BILTEN FEDERALNOG TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA 2025. GODINE

Sarajevo, 5.4.2025. godine

Federalno takmičenje iz matematike učenika srednjih škola održano je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu, 5.4.2025. godine. Na takmičenju su učestvovala 144 učenika u zvaničnoj konkurenciji koji su odabrani na kantonalnim takmičenjima, kao i na kvalifikacionom takmičenju, te 5 učenika u nezvaničnoj konkurenciji.

Prisutnima se u prepunom amfiteatru "Branko Galeb" na otvaranju najprije obratio prof. dr. Zenan Šabanac, Šef Odsjeka za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, koji je podsjetio na dugogodišnju historiju održavanja matematičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini, te je podsjetio prisutne da je Sarajevo domaćin ovogodišnje Balkanske matematičke olimpijade. Nakon toga se obratio i prof. dr. Esmir Pilav, predsjednik Udruženja matematičara Kantona Sarajevo, koji je otvorio takmičenje, te je prisutne podsjetio na fantastičan rezultat ekipe BiH na Internacionalnoj matematičkoj olimpijadi 2024. godine. Za kraj, ispred takmičarske komisije se obratio Admir Beširević, koji je poželio učenicima sreću na takmičenju i dao im tehničke upute.

Na zahtjevnim zadacima učenici su pokazali zavidno znanje, te je u svakom razredu prvoplasirani učenik osvojio preko 40 bodova (od mogućih 50), dok je ukupno 11 učenika osvojilo 30 ili više bodova (uključujući i učenike u nezvaničnoj konkurenciji). Dva učenika, Adnan Osmić u drugom razredu i Benjamin Mujkić u četvrtom razredu, su osvojili maksimalnih 50 bodova. Ovi učenici su ujedno i bili članovi ekipe Bosne i Hercegovine na Internacionalnoj matematičkoj olimpijadi 2024. godine, gdje je Benjamin osvojio zlatnu medalju, čime je postao najuspješniji takmičar iz matematike u historiji BiH, a Adnan bronzanu medalju, što je fantastičan uspjeh uzme li se u obzir da je Adnan tada bio učenik prvog razreda.

Na Matematičku olimpijadu BiH su se plasirala 22 učenika, te će se boriti za plasman na Internacionalnu matematičku olimpijadu i Balkansku matematičku olimpijadu. Matematička olimpijada BiH se održava 13. i 14. aprila na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu.


Federalno takmičenje iz matematike učenika
škola u školskoj 2024/2025. godini

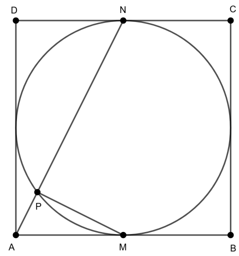

Univerzitet u Sarajevu
Prirodno-matematički fakultet
ODSJEK ZA MATEMATIČKE
I KOMPJUTERSKE NAUKE

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo
Zmaja od Bosne 33-35, 71000 Sarajevo, Bosna i Hercegovina
E-mail: umks2016@gmail.com **Tel.:** ++ 387 33 279 874
Fax: ++ 387 33 649 342 **ID broj:** 4202191060004
Transakcijski račun: 1610000156600012

LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo iz matematike učenika srednjih škola
5. aprila/travnja 2025.

I razred

1. zadatak Kružnica upisana u kvadrat $ABCD$ dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ u tačkama M i N redom. Neka $\overline{AN}$ siječe kružnicu u tačkama N i P (vidi sliku). Ako je dužina stranice kvadrata 1, odrediti dužinu duži $\overline{MP}$.
(Napomena: Nije potrebno dokazivati da su tačke M i N sredine stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom.)



2. zadatak Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi:

$$a + b \geq ab, \qquad b + c \geq bc, \qquad c + a \geq ca.$$

Dokazati da vrijedi $a + b + c \geq \frac{3}{4}abc$.

3. zadatak Neka je ABC oštrougli trougao i neka je I centar upisane kružnice tog trougla. Na njegovoj opisanoj kružnici, označimo sa A', B' i C' sredine manjih lukova BC, CA i AB redom. Dokaži da tačka simetrična tački A' u odnosu na pravu IB' leži na opisanoj kružnici trougla $IB'C'$.

