KANTON SARAJEVO

Kantonalno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola

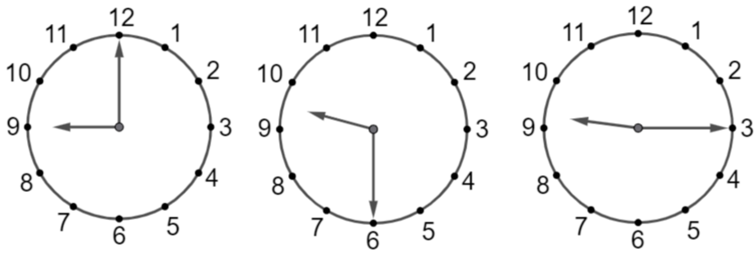
2. aprila/travnja 2025.

VI razred

1. zadatak a) Sada je 2. april i tačno je 9 sati i 5 minuta (ujutro). Koji datum i koliko sati će biti za 2025 minuta? Odgovor obrazložiti!

b) Koliki će ugao zaklapati kazaljke na satu za 2025 minuta? Odgovor obrazložiti!

Napomena: Kako nismo sigurni koliko današnje generacije koriste analogne satove, ispod je primjer položaja kazaljki u $9:00, 9:30$ i $9:15$, redom (ili $21:00, 21:30, 21:15$).



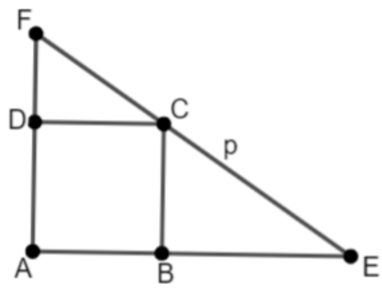
2. zadatak a) Odrediti razlomak koji je jednak $\frac{4}{11}$, a čiji je zbir brojnika i nazivnika jednak 2025.

b) Odrediti sve prirodne brojeve n takve da vrijedi

$$\frac{4}{11} < \frac{27}{n} < \frac{15}{38}.$$

3. zadatak U razredu su 23 učenika. Nastavnik je kupio određen broj bombona tako da može svakom učeniku iz razreda podijeliti jednak broj bombona. Međutim, kada je došao na nastavu, primijetio je da su 3 učenika odsutna. Zbog toga je svim učenicima podijelio dvije bombone više nego što je prvobitno zamislio, i pritom su mu ostale dvije bombone viška. Koliko bombona je nastavnik kupio? Odgovor obrazložiti!

4. zadatak Dat je kvadrat $ABCD$. Kroz vrh C je povučena prava p koja siječe produžetke stranica AB i AD u tačkama E i F, kao na slici. Obim trougla BEC iznosi $48cm$, a obim trougla DCF iznosi $36cm$. Također, poznato je da je duž BE za $7cm$ duža od duži DF. Ako je dužina duži EF jednaka $35cm$, odrediti dužine duži AE i AF.



5. zadatak Odrediti sve parove cifara (a, b) takve da je proizvod brojeva $\overline{562aa4}$ i $\overline{73031bb}$ djeljiv sa 72. Odgovor obrazložiti!

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.

Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.

Sretno!

KANTON SARAJEVO
Kantonalno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola
2. aprila/travnja 2025.

VII razred

1. zadatak Zadan je tupougli jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom $\overline{AB}$. Na osnovici je data tačka D tako da je $\angle ACD = 35^\circ$. Na kraku $\overline{BC}$ je data tačka E tako da vrijedi da je $\overline{CE} = \overline{CD}$. Odrediti veličinu ugla $\angle BDE$.

2. zadatak Nastavnik je kupio određeni broj bombona i planirao je svim učenicima u svom razredu podijeliti po 20 bombona. Međutim, primijetio je da ima 5 bombona viška, koje je odlučio dati svom sinu nakon nastave. Ipak, kada je došao na nastavu, vidio je da su 3 učenika odsutna, pa je prisutnim učenicima podijelio po 24 bombone, a za sina mu je onda ostala samo jedna bombona. Koliko je bombona nastavnik ukupno kupio?

3. zadatak Odrediti sve četverocifrene prirodne brojeve $\overline{abcd}$ koji imaju sljedeće svojstvo: ako se od tog broja oduzme broj $\overline{abc}$ (trocifreni broj koji se od broja $\overline{abcd}$ dobija brisanjem posljednje cifre), dobije se vrijednost 2025.

4. zadatak Odrediti sve prirodne brojeve a, b, c i d tako da vrijedi:

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{599}{121}.$$

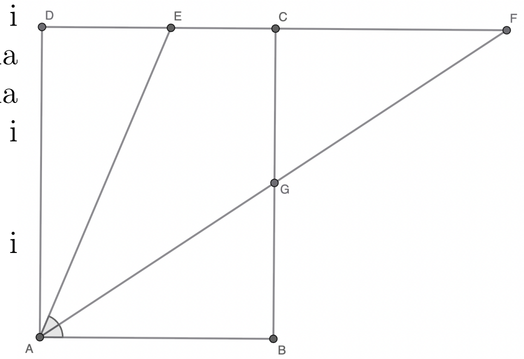
5. zadatak Neka je ABC pravougli trougao sa pravim uglom u vrhu A, $\overline{AD}$ odgovarajuća visina iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$, BE simetrala ugla $\angle ABC$ (pri čemu tačka E leži na $\overline{AC}$), a AF simetrala ugla $\angle CAD$ (tačka F leži na $\overline{CD}$). Dokazati da je EF paralleno sa AD.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.
Sretno!

KANTON SARAJEVO
Kantonalno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola
2. aprila/travnja 2025.

VIII razred

1. zadatak U pravougaoniku $ABCD$ vrijedi $AD = BC = 12$ i $AB = CD = 9$. Tačka E je data na stranici CD tako da vrijedi da je obim četverougla $ABCE$ za 8 veći od obima trougla ΔAED. Prava AF je simetrala ugla $\angle BAE$ i siječe stranicu BC u tački G.



a) Odrediti omjer površina trougla ΔAFE i pravougaonika $ABCD$.

b) Izračunati dužinu duži CG.

2. zadatak Na kantonalnom takmičenju iz matematike učestvovalo je 57 učenika. Na takmičenju su bila 3 zadatka. Ispostavilo se da je svaki učenik uradio bar jedan zadatak, i da je komisija izbrojala ukupno 100 urađenih zadataka.

a) Koliko je najviše moglo biti učenika koji su uradili tačno dva zadatka?

b) Koliko je najviše moglo biti učenika koji su uradili sva tri zadatka?

Odgovore obrazložiti!

3. zadatak Odrediti sve trojke (a, b, c) realnih brojeva takve da vrijedi:

$$a^3 + b = 4c$$

$$a + b^3 = c$$

$$ab = -1$$

4. zadatak Na stranicama AB i AC trougla ABC, date su tačke D i E, redom, tako da vrijedi $AD = AE$. Dokazati da se od duži BE, CD i BC može konstruisati trougao.

5. zadatak Neka su p i q različiti prosti brojevi i neka su a i b dva prirodna broja za koja vrijedi $ap + bq = ab$. Dokazati da se broj $a + b$ može zapisati kao proizvod dva prirodna broja čiji je zbir jednak $p + q + 2$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.
Sretno!

KANTON SARAJEVO
Kantonalno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola
2. aprila/travnja 2025.

IX razred

1. zadatak Za realne brojeve a, b, c, d vrijedi $b \neq 0, d \neq 0, a+b \neq 0, c+d \neq 0$ i $a+b+c+d \neq 0$, kao i $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Dokazati da je

$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d} = 0.$$

2. zadatak Odrediti sve trojke (x, y, z) realnih brojeva tako da vrijedi

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= z^2 + 1 \\ (y+z)^2 &= x^2 + 5 \\ (z+x)^2 &= y^2 + 10 \end{aligned}$$

3. zadatak U dvije kutije nalazi se ukupno 65 loptica. Svaka loptica je jedne od četiri boje: plava, crvena, crna ili bijela. Poznato je da, kojih god pet loptica odaberemo tako da su iste boje i nalaze se u istoj kutiji, među njima postoje barem dvije iste veličine. Dokazati da postoje tri loptice koje su iste boje, iste veličine i nalaze se u istoj kutiji.

4. zadatak Dat je pravougli trougao $\triangle ABC$ sa pravim uglom u tjemenu C. Na kateti BC odabrana je tačka D takva da vrijedi $BD = 2 \cdot DC$. Ako je M središte hipotenuze AB, dokazati da je prava BC simetrala vanjskog ugla kod tjemena D u trouglu $\triangle ADM$.

5. zadatak Dat je prost broj p. U jednoj grupi tinejdžera, neki koriste samo Instagram, neki koriste samo TikTok, a neki koriste i Instagram i TikTok. Poznato je da barem jedna osoba koristi obje društvene mreže. Broj onih koji koriste samo TikTok tačno je $p+1$ puta veći od broja onih koji koriste samo Instagram. Također, kvadrat ukupnog broja korisnika Instagrama jednak je ukupnom broju korisnika TikToka. Odrediti sve mogućnosti za broj tinejdžera koji koriste obje društvene mreže.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.
Sretno!

KANTON SARAJEVO
Kantonalno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola
2. aprila/travnja 2025.

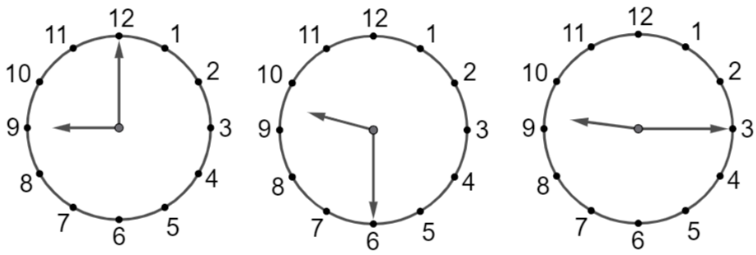
VI razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

1. zadatak a) Sada je 2. april i tačno je 9 sati i 5 minuta (ujutro). Koji datum i koliko sati će biti za 2025 minuta? Odgovor obrazložiti!

b) Koliki će ugao zaklapati kazaljke na satu za 2025 minuta? Odgovor obrazložiti!

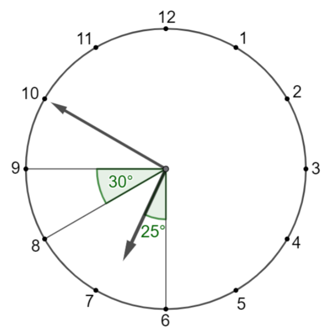
Napomena: Kako nismo sigurni koliko današnje generacije koriste analogne satove, ispod je primjer položaja kazaljki u $9:00, 9:30$ i $9:15$, redom (ili $21:00, 21:30, 21:15$).



