir s drugim najmanjim brojem, te treći dan šešir s najvećim brojem. Ispostavilo se da za bilo koja dva različita patuljka vrijedi da su se najviše jedan dan festivala pojavili s istim brojem na šeširu. Koliko najviše patuljaka može živjeti u šumi?

Rješenje:

Svaki patuljak je drugi dan festivala nosio šešir s jednim od brojeva $2, 3, \dots, 2024$. Za svako $i \in \{2, 3, \dots, 2024\}$ označimo sa A_i broj patuljaka koji su drugi dan nosili šešir s brojem i . Tada je ukupni broj patuljaka jednak $A_2 + A_3 + \dots + A_{2024}$.

Posmatrajmo neko fiksno $k \in \{2, 3, \dots, 2024\}$. Znamo da postoji A_k patuljaka koji su drugi dan nosili šešir s brojem k . Svaki od njih je prvi dan nosio šešir s jednim od brojeva $1, 2, \dots, k-1$. Ako je $A_k \geq k$, po Dirichletovom principu postoje dva od ovih A_k patuljaka koji su prvi dan nosili šešir s istim brojem, što je kontradikcija (jer su oba i drugi dan nosili šešir s istim brojem - brojem k). Dakle, vrijedi $A_k \leq k-1$ Slično, svaki od ovih A_k patuljaka je treći dan nosio šešir s jednim od brojeva $k+1, k+2, \dots, 2025$, odakle dobijamo $A_k \leq 2025-k$. Zaključujemo, za sve k vrijedi $A_k \leq \min\{k-1, 2025-k\}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} &A_2 + A_3 + \dots + A_{1012} + A_{1013} + A_{1014} + \dots + A_{2023} + A_{2024} \leq \\ &\leq \min\{1, 2023\} + \min\{2, 2022\} + \dots + \min\{1011, 1013\} + \min\{1012, 1012\} + \\ &+ \min\{1013, 1011\} + \dots + \min\{2022, 2\} + \min\{2023, 1\} = \\ &= 1 + 2 + \dots + 1011 + 1012 + 1011 + \dots + 2 + 1 = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 1011) + 1012 = \\ &= 2 \cdot \frac{1011 \cdot 1012}{2} + 1012 = 1011 \cdot 1012 + 1012 = 1012^2, \end{aligned}$$

što znači da u šumi ne može živjeti više od 1012^2 patuljaka.

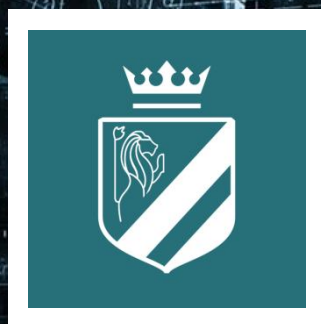
Dokažimo sada da u šumi može živjeti 1012^2 patuljaka. Dovoljno (i potrebno) je da za svako $k \in \{2, 3, \dots, 2024\}$ vrijedi $A_k = \min\{k-1, 2025-k\}$. U nastavku patuljke poistovjećujemo s uređenim trojkama, tako da trojka (a, b, c) , uz $a < b < c$, predstavlja patuljka koji je na festivalu nosio redom šešire s brojevima a, b i c .

Neka za svako $2 \leq k \leq 1013$ postoje patuljci $(1, k, 2k-1), (2, k, 2k-2), (3, k, 2k-3), \dots, (k-1, k, k+1)$, a za svako $1014 \leq k \leq 2024$ postoje patuljci $(k-1, k, k+1), (k-2, k, k+2), \dots, (2k-2025, k, 2025)$. Primijetimo da su u ovoj konstrukciji sve trojke različite, kao i da za svaku trojku (a, b, c) vrijedi $a + c = 2b$. Ovo znači da dva elementa trojke određuju treći, pa ne mogu postojati trojke koje se podudaraju u dva elementa, a razlikuju u trećem. Drugim riječima, ne postoje dva različita patuljka koji su se barem dva dana pojavili s istim brojem na šeširu.