4. zadatak Test iz matematike radilo je 30 učenika. Učenici rješavaju ukupno 8 zadataka. Zadaci su na zaokruživanje, tako da ako učenik ispravno zaokruži dobija sve bodove na tom zadatku, a u suprotnom se smatra da taj zadatak nije uradio. Na kraju testa pravi se rangiranje učenika. Svaki zadatak vrijedi onoliko bodova koliko ga učenika nije uradilo tačno (na primjer ako je neki zadatak tačno uradilo 5 učenika, onda on vrijedi 25 bodova). Poznato je da postoji učenik koji je imao strogo manje bodova od svih ostalih učenika. Odrediti maksimalan broj bodova koji je taj učenik mogao imati.

5. zadatak Neka su a, b, c prirodni brojevi koji predstavljaju stranice trougla takvi da je $\mathrm{NZD}(a, b, c) = 1$ i vrijedi da su brojevi

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a + b - c}, \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b + c - a}, \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c + a - b}$$

svi cijeli. Dokazati da je broj

$$W = (a + b - c) \cdot (b + c - a) \cdot (c + a - b)$$

oblika k^2 ili $2k^2$ za neki prirodan broj k.

Vrijeme za izradu zadataka je 210 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.
Sretno!

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo
Zmaja od Bosne 33-35, 71000 Sarajevo, Bosna i Hercegovina
E-mail: umks2016@gmail.com Tel.: ++ 387 33 279 874
Fax: ++ 387 33 649 342 ID broj: 4202191060004
Transakcijski račun: 1610000156600012

LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo iz matematike učenika srednjih škola
5. aprila/travnja 2025.

II razred

1. zadatak Neka je E sredina stranice CD kvadrata $ABCD$, a F tačka na stranici AB takva da je $AF = 3BF$. Prava FD siječe prave AE i AC u tačkama P i Q, redom. Ako je $AB = 4$, odrediti PQ.

2. zadatak Odrediti sve realne brojeve q takve da za svaki realan broj $p \geq 0$ jednačina

$$x^2 - 2px + q^2 + q - 2 = 0$$

ima bar jedno rješenje u intervalu $(-1, 0)$.

3. zadatak Test iz matematike radilo je 30 učenika. Učenici rješavaju ukupno 8 zadataka. Zadaci su na zaokruživanje, tako da ako učenik ispravno zaokruži dobija sve bodove na tom zadatku, a u suprotnom se smatra da taj zadatak nije uradio. Na kraju testa pravi se rangiranje učenika. Svaki zadatak vrijedi onoliko bodova koliko ga učenika nije uradilo tačno (na primjer ako je neki zadatak tačno uradilo 5 učenika, onda on vrijedi 25 bodova). Poznato je da postoji učenik koji je imao strogo manje bodova od svih ostalih učenika. Odrediti maksimalan broj bodova koji je taj učenik mogao imati.

4. zadatak Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC, te neka je J tačka simetrična I u odnosu na pravu BC. Dalje, neka je K drugi presjek prave BC sa kružnicom opisanom oko trougla CIJ, a L drugi presjek prave BI sa kružnicom opisanom oko trougla AIK. Dokazati da su prave BC i JL paralelne.

5. zadatak Neka su a, b, c prirodni brojevi koji predstavljaju stranice trougla takvi da je $\mathrm{NZD}(a, b, c) = 1$ i vrijedi da su brojevi

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}, \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}, \frac{c^2+a^2-b^2}{c+a-b}$$

svi cijeli. Dokazati da je broj

$$W = (a+b-c) \cdot (b+c-a) \cdot (c+a-b)$$

oblika k^2 ili $2k^2$ za neki prirodan broj k.

Vrijeme za izradu zadataka je 210 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.
Sretno!

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo
Zmaja od Bosne 33-35, 71000 Sarajevo, Bosna i Hercegovina
E-mail: umks2016@gmail.com Tel.: ++ 387 33 279 874
Fax: ++ 387 33 649 342 ID broj: 4202191060004
Transakcijski račun: 1610000156600012

LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo iz matematike učenika srednjih škola
5. aprila/travnja 2025.

III razred

1. zadatak Ako je $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{3}$, odrediti vrijednost $\cos(4x)$.

2. zadatak Odrediti sve realne brojeve s takve da jednačina

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 0$$

ima četiri različita realna rješenja, i da je proizvod dva od ovih rješenja jednak -2.