Rješenje:

(a) Kako je $2025 : 60 = 33(45)$, to su prošla 33 sata i 45 minuta. Za 24 sata će biti 3. april i 9 sati i 5 minuta. Za 33 sata će biti 18 sati i 5 minuta, pa će za 33 sata i 45 minuta biti 18 sati i 50 minuta, a datum će biti 3. april.

(b) Primijetimo da je ugao koji kazaljka opiše između dva susjedna broja na satu jednak $360° : 12 = 30°$.
Velika kazaljka će pokazivati na broj 10, a mala negdje između 6 i 7. Kako je prošlo $\frac{50}{60} = \frac{5}{6}$ sata, to je mala kazaljka na $\frac{5}{6} \cdot 30° = 25°$ od broja 6, a na $5°$ od broja 7. Zbog toga je ugao između kazaljki jednak $5° + 3 \cdot 30° = 95°$.



Šema bodovanja:

- dio pod a) .... **7 bodova**
  - pretvarnje minuta u sate i minute .... **3 boda**
  - dobijanje datuma i vremena .... **4 boda**
- dio pod b) .... **13 bodova**
  - zaključak da je ugao između susjednih brojeva jednak $30°$ .... **4 boda**
  - određivanje ugla između kazaljke i broja 7 (ili 6) .... **7 bodova**
  - izračun traženog ugla .... **2 boda**

Napomena: Ukoliko učenik dobije pogrešno rješenje pod a), ali pod b) tačno odredi ugao za svoje vrijeme, dobija sve bodove za dio pod b) ukoliko je složenost određivanja ugla za njegovo vrijeme ista (ili veća) kao složenost računanja ugla za $18:50$.

2. zadatak a) Odrediti razlomak koji je jednak $\frac{4}{11}$, a čiji je zbir brojnika i nazivnika jednak 2025.

b) Odrediti sve prirodne brojeve n takve da vrijedi

$$\frac{4}{11} < \frac{27}{n} < \frac{15}{38}.$$

Rješenje:

a) Traženi razlomak možemo zapisati u obliku $\frac{4x}{11x}$. Odavde po uslovu zadatka imamo da je

$$\begin{aligned} 4x + 11x &= 2025 \Leftrightarrow \\ 15x &= 2025 \Leftrightarrow \\ x &= 135. \end{aligned}$$

Dakle, traženi razlomak je $\frac{4\cdot 135}{11\cdot 135} = \frac{540}{1485}$.

Napomena: Učenik može zaključiti da kako je zbir brojnika i nazivnika 15, razlomak treba proširiti sa $2025 : 15 = 135$.

Šema bodovanja:

- zapis razlomka u obliku $\frac{4x}{11x}$ .... **2 boda**
- pravilno razumijevanje i formulacija uslova zadatka $4x + 11x = 2025$ ... **1 bod**
- tačno rješavanje jednačine $15x = 2025 \implies x = 135$ .... **1 bod**
- tačno formiranje razlomka $\frac{4\cdot 135}{11\cdot 135}$ .... **1 bod**
- krajnji tačan rezultat $\frac{540}{1485}$ .... **1 bod**

b) **Rješenje 1:**

Ideja je da u početnoj dvostrukoj nejednakosti date razlomke svedemo na zajednički brojnik. Kako je

$$\text{NZS}(4,\ 27,\ 15) = 540,$$

to imamo:

$$\frac{4}{11} = \frac{4\cdot 135}{11\cdot 135} = \frac{540}{1485}, \qquad \frac{27}{n} = \frac{27\cdot 20}{n\cdot 20} = \frac{540}{20n}, \qquad \frac{15}{38} = \frac{15\cdot 36}{38\cdot 36} = \frac{540}{1368}.$$

Pošto svi razlomci sada imaju isti brojnik, možemo ih upoređivati poređenjem nazivnika, imajući u vidu da je veći onaj razlomak čiji je nazivnik manji.

Dakle, dobijamo

$$\frac{540}{1485} < \frac{540}{20n} < \frac{540}{1368},$$

što znači:

$$1485 > 20n > 1368.$$

Rješavanjem ove dvostruke nejednakosti dijeljenjem svih članova sa 20 dobijamo:

$$\frac{1485}{20} > n > \frac{1368}{20},$$

odnosno:

$$74\frac{1}{4} > n > 68\frac{2}{5}.$$

Kako tražimo sve prirodne brojeve koji zadovoljavaju ove nejednakosti, rješenje je:

$$n \in \{69,\ 70,\ 71,\ 72,\ 73,\ 74\}.$$

Šema bodovanja:

- navođenje ideje da se razlomci svedu na zajednički brojnik i ispravno određivanje $NZS(4, 27, 15) = 540$ . . . . **2 boda**
- ispravno proširivanje sva tri data razlomka . . . . **5 bodova**
- ispravno korištenje pravila poređenja razlomaka s istim brojnikom . . . . **3 boda**
- formiranje dvostruke nejednakosti $1485 > 20n > 1368$ . . . . **1 bod**
- tačno pretvaranje nejednakosti u mješovite razlomke $74\frac{1}{4} > n > 68\frac{2}{5}$ . . . **1 bod**
- korektno navođenje svih prirodnih brojeva koji zadovoljavaju uslov . . . **2 boda**

Rješenje 2:

Imamo:

$$\begin{aligned} \frac{4}{11} &< \frac{27}{n} / \cdot 11n \\ \Leftrightarrow 4n &< 27 \cdot 11 \\ \Leftrightarrow 4n &< 297 \\ \Leftrightarrow n &< \frac{297}{4} = 74\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Također, vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{27}{n} &< \frac{15}{38} / \cdot 38n \\ \Leftrightarrow 27 \cdot 38 &< 15n \\ \Leftrightarrow 1026 &< 15n \\ \Leftrightarrow n &> \frac{1026}{15} = \frac{342}{5} = 68\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Dakle, $68\frac{2}{5} < n < 74\frac{1}{4}$, pa svi prirodni brojevi koji zadovoljavaju uslove zadatka pripadaju skupu $n \in \{69, 70, 71, 72, 73, 74\}$.

Šema bodovanja:

- formiranje i analiza lijeve strane nejednakosti $\frac{4}{11} < \frac{27}{n}$ . . . . **5 bodova**
  - pravilno postavljanje nejednakosti $\frac{4}{11} < \frac{27}{n}$ i množenje sa $11n$ . . . . **2 boda**
  - tačno izvođenje $n < \frac{297}{4}$ . . . . **2 boda**
  - tačno pretvaranje $\frac{297}{4}$ u mješoviti razlomak $74\frac{1}{4}$ . . . . **1 bod**
- formiranje i analiza desne strane nejednakosti $\frac{27}{n} < \frac{15}{38}$ . . . . **5 bodova**
  - pravilno postavljanje nejednakosti $\frac{27}{n} < \frac{15}{38}$ i množenje sa $38n$ . . . . **2 boda**
  - tačno izvođenje $n > \frac{1026}{15}$ . . . . **2 boda**
  - tačno pretvaranje $\frac{1026}{15}$ u mješoviti razlomak $68\frac{2}{5}$ . . . . **1 bod**
- pravilno spajanje dvostruke nejednakosti $68\frac{2}{5} < n < 74\frac{1}{4}$ . . . . **2 boda**
- konačno navođenje svih prirodnih brojeva koji zadovoljavaju uslov . . . . **2 boda**

3. zadatak U razredu su 23 učenika. Nastavnik je kupio određen broj bombona tako da može svakom učeniku iz razreda podijeliti jednak broj bombona. Međutim, kada je došao na nastavu, primijetio je da su 3 učenika odsutna. Zbog toga je svim učenicima podijelio dvije bombone više nego što je prvobitno zamislio, i pritom su mu ostale dvije bombone viška. Koliko bombona je nastavnik kupio? Odgovor obrazložiti!

Rješenje:

Označimo broj bombona koje je nastavnik kupio sa N, a broj bombona koji je planirao dati svakom učeniku sa x.

Iz uslova da je nastavnik planirao svakom od 23 učenika podijeliti po x bombona, slijedi da je

$$N = 23x.$$

Međutim, kada su 3 učenika izostala, u razredu je bilo prisutno 20 učenika. Svakom učeniku je nastavnik dao 2 bombone više nego što je planirao, tj. $x + 2$, i ostale su mu još 2 bombone viška. Iz toga slijedi da je

$$N = 20(x + 2) + 2.$$

Izjednačavanjem prethodna dva izraza za N, dobijamo jednačinu po x.

$$23x = 20(x + 2) + 2,$$

koja se svodi na

$$3x = 42.$$

Rješenje posljednje jednačine je

$$x = 14.$$

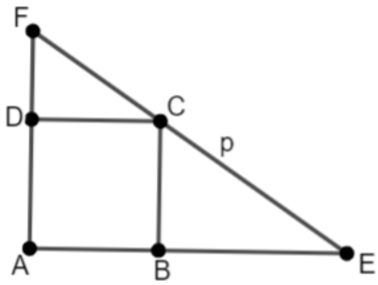
Ukupan broj bombona koje je nastavnik kupio jednak je

$$N = 23 \cdot 14 = 322.$$

Šema bodovanja:

- uvođenje nepoznatih za ukupan broj bombona i broj bombona koje je trebao dobiti svaki učenik pojedinačno .... **2 boda**
- izražavanje $N = 23x$ .... **3 boda**
- izražavanje $N = 20(x + 2) + 2$ .... **7 bodova**
- izjednačavanje dobijena dva izraza za N .... **3 boda**
- određivanje $x = 14$ .... **3 boda**
- dobijanje $N = 322$ .... **2 boda**

4. zadatak Dat je kvadrat $ABCD$. Kroz vrh C je povučena prava p koja siječe produžetke stranica AB i AD u tačkama E i F, kao na slici. Obim trougla BEC iznosi $48cm$, a obim trougla DCF iznosi $36cm$. Također, poznato je da je duž BE za $7cm$ duža od duži DF. Ako je dužina duži EF jednaka $35cm$, odrediti dužine duži AE i AF.



Rješenje:

Neka je $AB = BC = CD = DA = a$.

Iz uslova zadatka je

$$a + BE + EC = 48, \tag{1}$$

$$a + CF + DF = 36. \tag{2}$$

Kako je $BE = DF + 7$, uvrštavanjem u (1) dobijamo

$$a + DF + 7 + EC = 48,$$

$$a + DF + EC = 41.$$

Sada, ako od posljednje relacije oduzmemo relaciju (2), dobijamo

$$EC - CF = 5.$$

S druge strane, kako je

$$EC + CF = EF = 35,$$

sabiranjem posljednje dvije relacije dobijamo $2EC = 40$, tj. $EC = 20cm$.

Sada je $CF = EC - 5 = 20 - 5 = 15cm$.

Ako u (1) uvrstimo $EC = 20$, dobijamo

$$a + BE = 28.$$

Međutim, onda je $AE = AB + BE = a + BE = 28cm$.