Šema bodovanja:

- Dokaz da u šumi ne može živjeti više od 1012^2 patuljaka **5 bodova**
 - Posmatranje srednjeg člana svake trojke **1 bod**
 - Zaključak $A_k \leq \min\{k-1, 2025-k\}$ **3 boda**
 - * Ukoliko je pokazana samo jedna od relacija $A_k \leq k-1$ i $A_k \leq 2025-k$, dodjeljuje se 2 od 3 boda
 - Dobijanje gornje granice **1 bod**

- Dokaz da u šumi može živjeti 1012^2 patuljaka **5 bodova**
 - Navođenje konstrukcije za koju se dostiže granica **2 boda**
 - Dokaz da navedena konstrukcija zadovoljava uslove **3 boda**
 - * Ukoliko nema drugih bodova po šemi, za konstataciju da je odgovor 1012^2 dodjeljuje se 1 bod



REZULTATI

REZULTATI VI



UČESNICI/E U KATEGORIJI 6.RAZRED

R.B.	IME I PREZIME	ŠKOLA	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	BOD
1	Merjem Smajić	JU OŠ "Isak Samokovlija" Sarajevo	10	10	10	9	2	41
2	Ema Salihbegović	JU OŠ "Malta" Sarajevo	10	10	10	3	2	35
3	Selim Sabljica	JU OŠ "Pofalići" Sarajevo	10	10	10	3	1	34
4	Kenan Hamza	JU OŠ "Malta" Sarajevo	10	10	9	2	0	31
5	Dilan Tuzović	JU OŠ "Hrasno" Sarajevo	10	10	5	4	0	29
6	Alim Zambaković	JU OŠ "Prva osnovna škola" Zavidovići	10	4	9	3	1	27
6	Said Brkanić	JU OŠ "Nafija Sarajlić" Sarajevo	10	10	5	2	0	27
6	Ahmed Karačić	JU OŠ "Šejh Muhamed ef. Hadžijamaković" Sarajevo	10	10	7	0	0	27
9	Iman Pelko	JU OŠ "Kovačići" Sarajevo	10	2	10	0	3	25
9	Haris Delic	JU OŠ "Pofalići" Sarajevo	4	10	7	4	0	25
9	Vedad Begić	JU OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo	10	10	5	0	0	25
12	Anur Miljković	Richmond Park International Primary School Sarajevo	10	4	7	0	0	21
13	Ayan Mujkić	JU OŠ "Musa Čazim Čatić" Sarajevo	10	10	0	0	0	20