3. zadatak Alisa je gledala košarkaški turnir na kojem je učestvovalo 20 timova i ona zna krajnji poredak timova na tabeli, dok Benjamin nije gledao turnir i nema nikakve informacije o tabeli. Benjamin ima pravo da Alisi postavlja koliko god želi pitanja, ali je pravilo da u jednom pitanju Benjamin odabere bilo koja 3 tima i Alisa mu kaže ili koji od ta tri tima je bio najbolji među njima (najviše rangiran), ili koji je bio najlošiji (najniže rangiran). Pri tome Alisa bira koju od te dvije opcije će reći, i Benjamin zna da li mu je Alisa rekla najbolji ili najlošiji tim. Odrediti najveći prirodan broj N za kojeg Benjamin može garantovati da može odrediti N timova $T_1, T_2, ..., T_n$ i poredati ih od najlošijeg do najboljeg.

4. zadatak Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC, te neka je J tačka simetrična I u odnosu na pravu BC. Dalje, neka je K drugi presjek prave BC sa kružnicom opisanom oko trougla CIJ, a L drugi presjek prave BI sa kružnicom opisanom oko trougla AIK. Dokazati da su prave BC i JL paralelne.

5. zadatak Neka su a, b, c prirodni brojevi koji predstavljaju stranice trougla takvi da je $\mathrm{NZD}(a, b, c) = 1$ i vrijedi da su brojevi

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a + b - c}, \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b + c - a}, \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c + a - b}$$

svi cijeli. Dokazati da je broj

$$W = (a + b - c) \cdot (b + c - a) \cdot (c + a - b)$$

oblika k^2 ili $2k^2$ za neki prirodan broj k.

Vrijeme za izradu zadataka je 210 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.
Sretno!

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo
Zmaja od Bosne 33-35, 71000 Sarajevo, Bosna i Hercegovina
E-mail: umks2016@gmail.com Tel.: ++ 387 33 279 874
Fax: ++ 387 33 649 342 ID broj: 4202191060004
Transakcijski račun: 1610000156600012

LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo iz matematike učenika srednjih škola
5. aprila/travnja 2025.

IV razred

1. zadatak Za beskonačan niz pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vrijedi sljedeće:

i. za svaki prirodan broj k tročlani podniz $a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}$ je geometrijski;
ii. za svaki prirodan broj k tročlani podniz $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}$ je aritmetički.

Ako je $a_1 = x$ i $a_2 = y$, odrediti a_{2024} i a_{2025} u funkciji od x i y.

2. zadatak Neka je $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, tj. C je skup svih kompleksnih brojeva čiji je modul manji ili jednak 1. Dokazati da za bilo kojih 12 brojeva $z_1, z_2, \ldots, z_{12} \in C$ postoji 12 brojeva $e_1, e_2, \ldots, e_{12}$, od kojih je svaki jednak -1 ili 1, tako da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{12} |z_k + e_k| < 17.$$

3. zadatak Alisa je gledala košarkaški turnir na kojem je učestvovalo 20 timova i ona zna krajnji poredak timova na tabeli, dok Benjamin nije gledao turnir i nema nikakve informacije o tabeli. Benjamin ima pravo da Alisi postavlja koliko god želi pitanja, ali je pravilo da u jednom pitanju Benjamin odabere bilo koja 3 tima i Alisa mu kaže ili koji od ta tri tima je bio najbolji među njima (najviše rangiran), ili koji je bio najlošiji (najniže rangiran). Pri tome Alisa bira koju od te dvije opcije će reći, i Benjamin zna da li mu je Alisa rekla najbolji ili najlošiji tim. Odrediti najveći prirodan broj N za kojeg Benjamin može garantovati da može odrediti N timova $T_1, T_2, ..., T_n$ i poredati ih od najlošijeg do najboljeg.

4. zadatak Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC, te neka je J tačka simetrična I u odnosu na pravu BC. Dalje, neka je K drugi presjek prave BC sa kružnicom opisanom oko trougla CIJ, a L drugi presjek prave BI sa kružnicom opisanom oko trougla AIK. Dokazati da su prave BC i JL paralelne.