Slično, ako u (2) uvrstimo $CF = 15$, dobijamo

$$a + DF = 21,$$

pa je $AF = AD + DF = a + DF = 21cm$.

Kako je

Šema bodovanja:

- dobijanje relacije $a + DF + EC = 41$ .... **2 boda**
- dobijanje relacije $EC - CF = 5$ .... **4 boda**
- izračun dužina duži EC i FC .... **4 boda**
- izračun dužina duži AE i AF .... **10(5+5) bodova**

5. zadatak Odrediti sve parove cifara (a, b) takve da je proizvod brojeva $\overline{562aa4}$ i $\overline{73031bb}$ djeljiv sa 72. Odgovor obrazložiti!

Rješenje:

Broj je djeljiv sa 72 ako je djeljiv sa 8 i 9.

Proizvod dva broja će biti djeljiv sa 9 ako je jedan od ta dva broja djeljiv sa 9 ili ako su oba broja djeljiva sa 3.

Proizvod dva broja će biti djeljiv sa 8 ako je jedan od njih djeljiv sa 8 ili ako je jedan djeljiv sa 2, a drugi sa 4.

Razlikujemo tri slučaja:

1° Broj $\overline{562aa4}$ je djeljiv sa 9.

Tada je zbir njegovih cifara $5 + 6 + 2 + a + a + 4 = 2a + 17$ djeljiv sa 9. Kako je $17 \leq 2a + 17 \leq 35$ i $2a + 17$ je neparan broj, mora vrijediti $2a + 17 = 27$, tj. $a = 5$.

Tada je broj 562554 djeljiv sa 2, ali ne i sa 4 (jer dvocifreni završetak nije djeljiv sa 4). Međutim, onda broj $\overline{73031bb}$ mora biti djeljiv sa 4, tj. njegov dvocifreni završetak mora biti djeljiv sa 4, odakle zaključujemo da $b \in \{0, 4, 8\}$.

Dakle, u ovom slučaju imamo parove $(a, b) \in \{(5, 0), (5, 4), (5, 8)\}$.

2° Broj $\overline{562aa4}$ je djeljiv sa 3, ali ne i sa 9.

Tada je neparni broj $2a + 17$ djeljiv sa 3, ali ne i sa 9, odakle zaključujemo da $2a + 17 \in \{21, 33\}$, tj. $a \in \{2, 8\}$.

Za $a = 2$, broj 562224 je djeljiv sa 8 (trocifreni završetak 224 je djeljiv sa 8), pa je još samo potrebno da broj $\overline{73031bb}$ bude djeljiv sa 3. Zbir njegovih cifara je $7 + 3 + 0 + 3 + 1 + b + b = 2b + 14$, odakle lako dobijamo da $b \in \{2, 5, 8\}$.

Za $a = 8$, broj 562884 je djeljiv sa 4, ali ne i sa 8 (dvocifreni završetak jeste djeljiv sa 4, ali trocifreni nije sa 8), pa je potrebno da broj $\overline{73031bb}$ bude djeljiv i sa 2 i sa 3. Kako b mora biti parna cifra, dobijamo $b \in \{2, 8\}$.

Dakle, u ovom slučaju imamo parove $(a, b) \in \{(2, 2), (2, 5), (2, 8), (8, 2), (8, 8)\}$.

3° Broj $\overline{562aa4}$ nije djeljiv sa 3.

Tada broj $\overline{73031bb}$ mora biti djeljiv sa 9, tj. zbir njegovih cifara $2b + 14$ mora biti djeljiv sa 9, odakle dobijamo $b = 2$. Kako je broj 7303122 djeljiv sa 2, ali ne i sa 4, broj $\overline{562aa4}$ mora biti djeljiv sa 4, odakle $a \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Međutim, u ovom slučaju je nemoguće da vrijedi $a = 2$ i $a = 8$, jer je tada broj $\overline{562aa4}$ djeljiv sa 3.

Dakle, u ovom slučaju imamo parove $(a, b) \in \{(0, 2), (4, 2), (6, 2)\}$.

Konačno, svi traženi uređeni parovi su

$(a, b) \in \{(5, 0), (5, 4), (5, 8), (2, 2), (2, 5), (2, 8), (8, 2), (8, 8), (0, 2), (4, 2), (6, 2)\}$.

Šema bodovanja:

- zaključak da broj treba biti djeljiv sa 8 i 9 .... **1 bod**
- zaključak da može jedan od brojeva biti djeljiv sa 9 ili oba broja sa 3 ..... **2 boda**
- zaključak da može biti jedan od brojeva djeljiv sa 8 ili jedan od njih djeljiv sa 2, a drugi sa 4 .... **2 boda**
  - ∗ Učenik prethodne zaključke ne mora eksplicitno navesti, dovoljno je da se prilikom rješavanja slučajeva vidi da razumije da su to neophodni uslovi.
- rješavanje slučaja kada je prvi broj djeljiv sa 9 .... **4 boda**
- rješavanje slučaja kada su oba broja djeljiva sa 3 .... **7 bodova**
- rješavanja slučaja kada je drugi broj djeljiv sa 9 .... **4 boda**

KANTON SARAJEVO
Kantonalno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola
2. aprila/travnja 2025.

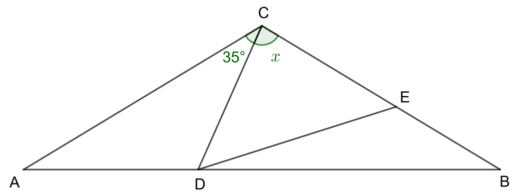
VII razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

1. zadatak Zadan je tupougli jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom $\overline{AB}$. Na osnovici je data tačka D tako da je $\angle ACD = 35°$. Na kraku $\overline{BC}$ je data tačka E tako da vrijedi da je $\overline{CE} = \overline{CD}$. Odrediti veličinu ugla $\angle BDE$.

Rješenje:

Označimo $\angle BCD$ sa x. Tada je $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD = 35° + x$. Kako je trougao $\triangle ABC$ jednakokraki sa osnovicom $\overline{AB}$, to je



$$\angle ABC = \angle CAB = \frac{180° - (35° + x)}{2} = \frac{145°}{2} - \frac{x}{2}.$$

Također, kako je $\overline{CE} = \overline{CD}$, to je trougao $\triangle CDE$ jednakokraki i u njemu vrijedi da je

$$\angle CED = \angle CDE = \frac{180° - x}{2} = 90° - \frac{x}{2}.$$

Posmatrajmo sada trougao $\triangle BDE$. U njemu je $\angle DBE = \angle ABC = \frac{145°}{2} - \frac{x}{2}$ i $\angle BED = 180° - \angle CED = 90° + \frac{x}{2}$ (jer su $\angle BED$ i $\angle CED$ naporedni uglovi), pa je

$$\angle BDE = 180° - \angle DBE - \angle BED = 180° - \left(\frac{145°}{2} - \frac{x}{2}\right) - \left(90° + \frac{x}{2}\right) = \frac{35°}{2} = 17°30'.$$

Dakle, $\angle BDE = 17°30'$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da je $\angle ABC = \angle CAB$ .... **2 boda**
- Zaključak da je $\angle CED = \angle CDE$ .... **3 boda**
- Izražavanje uglova $\angle ABC$ i $\angle CED$ preko jednog nepoznatog ugla (npr. $\angle ECD$ ili $\angle ADC$ ili dobijanje da je $\angle CED - \angle ABC = 17°30'$ .... **8 bodova**
- Izračun ugla $\angle BDE$ .... **7 bodova**

2. zadatak Nastavnik je kupio određeni broj bombona i planirao je svim učenicima u svom razredu podijeliti po 20 bombona. Međutim, primijetio je da ima 5 bombona viška, koje je odlučio dati svom sinu nakon nastave. Ipak, kada je došao na nastavu, vidio je da su 3 učenika odsutna, pa je prisutnim učenicima podijelio po 24 bombone, a za sina mu je onda ostala samo jedna bombona. Koliko je bombona nastavnik ukupno kupio?

Rješenje:

Označimo broj bombona koje je kupio nastavnik sa N, a broj učenika sa x. Iz uslova da kada nastavnik svim učenicima podijeli po 20 bombona ostane mu 5 za sina, slijedi da je

$$N = 20x + 5.$$

Iz uslova da kada su tri učenika odsutna svako može dobiti po 24 bombone i da 1 ostane za nastavnikovog sina slijedi da je

$$N = 24(x - 3) + 1.$$

Iz posljednje dvije jednakosti izjednačavanjem dobijemo jednačinu po x

$$20x + 5 = 24(x - 3) + 1,$$

koja se svodi na

$$4x = 76.$$

Rješenje posljednje jednačine je

$$x = 19.$$

Broj bombona koje je kupio nastavnik jednak je $N = 20 \cdot 19 + 5 = 385$.

Šema bodovanja:

- Uvođenje nepoznatih za broj bombona i broj učenika .... **2 boda**
- Izražavanje $N = 20x + 5$ .... **4 boda**
- Izražavanje $N = 24(x - 3) + 1$ .... **6 bodova**
- izjednačavanje izraza za N .... **3 boda**
- Određivanje $x = 19$ .... **3 boda**
- Dobijanje $N = 385$ .... **2 boda**

3. zadatak Odrediti sve četverocifrene prirodne brojeve $\overline{abcd}$ koji imaju sljedeće svojstvo: ako se od tog broja oduzme broj $\overline{abc}$ (trocifreni broj koji se od broja $\overline{abcd}$ dobija brisanjem posljednje cifre), dobije se vrijednost 2025.

Rješenje:

Jednačina koja opisuje tražene četverocifrene brojeve $\overline{abcd} - \overline{abc} = 2025$ se može zapisati kao

$$1000a + 100b + 10c + d - 100a - 10b - c = 2025,$$

$$900a + 90b + 9c + d = 2025.$$

Desna strana posljednje jednačine je djeljiva s 9, a očigledno su i prva tri člana lijeve strane djeljiva s 9. Dakle, i cifra d mora biti djeljiva s 9. Odnosno $d = 0$ ili $d = 9$.

Ukoliko je $d = 0$, onda se jednačina svodi na

$$100a + 10b + c = 225.$$

Cifra c mora biti neparna i djeljiva s 5, pa je $c = 5$. Uvrštavanjem, oduzimanjem i djeljenjem s 10, dobivamo jednačinu

$$10a + b = 22.$$

Ukoliko je $a > 2$, onda bi cifra b se dobila negativna, što je nemoguće. Isto tako, ukoliko je $a = 1$, onda se cifra b dobije dvocifrena što je također nemoguće. Da bi početni broj bio četverocifren cifra a ne može biti 0, pa je očigledno $a = 2$ te $b = 2$.
Broj koji je rješenje zadatka u ovom slučaju je

$$\overline{abcd} = 2250$$

Ukoliko je $d = 9$, onda se jednačina svodi na

$$100a + 10b + c = 224.$$

Uzimajući u obzir rješenje prvog slučaja, zaključuje se da ova jednačina ima samo rješenje kada a i b ostanu iste vrijednosti, a vrijednost cifre c se smanji za 1.
Broj koji je rješenje zadatka u ovom slučaju je

$$\overline{abcd} = 2249.$$

Uvrštavanjem u početnu jednačinu se lako provjerava da ova dva broja 2249 i 2250 stvarno predstavljaju rješenja zadatka.
Napomena: Rješenje zadatka se moglo znatno skratiti ako se zaključi da je u prvom slučaju $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 225$, a u drugom $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 224$.