13	Muhammed Mešković	JU OŠ "Mirsad Prnjavorac" Vogošća	10	10	0	0	0	20
15	Rijad Bekrić	JU OŠ „Kulin Ban" Tešanj	10	5	1	0	0	16
15	Zerina Mujanović	JU OŠ „Kalesija" Kalesija	10	6	0	0	0	16
17	Tarik Šahinagić	JU OŠ "Čamil Sijarić" Sarajevo	10	0	5	0	0	15
18	Nađa Begić	JU OŠ "Mehmedalija Mak Dizdar" Sarajevo	5	3	5	0	1	14
18	Tarik Dizdarevic	JU OŠ "Hrasno" Sarajevo	4	5	1	4	0	14
20	Ahmed Djedović	JU OŠ „Breške" Tuzla	5	4	0	1	3	13
21	Tarik Duharkić	JU OŠ "Kalibunar" Travnik	10	2	0	0	0	12
22	Hadi Memić	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo	5	4	0	0	1	10
22	Amani Horozović	JU OŠ „5. oktobar", Sanski Most	10	0	0	0	0	10
22	Esma Šabaredžović	JU "Deseta osnovna škola" Ilidža	4	5	1	0	0	10
22	Emil Pozderović	JU OŠ „Banovići" Banovići	4	4	0	0	2	10
26	Harun Jusufović	JU "Prva osnovna škola" Srebrenik	3	4	0	1	0	8
27	Muhamed Salkić	JU OŠ „Lejla Hairlahović - Hušić", Cazin	3	1	0	1	2	7
27	Vedad Delić	JU OŠ "Edhem Mulabdić" Sarajevo	3	4	0	0	0	7
29	Emina Pivalić	JU OŠ „5. oktobar", Sanski Most	4	2	0	0	0	6
29	Nadija Humić	JU OŠ "Klokotnica" Klokotnica	4	1	1	0	0	6
29	Amar Nuhanović	JU OŠ „Pazar" Tuzla	3	0	3	0	0	6
32	Emma Omić	JU OŠ "Druga osnovna škola" Zavidovići	5	0	0	0	0	5
32	Amina Dučić	JU OŠ "Husein ef.Đozo" Goražde	5	0	0	0	0	5
34	Amal Mujezinović	JU OŠ "HARMANI II" Bihać	4	0	0	0	0	4
34	Asja Purić	JU OŠ "Han Bila" Travnik	4	0	0	0	0	4
34	Džanan Hušidić	JU OŠ „Otoka", Bosanska Krupa	4	0	0	0	0	4
34	Fatima Gekić	JU OŠ "Prva osnovna škola" Donji Vakuf	4	0	0	0	0	4
38	Mirza Kelemiš	JU OŠ „Kulin Ban" Visoko	3	0	0	0	0	3
39	Ajša Čobo	JU OŠ „Hamdija Kreševljaković" Kakanj	0	2	0	0	0	2