5. zadatak Za podskup S skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 98\}$ kažemo da je *interesantan* ako za svaka dva (ne nužno različita) elementa $x, y \in S$ postoji element $z \in S$ (ne nužno različit od x i y) takav da je $x + y \equiv 2z \pmod{99}$. Odrediti sve mogućnosti za broj elemenata interesantnog podskupa.

Vrijeme za izradu zadataka je 210 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.
Sretno!

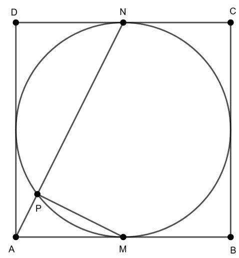
E-mail: umks2016@gmail.com **Tel.:** ++ 387 33 279 874
Fax: ++ 387 33 649 342 **ID broj:** 4202191060004
Transakcijski račun: 1610000156600012

LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo iz matematike učenika srednjih škola
5. aprila/travnja 2025.

I razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

1. zadatak Kružnica upisana u kvadrat $ABCD$ dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ u tačkama M i N redom. Neka $\overline{AN}$ siječe kružnicu u tačkama N i P (vidi sliku). Ako je dužina stranice kvadrata 1, odrediti dužinu duži $\overline{MP}$.
(Napomena: Nije potrebno dokazivati da su tačke M i N sredine stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom.)



Rješenje 1:

Kako su M i N sredine stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ redom, to vrijedi da je

$$\overline{MN} = 1 \text{ i } \overline{AM} = \frac{1}{2}.$$

Također, kako je $MN \parallel AD$, to je $MN \perp AM$, pa je trougao AMN pravougli sa pravim uglom u vrhu M. $\overline{AN}$ je hipotenuza i vrijedi

$$\overline{AN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MN}^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \overline{AN} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Dalje, kako je $\overline{MN}$ prečnik upisane kružnice, to je $\angle MPN = 90°$, pa je $\overline{MP}$ visina trougla AMN koja odgovara hipotenuzi $\overline{AN}$. Sada iz jednakosti formula za površinu trougla AMN imamo

$$\frac{\overline{AM} \cdot \overline{MN}}{2} = \frac{\overline{AN} \cdot \overline{MP}}{2} \Rightarrow \overline{MP} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{MN}}{\overline{AN}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Šema bodovanja:

- Određivanje dužine duži $\overline{AN}$ .... **1 bod**
- Zaključak da je $\angle MPN = 90°$ .... **3 boda**
- Završetak dokaza .... **6 bodova**

Rješenje 2:

Kao i u prethodnom rješenju, lako se zaključi da su trouglovi AMN, AMP i MNP pravougli, te da je

$$\overline{AN} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Stavimo $\overline{AP} = x$ i $\overline{PN} = y$. Tada je $x + y = \frac{\sqrt{5}}{2}$. U pravouglom trouglu AMP je

$$\overline{MP}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{AP}^2 = \frac{1}{4} - x^2,$$

a u pravouglom trouglu MNP je

$$\overline{MP}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{PN}^2 = 1 - y^2.$$

Izjednačavanjem dobijemo

$$\frac{1}{4} - x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow (y - x)(y + x) = \frac{3}{4}.$$

Kako je $x + y = \frac{\sqrt{5}}{2}$, to imamo da je $y - x = \frac{3\sqrt{5}}{10}$. Iz sistema

$$x + y = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$y - x = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

lako dobijemo da je $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, pa je

$$\overline{MP}^2 = 1 - y^2 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Dakle,

$$\overline{MP} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Šema bodovanja:

- Određivanje dužine duži $\overline{AN}$ .... **1 bod**
- Zaključak da je $\angle MPN = 90°$ ....**3 boda**
- Završetak dokaza .... **6 bodova**

2. zadatak Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi:

$$a + b \geq ab, \qquad b + c \geq bc, \qquad c + a \geq ca.$$

Dokazati da vrijedi $a + b + c \geq \frac{3}{4}abc$.

Rješenje:

Množenjem prve nejednakosti sa c dobijamo

$$ac + bc \geq abc.$$

Analogno dobijamo i $ba+ca \geq abc$ i $cb+ab \geq abc$. Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo

$$2(ab + bc + ca) \geq 3abc.$$

S druge strane, sabiranjem tri nejednakosti iz uslova zadatka dobijamo

$$2(a + b + c) \geq ab + bc + ca.$$

Konačno, iz posljednje dvije nejednakosti dobijamo

$$a + b + c \geq \frac{ab + bc + ca}{2} \geq \frac{3}{4}abc,$$

što je i trebalo pokazati.