Šema bodovanja:

- Svođenje na jednačinu: $900a + 90b + 9c + d = 2025$ .... **4 boda**
- Dokazivanje da mora biti $d = 0$ ili $d = 9$ .... **6 bodova**
- Rješavanje svakog od slučajeva .... **po 5 bodova**
  - Određivanje vrijednosti c .... **3 boda**
  - Određivanje vrijednosti a i b .... **2 boda**

4. zadatak Odrediti sve prirodne brojeve a, b, c i d tako da vrijedi:

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}=\frac{599}{121}.$$

Rješenje:

Razlomak $\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}$ je pozitivan i manji od 1 (jer mu je nazivnik očigledno veći od 1). Desna strana date jednačine je $\frac{599}{421}=4+\frac{115}{121}$, pa mora vrijediti $a=4$ i $\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}=\frac{115}{121}$.
Uzimajući recipročnu vrijednost posljednje jednakosti dobijamo

$$b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}=\frac{121}{115}=1+\frac{6}{115}.$$

Opet, kako je razlomak $\frac{1}{c+\frac{1}{d}}$ pozitivan i manji od 1, zaključujemo da mora vrijediti $b=1$ i $\frac{1}{c+\frac{1}{d}}=\frac{6}{115}$.

Napomena: Mogli smo zaključiti da je $b=1$ i jer je razlomak $\frac{121}{115}$ manji od 2, pa je jedina mogućnost $b=1$.

Uzimajući recipročnu vrijednost dobijamo

$$c+\frac{1}{d}=\frac{115}{6}=19+\frac{1}{6}.$$

Kako je razlomak $\frac{1}{d}$ pozitivan i manji ili jednak od 1, posljednja jednakost može da vrijedi samo za $c=19$ i $\frac{1}{d}=\frac{1}{6}$, tj. $d=6$.
Dakle, jedina četvorka koja zadovoljava uslove zadatka je $(a,b,c,d)=(4,1,19,6)$.

Šema bodovanja:

- zaključak da mora vrijediti $a=4$ .... **5 boda**
- zaključak da vrijedi $b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}=\frac{121}{115}$ .... **3 boda**
- zaključak da mora vrijediti $b=1$ .... **3 boda**
- zaključak da vrijedi $c+\frac{1}{d}=\frac{115}{6}$ .... **3 boda**
- zaključak da mora vrijediti $c=19$ .... **5 bodova**
- dobijanje $d=6$ .... **1 bod**

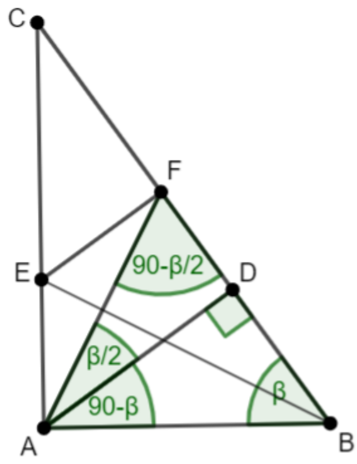
Napomena: Pod "zaključak da mora vrijediti" se podrazumijeva da je taj zaključak donesen uz obrazloženje zašto baš tako mora biti. Na primjer, ukoliko učenik napiše

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}=4+\frac{115}{121},$$

i bez validnog obrazloženja zaključi da je $a=4$, dobija samo 1 od 5 bodova za taj zaključak. Isto pravilo služi za određivanje vrijednosti b i c.

5. zadatak Neka je ABC pravougli trougao sa pravim uglom u vrhu A, $\overline{AD}$ odgovarajuća visina iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$, BE simetrala ugla $\angle ABC$ (pri čemu tačka E leži na $\overline{AC}$), a AF simetrala ugla $\angle CAD$ (tačka F leži na $\overline{CD}$). Dokazati da je EF paralleno sa AD.

Rješenje:



Neka je $\angle ABC = \beta$. Kako je trougao $\triangle ABD$ pravougli, to je

$$\angle BAD = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - \beta,$$

pa je $\angle CAD = 90^\circ - \angle BAD = \beta$.
Kako je AF simetrala ugla $\angle CAD$, to je

$$\angle FAD = \angle FAC = \frac{\beta}{2}.$$

Sada je

$$\angle BAF = \angle BAD + \angle DAF = 90^\circ - \beta + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Međutim, onda iz trougla $\triangle ABF$ dobijamo

$$\angle BFA = 180^\circ - \angle ABF - \angle BAF = 180^\circ - \beta - (90^\circ - \frac{\beta}{2}) = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \angle BAF,$$

pa je trougao $\triangle ABF$ jednakokraki, tj. vrijedi $\overline{AB} = \overline{BF}$.

Kako je BE simetrala ugla $\angle ABF$, to je $\angle ABE = \angle EBF = \frac{\beta}{2}$, pa imamo:

$$\overline{AB} = \overline{BF},$$

$$\angle ABE = \angle EBF = \frac{\beta}{2},$$

$$\overline{BE} = \overline{BE},$$

odakle na osnovu stava SUS o podudarnosti trouglova slijedi da je

$$\triangle ABE \cong \triangle EBF.$$

Iz posljednje podudarnosti trouglova slijedi da je $\angle EFB = \angle EAB = 90^\circ$.

Dakle, prava EF je okomita na BC, a kako je i prava AD okomita na BC, to su prave EF i AD paralelne, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- zaključak $\angle FAD = \angle FAC = \frac{\beta}{2}$ .... **2 boda**
- izračunavanje ugla $\angle AFB$ .... **3 boda**
- zaključak da je $\angle BFA = \angle BAF$ i $\overline{AB} = \overline{BF}$ .... **4 boda**
- dokaz da su trouglovi $\triangle ABE$ i $\triangle EBF$ podudarni .... **5 bodova**
- zaključak da je $\angle EFB = \angle EAB = 90^\circ$ .... **3 boda**
- dokaz da su prave EF i AD paralelne .... **3 boda**

Napomena 1: Moguće je da učenik označi neki drugi ugao (npr. $\angle ACB = \gamma$ ili $\angle CAF = \angle DAF = x$) i krene računati ostale uglove preko njih. U svakom slučaju, izražavanje uglova $\angle FAD$ i $\angle ABF$ preko istog ugla nosi 2 boda, dok izračunavanje ugla $\angle AFB$ preko tog nepoznatog ugla vrijedi 3 boda.

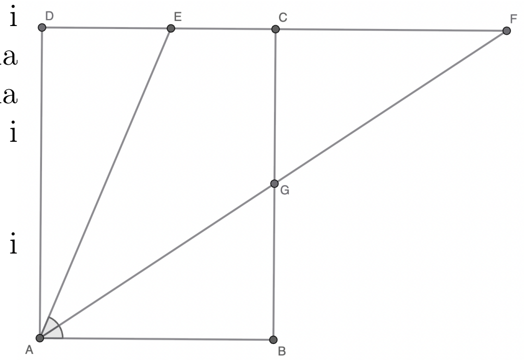
Napomena 2: Moguće je da učenik radi zadatak "unazad", tj. da prvo zaključi da je dovoljno da je $\angle EFB = 90^\circ$. Tada dobija posljednja 3 boda iz šeme. Slično, ako zaključi da je za to dovoljno da su trouglovi $\triangle ABE$ i $\triangle EBF$ podudarni, dobija i ta 3 iz šeme. Ako dokaže da je za podudarnost dovoljno $\overline{AB} = \overline{BF}$, dobija i tih 5 bodova iz šeme.

KANTON SARAJEVO
Kantonalno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola
2. aprila/travnja 2025.

VIII razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

1. zadatak U pravougaoniku $ABCD$ vrijedi $AD = BC = 12$ i $AB = CD = 9$. Tačka E je data na stranici CD tako da vrijedi da je obim četverougla $ABCE$ za 8 veći od obima trougla ΔAED. Prava AF je simetrala ugla $\angle BAE$ i siječe stranicu BC u tački G.



a) Odrediti omjer površina trougla ΔAFE i pravougaonika $ABCD$.

b) Izračunati dužinu duži CG.

Rješenje:

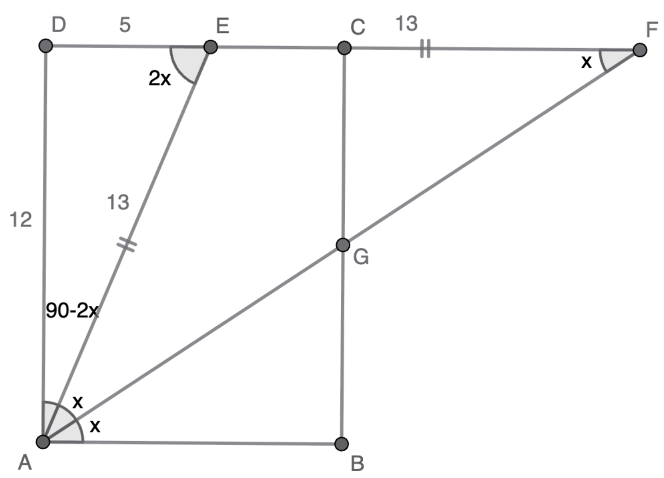
a) Obim četverougla $ABCE$ jednak je $AB + BC + CE + AE = 21 + CE + AE$, a obim trougla ΔAED jednak je $AE + DE + AD = AE + DE + 12$. Imamo da je $CE = CD - DE = 9 - DE$, pa po uslovu zadatka imamo:

$$21 + 9 - DE + AE = AE + DE + 12 + 8$$

odnosno

$$2DE = 10 \Rightarrow DE = 5.$$

Dalje, označimo ugao $\angle BAF = \angle EAF = x$. Sada imamo da je $\angle DAE = 90^\circ - 2x$, pa je $\angle DEA = 90^\circ - (90^\circ - 2x) = 2x$. Kako je $\angle DEA$ ujedno i vanjski ugao u trouglu ΔAEF kod vrha E imamo da je $\angle DEA = \angle EAF + \angle EFA$, pa je $\angle EFA = \angle DEA - \angle EAF = 2x - x = x$. Zaključujemo da je $\angle EFA = \angle EAF = x$, pa je trougao ΔAFE jednakokraki, odnosno vrijedi $AE = EF$.