REZULTATI VII



UČESNICI/E U KATEGORIJI 7.RAZRED

R.B.	IME I PREZIME	ŠKOLA	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	BOD
1	Emin Junuzi	JU OŠ „Edhem Mulabdić” Zenica	10	10	5	1	1	27
2	Dalal Smajlović	JU OŠ „Silvije Strahimir Kranjčević” Sarajevo	10	10	3	0	2	25
2	Azra Hadžić	JU OŠ „Alija Nametak” Sarajevo	10	10	5	0	0	25
2	Medina Džafo	JU OŠ „Fatima Gunić” Sarajevo	10	2	10	3	0	25
5	Faris Fadžan	JU OŠ „Grbavica I” Sarajevo	10	10	0	3	0	23
6	Zerin Dozo	JU "Druga osnovna škola" Ilidža/Hrasnica	10	10	2	0	0	22
7	Aida Talović	JU OŠ „Grbavica II” Sarajevo	10	9	1	1	0	21
8	Mahir Hodžić	JU OŠ "Rapatnica" Srebrenik	10	3	4	3	0	20
8	Faris Varnica	JU OŠ "Kovačići" Sarajevo	9	3	6	2	0	20
10	Amna Brkanić	JU OŠ "Nafija Sarajlić" Sarajevo	10	4	4	0	0	18
10	Emin Džafić	JU OŠ „Kulin Ban" Visoko	10	3	4	1	0	18
12	Edib Devlić	JU OŠ „Kulin Ban" Visoko	10	4	1	2	0	17
13	Luka Tanasković	JU OŠ "Safvet-beg Bašagić" Sarajevo	3	10	1	2	0	16
13	Ajla Talović	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo	6	2	6	2	0	16
13	Leila Randall	JU OŠ „Hasan Kikić” Gračanica	6	4	4	2	0	16
16	Ajna Šehić	JU OŠ "Umihana Čuvidina" Sarajevo	6	3	3	3	0	15
16	Adi Taletović	JU OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo	10	3	2	0	0	15
16	Faris Ganić	JU OŠ "Mula Mustafa Bašeskija" Visoko	10	5	0	0	0	15
19	Asja Krnić	JU OŠ „Isak Samokovlija" Sarajevo	10	2	0	2	0	14
19	Lea Pencl	JU OŠ „Isak Samokovlija" Sarajevo	3	0	9	2	0	14
19	Eldar Halilović	JU OŠ „Kalesija" Kalesija	10	4	0	0	0	14
19	Sarah Spahić	JU OŠ „Novi Grad" Tuzla	10	0	1	3	0	14
19	Edin Višnjić	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	3	8	2	1	0	14
24	Mak Šimleša	JU OŠ „Sveti Franjo" Tuzla	10	3	0	0	0	13
24	Lamija Smajlović	JU OŠ "Muhsin Rizvić" Fojnica	6	0	5	2	0	13
24	Nea Dujso	JU OŠ "Musa Čazim Čatić" Sarajevo	10	0	3	0	0	13
27	Dunja Kafedžić	JU OŠ "Kovačići" Sarajevo	10	0	0	2	0	12
27	Amar Gekić	JU OŠ "Musa Čazim Čatić" Sarajevo	4	6	0	2	0	12
29	Mak Hadžić	JU OŠ „Grbavica I” Sarajevo	10	0	1	0	0	11
30	Una Hamedović	JU OŠ „Vladimir Nazor" Zenica	7	1	0	2	0	10
31	Una Šumar	JU OŠ „Harmani II", Bihać	0	2	0	7	0	9
32	Asja Redžović	JU OŠ „Gnojnice" Gnojnice, Mostar	2	4	0	0	0	6
33	Azra Huseinović	JU OŠ "Travnik" Travnik	0	4	1	0	0	5
34	Lamija Sitar	JU "Druga osnovna škola" Konjic	0	4	0	0	0	4
35	Hana Hodžić	JU OŠ "Travnik" Travnik	3	0	0	0	0	3
35	Daris Mehić	JU OŠ „Bužim", Bužim	0	3	0	0	0	3
35	Jasmina Ćorić	JU "Druga osnovna škola" Konjic	0	1	0	2	0	3
38	Vedad Sinanović	JU OŠ „Bukinje" Tuzla	0	2	0	0	0	2
39	Elma Hrelja	JU OŠ "MEHMEDALIJA MAK DIZDAR" Vitkovići	0	1	0	0	0	1
39	Nađa Srkalović	JU OŠ „Huso Hodžić" Tešanj	0	0	0	1	0	1
41	Sanela Aličajić	JU OŠ „Tržačka Raštela" Cazin	0	0	0	0	0	0
41	Bilal Jašarević	JU OŠ "Husein ef. Dozo" Goražde	0	0	0	0	0	0
41	Samir Hasanović	JU OŠ „Druga osnovna škola", Bosanska Krupa	0	0	0	0	0	0