Šema bodovanja:

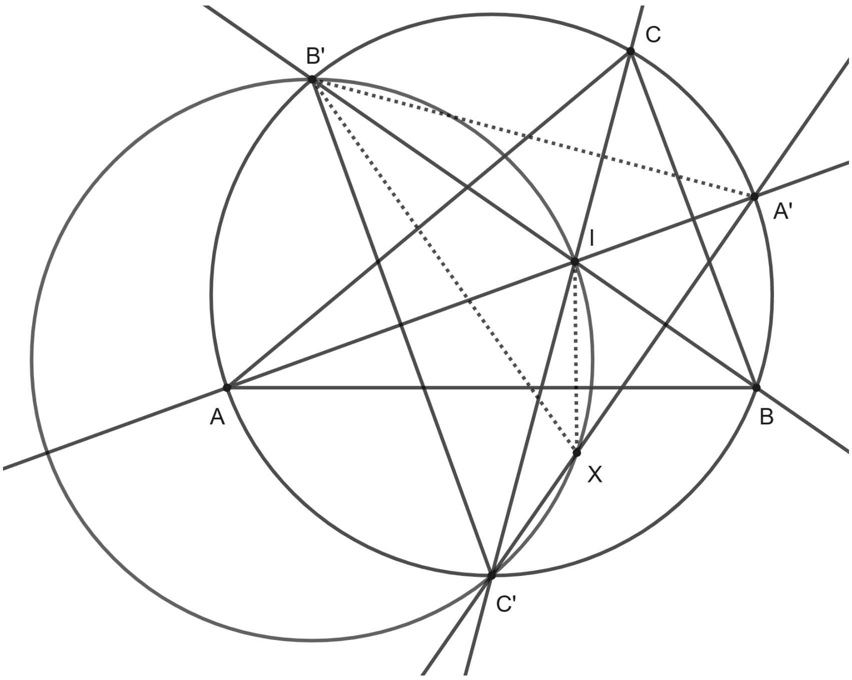
- dobijanje nejdnakosti $ac + bc \geq abc$ (ili bilo koje analogne nejednakosti) ... **2 boda**
- dobijanje nejednakosti $2(ab + bc + ca) \geq 3abc$ ... **3 boda**
- dobijanje nejednakosti $2(a + b + c) \geq ab + bc + ca$ ... **1 bod**
- završetak dokaza ... **4 boda**

3. zadatak Neka je ABC oštrougli trougao i neka je I centar upisane kružnice tog trougla. Na njegovoj opisanoj kružnici, označimo sa A', B' i C' sredine manjih lukova BC, CA i AB redom. Dokaži da tačka simetrična tački A' u odnosu na pravu IB' leži na opisanoj kružnici trougla $IB'C'$.

Rješenje 1:

Neka je X tačka simetrična tački A' u odnosu na pravu IB'. Trebamo dokazati da tačke X, C', I i B' leže na istoj kružnici. Kako simetrala unutrašnjeg ugla trougla polovi kružni luk opisane kružnice oko tog trougla (jer su odgovarajući periferijski uglovi jednaki polovici ugla čija je simetrala povučena), to su tačke A, I, A', tačke B, I, B' i tačke C, I, C' kolinearne. Dakle, na osnovu simetrije dobijamo

$$\angle IXB' = \angle IA'B' = \angle AA'B' = \angle ABB'.$$



S druge strane, imajući u vidu da je

$$\angle IC'B' = \angle CC'B' = \angle CBB' = \angle ABB',$$

dobijamo da vrijedi

$$\angle IXB' = \angle ABB' = \angle IC'B'.$$

Na osnovu teorema o periferijskom uglu, tačke X, C', I, B' leže na istoj kružnici, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- Dokaz da je bar jedna od trojki A, I, A', B, I, B' i C, I, C' kolinearna ..... **2 boda**
- Dokaz da je $\angle B'XI = \angle IA'B'$ .... **2 bod**
- Dokaz da je $\angle B'XI = \angle ABB'$ .... **2 boda**
- Dokaz da je $\angle ABB' = \angle B'C'I$ .... **2 boda**
- Dokaz da iz $\angle B'XI = \angle B'C'I$ slijedi tvrdnja zadatka .... **2 boda**