Primjenom Pitagorine teoreme na trougao ΔDEA imamo

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{144 + 25} = 13.$$

Sada je i $EF = AE = 13$. Kako je AD visina iz vrha A na stranicu EF u trouglu ΔAEF, imamo da je njegova površina jednaka $\frac{EF \cdot AD}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2} = 13 \cdot 6$. Površina pravougaonika $ABCD$ jednaka je $12 \cdot 9$. Dakle, omjer traženih površina je $\frac{13 \cdot 6}{12 \cdot 9} = \frac{13}{18}$.

b) Imamo da je $EC = DC - DE = 9 - 5 = 4$, pa je $FC = FE - EC = 13 - 4 = 9$ i $FD = FE + DE = 13 + 5 = 18$.

Dalje, znamo da su prave CG i DA paralelene, pa možemo primijeniti Talesovu teoremu:

$$\frac{CG}{AD} = \frac{FC}{FD}$$

odnosno

$$\frac{CG}{12} = \frac{9}{18} \Rightarrow CG = 6.$$

Šema bodovanja:

- Izračunavanje $DE = 5$ .... **3 boda**
- Dokaz da je $\triangle AFE$ jednakokraki ($AE = EF$) .... **4 boda**
- Primjena Pitagorine teoreme za izračunavanje $AE = 13$ .... **2 boda**

Dio pod a)

- Izračun površine trougla ΔAEF .... **3 boda**
- Dokaz da je omjer površina jednak $\frac{13}{18}$ .... **1 bod**

Dio pod b)

- Izračunavanje dužine CG .... **7 bodova**
  - Izračunavanje $FC = 9$ .... **1 bod**
  - Prepoznavanje da je $CG \parallel AD$ i primjena Talesove teoreme .... **4 boda**
  - Formiranje proporcije $\frac{CG}{12} = \frac{9}{18}$ .... **1 bod**
  - Izračunavanje $CG = 6$ .... **1 bod**

2. zadatak Na kantonalnom takmičenju iz matematike učestvovalo je 57 učenika. Na takmičenju su bila 3 zadatka. Ispostavilo se da je svaki učenik uradio bar jedan zadatak, i da je komisija izbrojala ukupno 100 urađenih zadataka.

a) Koliko je najviše moglo biti učenika koji su uradili tačno dva zadatka?
b) Koliko je najviše moglo biti učenika koji su uradili sva tri zadatka?

Odgovore obrazložiti!

Rješenje:

Kako je svaki od 57 učenika uradio po bar jedan zadatak, a ukupno je urađeno 100 zadataka, to znači da su preostalih $100 - 57 = 43$ zadatka uradili učenici koji su uradili više od jednog zadatka.

a) Sada zaključujemo da postoje najviše 43 učenika koji su uradili više od jednog zadatka, pa ne može postojati više od 43 učenika koji su uradili dva zadatka. S druge strane, ako su 43 učenika uradila dva zadatka, a preostalih 14 učenika je uradilo po jedan zadatak, imamo ukupno $43 \cdot 2 + 14 \cdot 1 = 100$ urađenih zadataka, pa je zaista moguće da su 43 učenika uradila dva zadatka.
b) Neka je k broj učenika koji su uradili sva tri zadatka. Tada svakom od tih k učenika pripadaju 2 urađena zadatka od preostala 43 urađena zadataka. To znači da mora vrijediti $2k \leq 43$, odakle dobijamo $k \leq 21$. Dakle broj učenika koji su uradili sva tri zadatka ne može biti veći od 21. Pokažimo da može biti $k = 21$. Ako je 21 učenik uradio sva tri zadatka, jedan učenik dva zadatka, a preostalih 35 učenika je uradilo po jedan zadatak, to je ukupno $21 \cdot 3 + 2 + 35 \cdot 1 = 100$ urađenih zadataka. Dakle zaključujemo da je mogao biti najviše 21 učenik koji je uradio sva tri zadatka.

Šema bodovanja:

- dio pod a) .... **8 bodova**
  - Dokaz da ne može biti više od 43 učenika koji su uradili dva zadatka **6 bodova**
  - Dokaz da je moguće da ima 43 učenika koji su uradili dva zadatka .... **2 boda**
- dio pod b) .... **12 bodova**
  - Dokaz da ne može biti više od 21 učenika koji su uradili tri zadatka **9 bodova**
  - Dokaz da je moguće da ima 21 učenik koji je uradio sva tri zadatka ... **3 boda**

3. zadatak Odrediti sve trojke (a, b, c) realnih brojeva takve da vrijedi:

$$a^3 + b = 4c$$

$$a + b^3 = c$$

$$ab = -1$$

Rješenje:

Iz prve dvije jednačine imamo da je

$$a^3 + b = 4c = 4(a + b^3).$$

Iz treće jednačine imamo da je $b = -\frac{1}{a}$, pa uvrštavanjem toga u jednakost koju smo dobili imamo:

$$a^3 - \frac{1}{a} = 4(a - \frac{1}{a^3}).$$

Svođenjem na zajednički nazivnik imamo:

$$\frac{a^4 - 1}{a} = 4\frac{a^4 - 1}{a^3}.$$

Razmotrimo sada dva slučaja:

Slučaj 1: $a^4 - 1 = 0$ Tada je $a^4 = 1$. Ovo znači da je $a = 1$ ili $a = -1$. Ako je $a = 1$, uvrštavanjem dobijamo da je $b = -\frac{1}{a} = -1$ i $c = 0$. Ako je $a = -1$, dobijamo $b = 1$ i $c = 0$.

Slučaj 2: $a^4 - 1 \neq 0$ Tada skraćivanjem izraza $a^4 - 1$ sa obje strane jednakosti dobijamo:

$$\frac{1}{a} = \frac{4}{a^3}$$

odnosno

$$a^2 = 4,$$

pa je $a = 2$ ili $a = -2$. Ako je $a = 2$ dobijamo $b = -\frac{1}{2}$ i $c = \frac{15}{8}$. Ako je $a = -2$ dobijamo $b = \frac{1}{2}$ i $c = -\frac{15}{8}$.

Dakle, rješenja su $(a, b, c) \in \{(1, -1, 0), (-1, 1, 0), (2, -\frac{1}{2}, \frac{15}{8}), (-2, \frac{1}{2}, -\frac{15}{8})\}$.

Šema bodovanja:

- Dobijanje jednakosti $a^3 + b = 4(a + b^3)$ iz prve dvije jednačine .... **3 boda**
- Uvrštavanje $b = -\frac{1}{a}$ (ili $a = -\frac{1}{b}$) iz treće jednačine u jednačinu iz prethodnog koraka **3 boda**
- Dobijanje jednačine $\frac{a^4-1}{a} = 4\frac{a^4-1}{a^3}$ .... **4 boda**
- Razmatranje slučaja $a^4 - 1 = 0$ i dobijanje rješenja $(1, -1, 0)$ i $(-1, 1, 0)$ .. **4 boda**
- Razmatranje slučaja $a^4 - 1 \neq 0$, skraćivanje izraza i dobijanje $a^2 = 4$ ..... **4 boda**
- Dobijanje rješenja $(2, -\frac{1}{2}, \frac{15}{8})$ i $(-2, \frac{1}{2}, -\frac{15}{8})$ .... **2 boda**

4. zadatak Na stranicama AB i AC trougla ABC, date su tačke D i E, redom, tako da vrijedi $AD = AE$. Dokazati da se od duži BE, CD i BC može konstruisati trougao.

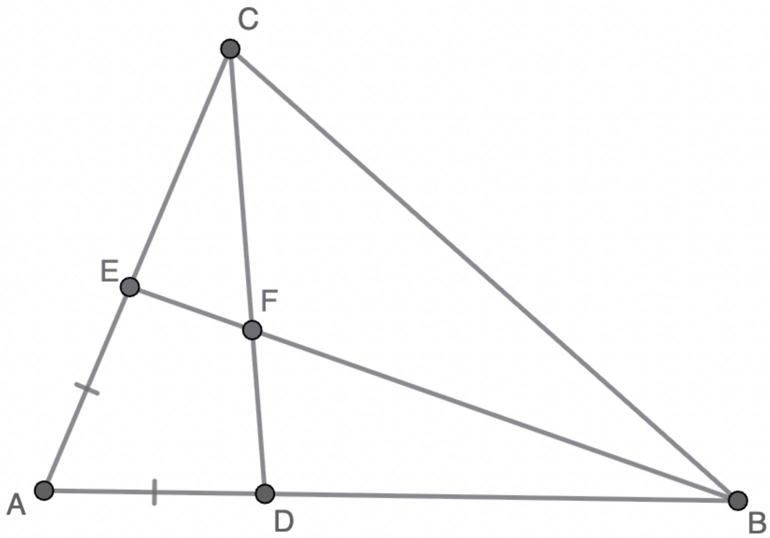
Rješenje:

Da bi se od duži BE, CD i BC mogao konstruisati trougao dovoljno je dokazati da vrijede sljedeće tri nejednakosti trougla:

$$BE + CD > BC,$$

$$BE + BC > CD,$$

$$BC + CD > BE.$$



Neka je F tačka presjeka duži BE i CD. Pokažimo najprije da vrijedi nejednakost $BE + CD > BC$. Primjenom nejednakosti trougla na trougao $\triangle BCF$ dobijamo $BF + CF > BC$. Kako je $BE = BF + FE$ i $CD = CF + FD$ imamo:

$$BE + CD = BF + FE + CF + FD > BF + CF > BC.$$

Pokažimo sada da vrijedi $BE + BC > CD$. Najprije primjenom nejednakosti trougla na trougao $\triangle ABE$ vrijedi $BE + AE > AB$, a kako je $AB = AD + BD$, uvrštavanjem u posljednju nejednakost dobijamo $BE + AE > AD + BD$. Kako je $AE = AD$, iz posljednje nejednakosti zaključujemo da vrijedi $BE > BD$. Primjenom nejednakosti trougla na trougao $\triangle BCD$ dobijamo $BC + BD > CD$, ali kako je $BE > BD$ to vrijedi:

$$BC + BE > BC + BD > CD.$$

Pokažimo još da vrijedi $BC + CD > BE$. Primjenom nejednakosti trougla na trougao $\triangle ACD$ dobijamo $CD + AD > AC$, a kako je $AC = AE + CE$ i $AE = AD$ to uvrštavanjem u posljednju nejednakost dobijamo $CD + AD > AE + CE$, odnosno $CD > CE$. Primjenom nejednakosti trougla na trougao $\triangle BCE$ dobijamo $BC + CE > BE$, ali kako je $CD > CE$ to vrijedi:

$$BC + CD > BC + CE > BE.$$

Kako su sve tri nejednakosti zadovoljene zaključujemo da duži BE, CD i BC formiraju trougao.