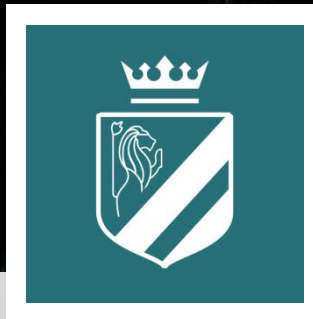
REZULTATI VIII



UČESNICI/E U KATEGORIJI 8.RAZRED

R.B.	IME I PREZIME	ŠKOLA	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	BOD
1	Iman Boškailo	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	10	10	7	4	10	41
2	Amina Agović	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	10	10	10	0	3	33
3	Bakir Suljić	JU OŠ „Meša Selimović“ Zenica	10	7	0	0	10	27
4	Adem Bišćević	JU OŠ "Mehmed-beg Kapetanović Ljubušak" Sarajevo	10	6	10	0	0	26
5	Lamija Isović	JU OŠ „Isak Samokovlija“ Sarajevo	10	5	2	0	3	20
5	Emin Čišija	JU OŠ „Kulin Ban“ Visoko	10	2	3	0	5	20
7	Kaan Kačapor	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo	10	9	0	0	0	19
8	Lamija Rovčanin	JU OŠ "Pofalići" Sarajevo	7	4	1	0	3	15
8	Ismail Hadžović	JU OŠ "Čamil Sijarić" Sarajevo	10	0	5	0	0	15
8	Hamdi Mehmedovski	JU OŠ "Mirsad Prnjavorac" Vogošća	8	0	7	0	0	15
11	Emina Durmo	JU "Četvrta osnovna škola" Sarajevo	10	0	4	0	0	14
12	Mahir Sulejmanović	JU "Druga osnovna škola" Živinice	10	0	2	0	0	12
12	Hamza Drkić	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	9	2	1	0	0	12
12	Samra Kulenović	JU OŠ "6. mart" Hadžići	9	0	3	0	0	12
15	Faris Dervišević	JU OŠ „Harmani II“ Bihać	10	0	1	0	0	11
16	Mesud Mešić	JU OŠ „Dr. Safvet-beg Bašagić, Gradačac	10	0	0	0	0	10
16	Sergej Smital	JU OŠ "Čengić Vila I" Sarajevo	2	8	0	0	0	10
18	Vedad Lendo	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo	1	2	6	0	0	9
19	Alma Fajić	JU OŠ „Poljice“ Lukavac	0	0	8	0	0	8
20	Asja Husejinović	JU "Treća osnovna škola" Ilidža	3	2	1	0	1	7
21	Bakir Kešetović	JU OŠ „Rapatnica“ Srebrenik	3	1	2	0	0	6
22	Martina Andrić	JU OŠ „Sveti Franjo“ Tuzla	4	1	0	0	0	5
23	Inea Dizdarić	JU OŠ "Gornje Prekounje - Ripač" Bihać	1	0	3	0	0	4
24	Edi Škrgić	JU OŠ „Ćoralići", Cazin	0	2	1	0	0	3
24	Omer Kaltak	JU OŠ "Travnik" Travnik	0	0	1	0	2	3
24	Senahid Selatović	JU OŠ "Vitez" Vitez	0	1	2	0	0	3
24	Naida Semić	JU OŠ "Zahid Baručija" Vogošća	2	0	1	0	0	3
28	Adnan Hadžikadunić	JU OŠ „1. mart" Tešanj	0	0	2	0	0	2
28	Ella Hamzic	JU OŠ "Nafija Sarajlić" Sarajevo	0	1	1	0	0	2
28	Kenan Kujrić	JU „Prva osnovna škola" Maglaj	0	0	2	0	0	2
28	Zlata Memić	JU "Druga osnovna škola" Konjic	0	0	2	0	0	2
28	Sena Mujagić	JU OŠ "Nafija Sarajlić" Sarajevo	0	0	2	0	0	2
33	Ilma Ohran	JU OŠ „Mehmedalija Mak Dizdar" Visoko	1	0	0	0	0	1
33	Adna Bistrić	JU OŠ „Hamdija Kreševljaković" Kamberi, Gradačac	0	1	0	0	0	1
33	Ismar Ljubijankić	JU OŠ „Gornja Koprivna", Cazin	0	0	1	0	0	1
33	Sajra Karagić	JU OŠ "Treća osnovna škola" Bugojno	0	0	1	0	0	1
37	Hadžera Rustić	JU "Prva osnovna škola" Konjic	0	0	0	0	0	0
37	Harun Omić	JU OŠ „5. oktobar", Sanski Most	0	0	0	0	0	0
37	Amna Hamzić	JU OŠ "Husein ef.Đozo" Goražde	0	0	0	0	0	0
37	Edis Tabak	JU "Druga osnovna škola" Konjic	0	0	0	0	0	0