Šema bodovanja:

- Postavljanje sva tri uslova za formiranje trougla .... **2 boda**
- Dokazivanje prve nejednakosti $BE + CD > BC$ korištenjem nejednakosti trougla u $\triangle BCF$ .... **4 boda**
- Dokazivanje druge nejednakosti $BE + BC > CD$ .... **7 bodova**
  - Primjena nejednakosti trougla u $\triangle ABE$ kako bi se pokazalo $BE > BD$ ..... **3 boda**
  - Primjena nejednakosti trougla u $\triangle BCD$ kako bi se zaključilo $BC + BE > CD$ **4 boda**
- Dokazivanje treće nejednakosti $BC + CD > BE$ .... **7 bodova**
  - Primjena nejednakosti trougla u $\triangle ACD$ kako bi se pokazalo $CD > CE$ ..... **3 boda**
  - Primjena nejednakosti trougla u $\triangle BCE$ kako bi se zaključilo $BC + CD > BE$ **4 boda**

5. zadatak Neka su p i q različiti prosti brojevi i neka su a i b dva prirodna broja za koja vrijedi $ap + bq = ab$. Dokazati da se broj $a + b$ može zapisati kao proizvod dva prirodna broja čiji je zbir jednak $p + q + 2$.

Rješenje 1:

Napišimo datu jednačinu u obliku:

$$ap = ab - bq = b(a - q).$$

Kako p dijeli lijevu stranu, to p mora dijeliti i desnu stranu, a pošto je p prost broj, zaključujemo da $p \mid b$ ili $p \mid a - q$. Razmotrimo ta dva slučaja.

Slučaj 1: $p \mid b$ Neka je $b = pc$ za neki prirodan broj c. Uvrštavanjem imamo:

$$ap = pc(a - q)$$

odnosno

$$a = c(a - q) = ca - cq.$$

Kako c dijeli desnu stranu, zaključujemo da dijeli i lijevu stranu, tj. $c \mid a$. Neka je $a = cd$ za neki prirodan broj d. Slično, pošto $a \mid a$ i $a \mid ca$ zaključujemo da $a \mid cq$, odnosno $cd \mid cq$, tj. $d \mid q$. Kako je q prost broj, zaključujemo da je $d = 1$ ili $d = q$.

Ako je $d = 1$, imamo da je $a = c$. Sada uvrštavanjem $a = c$ dobijamo $a = a^2 - aq$, pa dijeljenjem sa a imamo $a = q + 1$. Sada je $b = pc = pa = p(q + 1)$. Konačno, imamo da je $a + b = q + 1 + p(q + 1) = (q + 1)(p + 1)$, pa su $p + 1$ i $q + 1$ dva tražena broja.

Ako je $d = q$, imamo da je $a = cq$, pa uvrštavanjem dobijamo $cq = c^2q - cq$, pa dijeljenjem sa cq dobijamo $1 = c - 1$ odnosno $c = 2$. Sada je $a = 2q$ i $b = pc = 2p$ pa je $a + b = 2p + 2q = 2 \cdot (p + q)$, pa su 2 i $p + q$ dva tražena broja.

Slučaj 2: $p \mid a - q$ Neka je $a - q = pc$ za neki prirodan broj c, odnosno $a = pc + q$. Uvrštavanjem imamo:

$$(pc + q) \cdot p = bpc$$

odnosno

$$pc + q = bc.$$

Iz posljednje jednakosti, pošto $c \mid pc$ i $c \mid bc$, slijedi da $c \mid q$. Kako je q prost broj, imamo da je $c = 1$ ili $c = q$.

Ako je $c = 1$ dobijamo $a = p + q$ i $b = p + q$, te je $a + b = 2 \cdot (p + q)$, pa su 2 i $p + q$ tražena dva broja.

Ako je $c = q$ dobijamo $a = pq + q = q(p + 1)$ i $b = p + 1$, te je $a + b = (p + 1)(q + 1)$, pa su $p + 1$ i $q + 1$ traženi brojevi.

Kao što vidimo, u svim slučajevima $a + b$ može biti zapisano kao proizvod dva broja čiji je zbir jednak $p + q + 2$, pa je tražena tvrdnja dokazana.

Šema bodovanja:

- Postavljanje jednačine u faktorizovan oblik i zaključak da p dijeli desnu stranu . . **3 boda**
  - ∗ Zadatak se može analogno uraditi i ako se posmatra faktorizacija $bq = ab - ap = a(b - p)$.

- Zaključaj da $p \mid b$ ili $p \mid a-q$ .... **2 boda**
- Rješavanje slučaja $p \mid b$ .... **9 bodova**
  - Postavljanje $b = pc$ i izvođenje $a = c(a-q)$ .... **1 bod**
  - Zaključak da $c \mid a$ .... **1 bod**
  - Zaključak da $a \mid cq$ .... **1 bod**
  - Dokaz da je $a = c$ ili $a = cq$ .... **4 boda**
  - Rješavavanje slučaja $a = c$ .... **1 bod**
  - Rješavavanje slučaja $a = cq$ .... **1 bod**
- Rješavanje slučaja $p \mid a-q$ .... **6 bodova**
  - Postavljanje $a = pc + q$ i izvođenje $pc + q = bc$ .... **1 bod**
  - Zaključak da $c \mid q$ .... **2 boda**
  - Zaključak da je $c = 1$ ili $c = q$ .... **1 bod**
  - Rješavavanje slučaja $c = 1$ .... **1 bod**
  - Rješavavanje slučaja $c = q$ .... **1 bod**

Rješenje 2:

Počinjemo tako što ćemo početnu jednakost $ap + bq = ab$ preurediti u oblik:

$$ap+bq = ab \Rightarrow (ab-ap)-(bq-pq) = pq \Rightarrow a(b-p)-q(b-p) = pq \quad \Rightarrow \quad (a-q)(b-p) = pq.$$

Sada imamo jednakost $(a - q)(b - p) = pq$, i razmatraćemo moguće slučajeve, s obzirom na to da su p i q prosti brojevi.

Slučaj 1: $a - q = p$**,** $b - p = q$ Ako je $a - q = p$, onda je $a = p + q$. Ako je $b - p = q$, onda je $b = p + q$. U ovom slučaju imamo:

$$a = p + q \quad \text{i} \quad b = p + q.$$

Kao rezultat, $a + b = (p + q) + (p + q) = 2 \cdot (p + q)$, što je proizvod broja 2 i $p + q$, čiji zbir je $p + q + 2$, pa tražena tvrdnja vrijedi.

Slučaj 2: $a - q = q$**,** $b - p = p$ Ako je $a - q = q$, onda je $a = 2q$. Ako je $b - p = p$, onda je $b = 2p$. U ovom slučaju imamo:

$$a = 2q \quad \text{i} \quad b = 2p.$$

Kao rezultat, $a + b = 2q + 2p = 2 \cdot (p + q)$, što je opet proizvod broja 2 i $p + q$, čiji zbir je $p + q + 2$.

Slučaj 3: $a - q = 1$**,** $b - p = pq$ Ako je $a - q = 1$, onda je $a = q + 1$. Ako je $b - p = pq$, onda je $b = p(q + 1)$. U ovom slučaju imamo:

$$a = q + 1 \quad \text{i} \quad b = p(q + 1).$$

Kao rezultat, $a + b = (q + 1) + p(q + 1) = (q + 1)(p + 1)$, što je proizvod dva broja $q + 1$ i $p + 1$, čiji je zbir $p + q + 2$.

Slučaj 4: $a - q = pq$**,** $b - p = 1$ Ako je $a - q = pq$, onda je $a = pq + q = q(p + 1)$. Ako je $b - p = 1$, onda je $b = p + 1$. U ovom slučaju imamo:

$$a = q(p + 1) \quad \text{i} \quad b = p + 1.$$

Kao rezultat, $a + b = q(p + 1) + (p + 1) = (p + 1)(q + 1)$, što je proizvod dva broja $p + 1$ i $q + 1$, čiji je zbir $p + q + 2$.

Kao što vidimo, u svim slučajevima $a + b$ može biti zapisano kao proizvod dva broja čiji je zbir jednak $p + q + 2$, pa je tražena tvrdnja dokazana.

Šema bodovanja:

- Pretvaranje početne jednačine u oblik $(a - q)(b - p) = pq$ .... **7 bodova**
- Ispravno navođenje sva četiri slučaja .... **3 boda**
- Rješavanje slučaja $a - q = p$ i $b - p = q$ .... **2 boda**
- Rješavanje slučaja $a - q = q$ i $b - p = p$ .... **2 boda**
- Rješavanje slučaja $a - q = 1$ i $b - p = pq$ .... **3 boda**
- Rješavanje slučaja $a - q = pq$ i $b - p = 1$ .... **3 boda**

KANTON SARAJEVO
Kantonalno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola
2. aprila/travnja 2025.

IX razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

1. zadatak Za realne brojeve a, b, c, d vrijedi $b \neq 0, d \neq 0, a+b \neq 0, c+d \neq 0$ i $a+b+c+d \neq 0$, kao i $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Dokazati da je

$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d} = 0.$$

Rješenje 1:

Neka je k realan broj takav da vrijed $k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Tada imamo $a = k \cdot b$ i $c = k \cdot d$, pa uvrštavajući ovo u dati izraz dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d} - \frac{ab}{a+b} - \frac{cd}{c+d} &= \frac{(kb+kd)(b+d)}{kb+b+kd+d} - \frac{kb \cdot b}{kb+b} - \frac{kd \cdot d}{kd+d} = \\
&= \frac{k(b+d)^2}{b(k+1)+d(k+1)} - \frac{kb^2}{b(k+1)} - \frac{kd^2}{d(k+1)} = \\
&= \frac{k(b+d)^2}{(k+1)(b+d)} - \frac{kb}{k+1} - \frac{kd}{k+1} = \\
&= \frac{k(b+d)}{k+1} - \frac{kb}{k+1} - \frac{kd}{k+1} = \\
&= \frac{k(b+d)-kb-kd}{k+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- Dobijanje $a = k \cdot b$ i $c = k \cdot d$ za $k \in \mathbb{R}$ .... **5 bodova**
- Dobijanje prvog razlomka u obliku $\frac{k(b+d)^2}{(k+1)(b+d)}$ .... **4 boda**
- Dobijanje drugog i trećeg razlomka u obliku $\frac{kb^2}{b(k+1)}$ i $\frac{kd^2}{d(k+1)}$ .... **4 boda**
  - ∗ Oba razlomka nose po 2 boda
- Dobijanje izraza $\frac{k(b+d)}{k+1} - \frac{kb}{k+1} - \frac{kd}{k+1}$ (ili ekvivalentnog) .... **5 bodova**
- Dobijanje vrijednosti izraza 0 .... **2 boda**

Rješenje 2:

Iz $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ slijedi $ad=bc$. Ako je $a=0$, tada je i $c=0$, pa je dati izraz očigledno jednak 0. U suprotnom možemo pisati $d=\frac{bc}{a}$. Uvrštavanjem u dati izraz dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\frac{ab}{a+b}-\frac{cd}{c+d} &= \frac{(a+c)(b+\frac{bc}{a})}{a+b+c+\frac{bc}{a}}-\frac{ab}{a+b}-\frac{c\cdot\frac{bc}{a}}{c+\frac{bc}{a}}\\
&= \frac{(a+c)\cdot\frac{ab+bc}{a}}{\frac{a^2+ab+ac+bc}{a}}-\frac{ab}{a+b}-\frac{\frac{bc^2}{a}}{\frac{ac+bc}{a}}\\
&= \frac{\frac{b(a+c)^2}{a}}{\frac{a(a+b)+c(a+b)}{a}}-\frac{ab}{a+b}-\frac{bc^2}{c(a+b)}=\\
&= \frac{b(a+c)^2}{(a+b)(a+c)}-\frac{ab}{a+b}-\frac{bc}{a+b}\\
&= \frac{b(a+c)}{a+b}-\frac{ab}{a+b}-\frac{bc}{a+b}=\\
&= 0
\end{aligned}
$$

što je i trebalo dokazati. Uočimo da zadatak i rješenje imaju smisla samo za $a\neq 0$, $c\neq 0$, $a+b\neq 0$ i $a+c\neq 0$.