REZULTATI IX



UČESNICI/E U KATEGORIJI 9.RAZRED

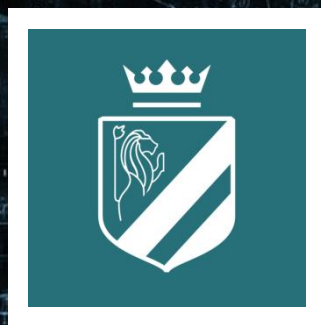
R.B.	IME I PREZIME	ŠKOLA	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	BOD
1	Faris Šabeta	JU OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	10	10	10	10	5	45
2	Dino Ahić	OŠ "Safvet beg Bašagić" Visoko	9	10	9	10	5	43
3	Merjem Đonko	JU OŠ "Mehmedalija Mak Dizdar" Sarajevo	10	10	10	10	0	40
3	Ahmed Fišek	JU OŠ „Musa Ćazim Ćatić" Visoko	10	10	10	10	0	40
5	Tarik Odžak	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo	9	10	0	10	5	34
6	Kenan Softić	Richmond Park Int. Primary School Tuzla	10	10	0	10	1	31
7	Džana Hodžabegović	JU OŠ „Harmani II", Bihać	10	10	8	2	0	30
7	Armin Šteta	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo	10	10	0	10	0	30
9	Fatih Čebirić	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo	4	10	2	10	0	26
10	Emil Macić	JU "Deveta osnovna škola" Ilidža	10	10	0	4	0	24
11	Ajdin Talović	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo	4	9	7	3	0	23
11	Amir Karamovic	JU OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	10	10	3	0	0	23
13	Adi Efendira	JU OŠ "Safvet-beg Bašagić" Visoko	2	10	0	10	0	22
13	Omer Drkić	JU "Druga osnovna škola" Ilidža/Hrasnica	2	10	0	10	0	22
13	Mubina Ramić	JU OŠ „Jezerki" Bosanska Krupa	8	10	0	4	0	22
16	Azra Jašarspahić	JU OŠ „Hamdija Kreševljaković" Kakanj	10	10	0	0	0	20
16	Abdullah Muminagić	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo	5	10	5	0	0	20
18	Amina Džananović	JU OŠ "Hasan Kikić " Gračanica	5	6	0	8	0	19
19	Ahmed Sedić	JU OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo	3	10	0	4	0	17
20	Naida Kadrić	JU OŠ „Safvet-beg Bašagić" Breza	2	10	0	4	0	16
20	Danija Sinanović	JU OŠ "Hasan Kaimija" Sarajevo	4	10	0	2	0	16
22	Ana Sarić	JU OŠ "Malta" Sarajevo	4	10	0	0	0	14
22	Una Ugarak	OŠ "Druga osnovna škola" Bugojno	1	10	0	3	0	14
24	Amar Jukan	JU "Druga osnovna škola" Gračanica	3	10	0	0	0	13
24	Ema Jusufagić	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo	4	9	0	0	0	13
26	Benjamin Mujkić	JU OŠ „Sjenjak" Tuzla	2	10	0	0	0	12
26	Mirza Bubalo	JU "Druga osnovna škola" Konjic	2	10	0	0	0	12
26	Josip Šimić	JU OŠ „Sveti Franjo" Tuzla	2	10	0	0	0	12
29	Eldar Zaketović	JU OŠ „Hasan Kikić" Gračanica	1	10	0	0	0	11
29	Ilda Bašić	JU „Prva osnovna škola" Maglaj	1	10	0	0	0	11
31	Ella Beširević	JU OŠ „Lejla Hairlahović-Hušić", Cazin	0	10	0	0	0	10
31	Davud Mušinović	JU "Prva osnovna škola" Konjic	0	10	0	0	0	10
31	Amina Pivalić	JU OŠ „5. oktobar", Sanski Most	0	10	0	0	0	10
31	Amina Huskić	OŠ "Treća osnovna škola" Bugojno	0	10	0	0	0	10
35	Emma Suljaković	JU „Prva osnovna škola" Maglaj	3	5	0	0	0	8
36	Kenan Hadžić	OŠ "Berta Kučera" Jajce	1	2	0	0	0	3
37	Zina Ivković	JU OŠ „Suljo Čilić" Jablanica	0	2	0	0	0	2
38	Tajra Mujezinović	JU OŠ „Ključ", Ključ	0	1	0	0	0	1
39	Naida Alispahić	JU OŠ "Husein ef.Đozo" Goražde	0	0	0	0	0	0
	Melisa Iskrić	JU OŠ „Ivan Goran Kovačić" Gradačac	NIJE PRISUSTVOVALA					0

POZIVNICA



**SPISAK POZVANIH NA JUNIORSKU OLIMPIJADU IZ MATEMATIKE
NA PODRUČJU BOSNE I HERCEGOVINE – 1.JUNI, FRANJEVAČKA KLASIČNA GIMNAZIJA VISOKO**

R.B.	IME I PREZIME	ŠKOLA	RAZRED
1	Faris Šabeta	JU OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	9
2	Dino Ahić	OŠ "Safvet beg Bašagić" Visoko	9
3	Merjem Đonko	JU OŠ "Mehmedalija Mak Dizdar" Sarajevo	9
4	Ahmed Fišek	JU OŠ „Musa Ćazim Ćatić" Visoko	9
5	Tarik Odžak	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo	9
6	Kenan Softić	Richmond Park Int. Primary School Tuzla	9
7	Džana Hodžabegović	JU OŠ „Harmani II“, Bihać	9
8	Armin Šteta	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo	9
9	Fatih Čebirić	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo	9
10	Emil Macić	JU "Deveta osnovna škola" Ilidža	9
11	Ajdin Talović	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo	9
12	Amir Karamovic	JU OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	9
13	Adi Efendira	JU OŠ "Safvet-beg Bašagić" Visoko	9
14	Omer Drkić	JU "Druga osnovna škola" Ilidža/Hrasnica	9
15	Mubina Ramić	JU OŠ „Jezerski" Bosanska Krupa	9
16	Iman Boškailo	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	8
17	Amina Agović	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	8
18	Bakir Suljić	JU OŠ „Meša Selimović" Zenica	8
19	Adem Bišćević	JU OŠ "Mehmed-beg Kapetanović Ljubušak" Sarajevo	8
20	Lamija Isović	JU OŠ „Isak Samokovlija" Sarajevo	8
21	Emin Čišija	JU OŠ „Kulin Ban" Visoko	8
22	Kaan Kačapor	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo	8



GALERIJA



Sadmir Delić, dir. RPIS Tuzla



Izet Numanović, direktor Pedagoškog zavoda TK



Admir Beširević, Udruženje matematičara KS



Prof.Dr. Enes Duvnjaković, Udruženje mat. TK



Prof.Dr. Zenan Šabanac, Udruženje mat. KS



Dina Mehanović Hulusić, član OO takmičenja



Elmir Tukić, predstavnik MONTK

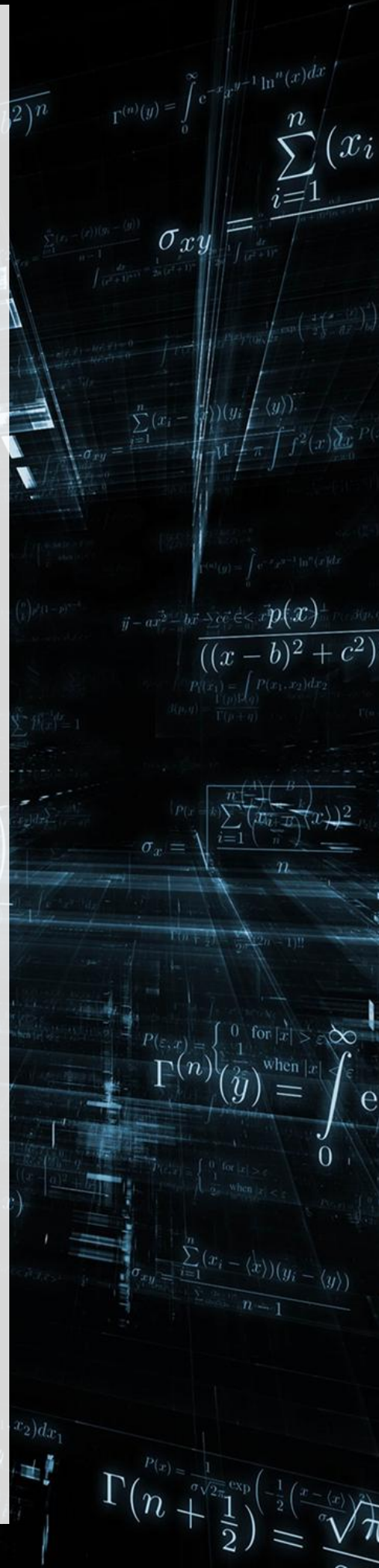


Mentori i učenici, učesnici takmičenja





Naši volonteri Sara i Tarik na prijemu učenika





Dilan Tuzović (5.), Kenan Hamza (4.), Selim Sabljica (3.), Ema Salihbegović (2.) i Merjem Smajić (1.mjesto) u kategoriji 6.razred



Medina Džafo (2.), Azra Hadžić (2.), Dalal Smajlović (2.) i Emin Junuzi (1. mjesto) u kategoriji 7. razred



Emin Čišija (5.), Lamija Isović (5.), Bakir Suljić (3.) Amina Agović (2.) i Iman Boškailo (1.mjesto) u kategoriji 8.razred



Ahmed Fišek (3.), Merjem Đonko (3.), Dino Ahić (2.) i Faris Šabeta (1.mjesto) u kategoriji 9.razred