Šema bodovanja:

- Izražavanje jedne varijable preko preostale tri .... **5 bodova**
  - $*$ Ukoliko učenik izrazi $d=\frac{bc}{a}$ ili $b=\frac{ad}{c}$, te ne razmotri slučaj $a=0$ (odnosno $c=0$), gubi 2 od 5 bodova
- Dobijanje prvog razlomka u obliku $\frac{(a+c)\cdot\frac{ab+bc}{a}}{\frac{a^2+ab+ac+bc}{a}}$ .... **1 boda**
- Dobijanje prvog razlomka u obliku $\frac{b(a+c)^2}{(a+b)(a+c)}$ .... **5 bodova**
- Dobijanje trećeg razlomka u obliku $\frac{\frac{bc^2}{a}}{\frac{ac+bc}{a}}$ .... **1 boda**
- Dobijanje trećeg razlomka u obliku $\frac{bc}{a+b}$ .... **3 boda**
- Dobijanje izraza $\frac{b(a+c)}{a+b}-\frac{ab}{a+b}-\frac{bc}{a+b}$ (ili ekvivalentnog) .... **3 boda**
- Dobijanje vrijednosti izraza 0 .... **2 boda**

2. zadatak Odrediti sve trojke (x, y, z) realnih brojeva tako da vrijedi

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= z^2+1\\
(y+z)^2 &= x^2+5\\
(z+x)^2 &= y^2+10
\end{aligned}
$$

Rješenje 1:

Koristeći formulu za razliku kvadrata, dobijamo ekvivalentan sistem:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2-z^2 &= (x+y-z)(x+y+z)=1\\
(y+z)^2-x^2 &= (y+z-x)(y+z+x)=5\\
(z+x)^2-y^2 &= (z+x-y)(z+x+y)=10
\end{aligned}
$$

Sabirajući ove tri jednačine, dobijamo $(x+y+z)(x+y-z+y+z-x+z+x-y)=16$, tj. $(x+y+z)^2=16$, odakle je $x+y+z=4$ ili $x+y+z=-4$.

1° $x+y+z=4$. Iz dobijenih jednakosti imamo

$$
\begin{aligned}
x+y-z &= \frac{1}{4}\\
y+z-x &= \frac{5}{4}\\
z+x-y &= \frac{10}{4}
\end{aligned}
$$

Sabiranjem prve dvije jednačine ovog sistema dobijamo $2y=\frac{6}{4}$, tj. $y=\frac{3}{4}$. Slično, sabiranjem prve i treće jednačine dobijamo $x=\frac{11}{8}$, a druge i treće $z=\frac{15}{8}$.

2° $x+y+z=-4$. Iz dobijenih jednakosti imamo

$$
\begin{aligned}
x+y-z &= -\frac{1}{4}\\
y+z-x &= -\frac{5}{4}\\
z+x-y &= -\frac{10}{4}
\end{aligned}
$$

Ovaj slučaj rješavamo identično kao prethodni. S obzirom da su na desnoj strani suprotni brojevi, dobit ćemo i suprotna rješenja: $x=-\frac{11}{8}, y=-\frac{3}{4}, z=-\frac{15}{8}$.

Zaključujemo, rješenja datog sistema su $(x,y,z)=\left(\frac{11}{8},\frac{3}{4},\frac{15}{8}\right)$ i $(x,y,z)=\left(-\frac{11}{8},-\frac{3}{4},-\frac{15}{8}\right)$.

Šema bodovanja:

- Primjena razlike kvadrata na lijeve strane sistema .... **3 boda**
- Sabiranje jednačina .... **2 boda**
- Dobijanje $(x+y+z)^2=16$ .... **3 boda**
- Uočavanje slučajeva $x+y+z=4$ i $x+y+z=-4$ .... **2 boda**
- Rješavanje svakog od slučajeva .... **po 5 bodova**
  - Dobijanje linearnog sistema .... **2 boda**
  - Rješavanje sistema .... **3 boda**

Rješenje 2:

Početni sistem možemo zapisati na sljedeći način:

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 1$$
$$y^2 + 2yz + z^2 - x^2 = 5$$
$$z^2 + 2zx + x^2 - y^2 = 10$$

Sabiranjem ovih jednačina dobije se $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz = 16$, tj. $(x+y+z)^2 = 16$. Slijedi da je $x + y + z = 4$ ili $x + y + z = -4$.

Prvi slučaj: $x + y + z = 4$
Iz $x + y + z = 4$ slijedi $x + y = 4 - z, y + z = 4 - x$ i $x + z = 4 - y$. Uvrštavanjem u početni sistem dobijamo:

$$(4 - z)^2 - z^2 = 1$$
$$(4 - x)^2 - x^2 = 5$$
$$(4 - y)^2 - y^2 = 10$$

što nakon sređivanja postaje:

$$16 - 8z = 1$$
$$16 - 8x = 5$$
$$16 - 8y = 10$$

Odavde dobijamo rješenja $z = \frac{15}{8}, x = \frac{11}{8}$ i $y = \frac{3}{4}$.

Drugi slučaj: $x + y + z = -4$
Iz $x + y + z = -4$ slijedi $x + y = -4 - z, y + z = -4 - x$ i $x + z = -4 - y$. Uvrštavanjem u početni sistem dobijamo:

$$(-4 - z)^2 - z^2 = 1$$
$$(-4 - x)^2 - x^2 = 5$$
$$(-4 - y)^2 - y^2 = 10$$

što nakon sređivanja postaje:

$$16 + 8z = 1$$
$$16 + 8x = 5$$
$$16 + 8y = 10$$

Odavde dobijamo rješenja $z = -\frac{15}{8}, x = -\frac{11}{8}$ i $y = -\frac{3}{4}$.
Dakle, rješenja datog sistema su $(x, y, z) = \left(\frac{11}{8}, \frac{3}{4}, \frac{15}{8}\right)$ i $(x, y, z) = \left(-\frac{11}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{15}{8}\right)$.

Šema bodovanja:

- Predstavljanje jednačina sistema u obliku $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 1$ .... **3 boda**
- Sabiranje jednačina .... **2 boda**
- Dobijanje $(x + y + z)^2 = 16$ .... **3 boda**
- Uočavanje slučajeva $x + y + z = 4$ i $x + y + z = -4$ .... **2 boda**
- Rješavanje svakog od slučajeva .... **po 5 bodova**
  - Dobivanje jednačina sistema po jednoj varijabli .... **2 boda**
  - Rješavanje sistema .... **3 boda**

3. zadatak U dvije kutije nalazi se ukupno 65 loptica. Svaka loptica je jedne od četiri boje: plava, crvena, crna ili bijela. Poznato je da, kojih god pet loptica odaberemo tako da su iste boje i nalaze se u istoj kutiji, među njima postoje barem dvije iste veličine. Dokazati da postoje tri loptice koje su iste boje, iste veličine i nalaze se u istoj kutiji.

Rješenje:

Kako je 65 loptica raspoređeno u dvije kutije, po Dirichletovom principu u jednoj kutiji je barem 33 loptice. Posmatrajmo tu kutiju. Kako je svaka loptica jedne od četiri boje, po Dirichletovom principu među njima postoji barem 9 loptica koje su iste boje.

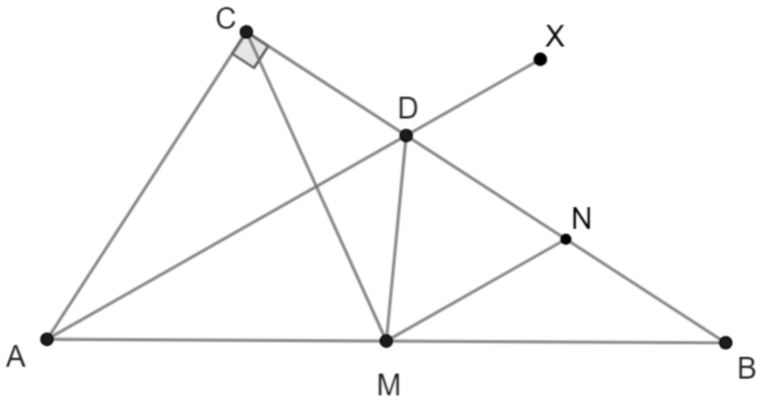
Dakle, postoji barem 9 loptica koje se nalaze u istoj kutiji i iste su boje. Posmatrajmo takvih 9 loptica. Po uslovu zadatka među svakih 5 postoje dvije iste veličine. To znači da se među ovih 9 loptica ne može javiti 5 različitih veličina, tj. javljaju se najviše 4 različite veličine. Odavde po Dirichletovom principu slijedi da postoje tri loptice iste veličine. Ove tri loptice su u istoj kutiji, iste su boje i iste veličine, pa je tvrdnja zadatka dokazana.

Šema bodovanja:

- Zaključak da postoji kutija sa barem 33 loptice .... **3 boda**
- Zaključak da postoji barem 9 iste boje u istoj kutiji .... **6 bodova**
- Zaključak da se među njima javlja najviše 4 različite veličine .... **8 bodova**
- Zaključak da među njima postoje 3 loptice iste veličine .... **3 boda**

4. zadatak Dat je pravougli trougao $\triangle ABC$ sa pravim uglom u tjemenu C. Na kateti BC odabrana je tačka D takva da vrijedi $BD = 2 \cdot DC$. Ako je M središte hipotenuze AB, dokazati da je prava BC simetrala vanjskog ugla kod tjemena D u trouglu $\triangle ADM$.

Rješenje 1:



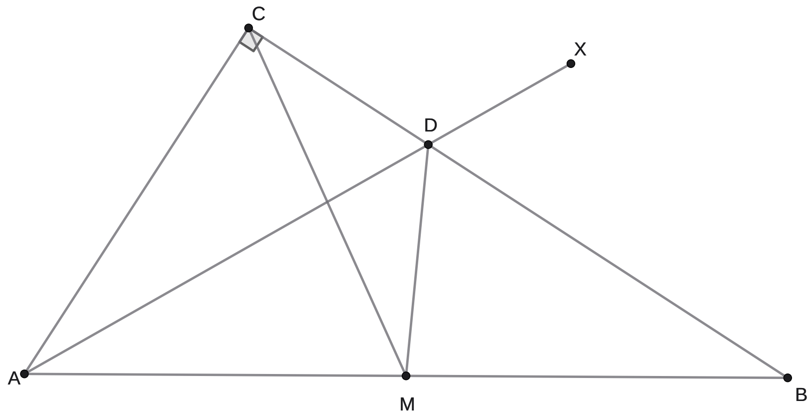
Neka je N sredina duži BD. Tada je MN srednja linija trougla ABD, odakle je MN paralelno sa AD. Onda je $\angle MBN = \angle BAD$, kao uglovi sa paralelnim kracima.

S druge strane, kako je M sredina hipotenuze pravouglog trougla, to je M centar opisane kružnice tog trougla, pa je $MC = MB$ i $\angle MCB = \angle MBC$. Zbog toga su trouglovi BMN i CMD podudarni $(BM = CM, \angle MBN = \angle MCD, BN = CD = \frac{BC}{3})$, odakle je $\angle CMD = \angle BMN = \angle BAD$, Sada je $\angle CDM = 180° - \angle BCM - \angle CMD = 180° - \angle ABD - \angle BAD = \angle BDA$, pa slijedi $\angle ADC = 180° - \angle BDA = 180° - \angle CDM = \angle MDB$. Neka je X proizvoljna tačka na produžetku duži AD preko D. Vrijedi $\angle ADC = \angle XDB$ (kao unakrsni uglovi), pa imamo $\angle MDB = \angle XDB$. Ovo znači da je prava BC simetrala ugla $\angle MDX$, a to je upravo vanjski ugao kod D u trouglu $\triangle ADM$. Ovim je dokaz završen.

Šema bodovanja:

- Zaključak $\angle MBC = \angle MCB$ .... **2 boda**
- Dodavanje tačke N i zaključak $\angle MBN = \angle BAD$ .... **4 boda**
- Zaključak $\triangle MBN \cong \triangle DCM$ .... **3 boda**
- Zaključak $\angle CMD = \angle BMN = \angle BAD$ .... **3 boda**
- Zaključak $\angle ADC = \angle MDB$ .... **4 boda**
- Zaključak da je BC simetrala vanjskog ugla $\angle ADM$ .... **4 boda**
  - ∗ Ukoliko učenik zaključi da je dovoljno dokazati $\angle ADC = \angle MDB$, dobija 4 boda (posljednja stavka)

Rješenje 2:



Kako je $\triangle ABC$ pravougli, središte njegove hipotenuze je ujedno i centar opisane kružnice, tj. vrijedi $MA = MB = MC$. Dakle, trougao $\triangle MBC$ je jednakokraki, pa je $\angle MBC = \angle MCB$. Također imamo $\frac{BD}{DC} = 2$ (po uslovu zadatka) i $\frac{BA}{MC} = 2$ (jer je $MA = MB = MC = \frac{AB}{2}$). Dakle, dobili smo $\angle DBA = \angle DCM$ i $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{MC}$, odakle slijedi da su trouglovi $\triangle DBA$ i $\triangle DCM$ slični.

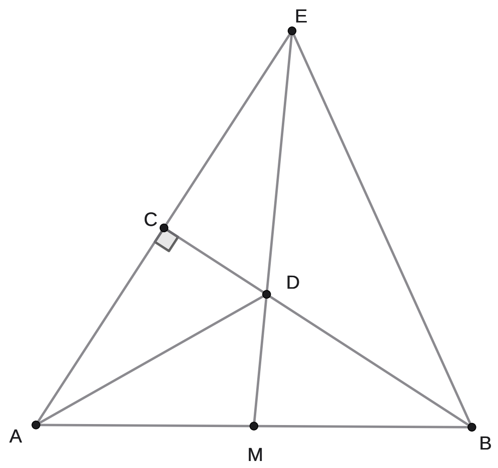
Iz navedene sličnosti dobijamo $\angle BDA = \angle CDM$, pa slijedi $\angle ADC = 180° - \angle BDA = 180° - \angle CDM = \angle MDB$. Neka je X proizvoljna tačka na produžetku duži AD preko D. Vrijedi $\angle ADC = \angle XDB$ (kao unakrsni uglovi), pa imamo $\angle MDB = \angle XDB$. Ovo znači da je prava BC simetrala ugla $\angle MDX$, a to je upravo vanjski ugao kod D u trouglu $\triangle ADM$. Ovim je dokaz završen.

Napomena: Zadatak se može slično uraditi ako sa S označimo sredinu stranice BC, te zaključimo da je $\angle MSD = 90°$ i pokažemo da su pravougli trouglovi MSD i ADC slični, odakle slijedi $\angle ADC = \angle MDS$.

Šema bodovanja:

- Zaključak $\angle MBC = \angle MCB$ .... **2 boda**
- Zaključak $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{MC}$ .... **4 boda**
- Zaključak $\triangle DBA \sim \triangle DCM$ .... **7 bodova**
- Zaključak $\angle ADC = \angle MDB$ .... **3 boda**
- Zaključak da je BC simetrala vanjskog ugla $\angle ADM$ .... **4 boda**
  - ∗ Ukoliko učenik zaključi da je dovoljno dokazati $\angle ADC = \angle MDB$, dobija 4 boda (posljednja stavka)
  - ∗ Ukoliko učenik završi dokaz pod pretpostavkom $\triangle DBA \sim \triangle DCM$, dobija 7 bodova (posljednje dvije stavke)

Rješenje 3:



Neka je E tačka na produžetku duži AC preko C tako da vrijedi $AC = EC$. Posmatrajmo trougao $\triangle ABE$. Vrijedi da je BC ujedno i visina i težišnica ovog trougla, pa je on jednakokraki, tj. vrijedi $AB = EB$. Po uslovu zadatka imamo $\frac{BD}{DC} = 2$, pa je D tačka na težišnici BC trougla $\triangle ABE$ koja težišnicu dijeli u omjeru $2 : 1$. Slijedi da je D težište $\triangle ABE$. Zato i težišnica EM prolazi kroz D, tj. tačke E, D i M su kolinearne.

Imamo $AC = EC$, $\angle ACD = \angle ECD = 90°$ i $CD = CD$, odakle na osnovu stava SUS slijedi $\triangle ACD \cong \triangle ECD$. Odavde dalje slijedi $\angle ADC = \angle EDC$, što znači da je prava BC simetrala ugla $\angle ADE$. Ovaj ugao je vanjski ugao kod tjemena D u trouglu ADM, čime je dokaz završen.

Šema bodovanja:

- Uvođenje tačke E .... **4 boda**
  - $*$ Ovi bodovi se dodjeljuju i ukoliko učenik uvede tačku E kao presjek DM i AC
- Zaključak da je D težište jednakokrakog $\triangle ABE$ .... **8 bodova**
- Zaključak da su tačke E, D, M kolinearne .... **2 boda**
- Zaključak $\angle ADC = \angle EDC$ .... **3 boda**
- Zaključak da je BC simetrala vanjskog ugla $\angle ADM$ .... **3 boda**

5. zadatak Dat je prost broj p. U jednoj grupi tinejdžera, neki koriste samo Instagram, neki koriste samo TikTok, a neki koriste i Instagram i TikTok. Poznato je da barem jedna osoba koristi obje društvene mreže. Broj onih koji koriste samo TikTok tačno je $p+1$ puta veći od broja onih koji koriste samo Instagram. Također, kvadrat ukupnog broja korisnika Instagrama jednak je ukupnom broju korisnika TikToka. Odrediti sve mogućnosti za broj tinejdžera koji koriste obje društvene mreže.

Rješenje:

Neka je x broj tinejdžera koji koriste samo Instagram, y broj tinejdžera koji koriste samo TikTok, a z broj tinejdžera koji koriste oboje. Uslovi zadatka su sljedeći:

$$z \geq 1 \tag{1}$$
$$y = (p+1) \cdot x \tag{2}$$
$$(x+z)^2 = y + z. \tag{3}$$

Ako je $x = 0$, tada iz (2) dobijamo $y = 0$, pa (3) postaje $z^2 = z$, što uz $z \geq 1$ daje $z = 1$.

Pretpostavimo sada $x > 0$. Tada je i $y > 0$ (iz (2)). Uvrštavajući (2) u (3) dobijamo:

$$\begin{aligned}(x+z)^2 = (p+1) \cdot x + z &\Leftrightarrow \\ (x+z)^2 = (x+z) + p \cdot x &\Leftrightarrow \\ (x+z)(x+z-1) = p \cdot x.\end{aligned}$$

Brojevi $x+z$ i $x+z-1$ se razlikuju za 1, pa su relativno prosti. Kako je njihov prozivod djeljiv s p, jedan od njih je djeljiv s p, a drugi relativno prost s p (jer je p prost broj). Oba broja dijele $p \cdot x$, pa onaj koji je relativno prost sa p mora dijeliti x. Kako je $x + z \geq x + 1 > x$, ne može vrijediti $x + z \mid x$, pa vrijedi $x + z - 1 \mid x$. Pošto se radi o prirodnim brojevima, vrijedi $x + z - 1 \leq x$, odakle dobijamo $z \leq 1$, pa mora biti $z = 1$. Tada je $x + z - 1 = x$, pa mora biti $x + z = p$, odnosno $x = p - 1$. Brojevi $x = p-1, y = p^2-1$ i $z = 1$ očito zadovoljavaju uslove zadatka. Dakle, jedina mogućnost za traženi broj je 1.

Napomena: Do istog zaključka na kraju smo mogli doći i tako što zaključimo da iz $p \mid (x+z)(x+z-1)$ slijedi da p dijeli neku od zagrada, pa je ta zagrada veća ili jednaka od p, odakle slijedi da druga mora biti manja ili jednaka od x (da bi mogla vrijediti jednakost $(x+z)(x+z-1) = p \cdot x$). Jasno je da to mora biti $x + z - 1$ i to za $z = 1$.

Šema bodovanja:

- Uvođenje nepoznatih i uvrštavanje (2) u (3) .... **1 bod**
- Dobijanje oblika $(x+z)(x+z-1) = p \cdot x$ .... **4 boda**
- Zaključak da jedan od brojeva $x+z$ i $x+z-1$ dijeli x .... **8 bodova**
- Zaključak da $x+z-1 \mid x$ .... **2 boda**
- Zaključak $z = 1$ .... **3 boda**
  - ∗ Ukoliko učenik zaključi $x + z - 1 \leq x$ bez razmatranja slučaja $x = 0$, dobija 1 od 3 boda
- Zaključak da za $z = 1$ uslovi mogu biti zadovoljeni .... **2 boda**