Rješenje 2:

Uz oznake i zaključivanje kao na početku prethodnog rješenja, lako se pokaže da je

$$\angle XB'I = \angle IB'A'.$$

Na osnovu leme o trozupcu (formulacija i dokaz leme dati na kraju rješenja) je

$$\overline{IA'} = \overline{A'B} = \overline{A'C}$$

$$\overline{IC'} = \overline{C'A} = \overline{C'B}$$

pa tačke A' i C' leže na simetrali duži $\overline{IB'}$, tj. $A'C' \perp IB'$. Pošto je X simetrična tačka tački A' u odnosu na pravu IB', i $A'C' \perp IB'$, slijedi da su tačke A', C' i X kolinearne. Također, vrijedi

$$\angle A'C'I = \angle IB'A',$$

jer se radi o periferijskim uglovima koji odgovaraju podudarnim tetivama.

Tada, iz jednakosti uglova $\angle XB'I = \angle A'C'I = \angle XC'I$ slijedi da tačke X, B', C', I leže na istoj kružnici, što je i trebalo dokazati.

Lema o trozupcu. Neka je tačka I centar upisane kružnice trougla ABC, a B' tačka presjeka simetrale $B'I$ ugla $\angle ABC$ i opisane kružnice trougla ABC. Tada je

$$\overline{AB'} = \overline{CB'} = \overline{IB'}.$$

Dokaz leme. Imamo da vrijedi

$$\angle ABI = \angle B'CA, \quad \text{i} \quad \angle CBI = \angle B'AC$$

jer su to podudarni periferijski uglovi kao uglovi nad istim tetivama $\overline{AB'}$ i $\overline{CB'}$ redom. Pošto je BI simetrala ugla $\angle ABC$, to je

$$\angle ABI = \angle CBI \Rightarrow \overline{AB'} = \overline{CB'}.$$

Dalje, kako je

$$\begin{aligned}\angle B'IA &= 180^\circ - \angle AIB = 180^\circ - (180^\circ - \angle IAB - \angle IBA) = \angle IAB + \angle IBA \\ &= \angle IAC + \angle CAB' = \angle IAB',\end{aligned}$$

to vrijedi da je

$$\overline{AB'} = \overline{IB'}.$$

Ova i prethodna jednakost stranica daju da vrijedi

$$\overline{AB'} = \overline{CB'} = \overline{IB'}.$$

Šema bodovanja:

- Dokaz da je bar jedna od trojki A, I, A', B, I, B' i C, I, C' kolinearna ..... **2 boda**
- Dokaz da je $A'C' \perp IB'$ .... **3 boda**
- Dokaz da su tačke A', C' i X kolinearne .... **1 bod**
- Dokaz $\angle XB'I = \angle XC'I$ .... **2 boda**
- Dokaz da tačke X, B', C', I leže na istoj kružnici .... **2 bod**

4. zadatak Test iz matematike radilo je 30 učenika. Učenici rješavaju ukupno 8 zadataka. Zadaci su na zaokruživanje, tako da ako učenik ispravno zaokruži dobija sve bodove na tom zadatku, a u suprotnom se smatra da taj zadatak nije uradio. Na kraju testa pravi se rangiranje učenika. Svaki zadatak vrijedi onoliko bodova koliko ga učenika nije uradilo tačno (na primjer ako je neki zadatak tačno uradilo 5 učenika, onda on vrijedi 25 bodova). Poznato je da postoji učenik koji je imao strogo manje bodova od svih ostalih učenika. Odrediti maksimalan broj bodova koji je taj učenik mogao imati.

Rješenje:

Dokazat ćemo da je učenik mogao najviše mogao imati 58 bodova. Označimo sa n broj bodova zadnjeplasiranog učenika. Primijetimo da ako je tačno k učenika riješilo neki zadatak, onda taj zadatak vrijedi $30 - k$ bodova i ukupni broj bodova na tom zadatku je $k(30-k) = 30k - k^2 - 225 + 225 = 225 - (15-k)^2 \leq 225 = 15^2$ (maksimum se dostiže za $k = 15$). Dakle, ukupni broj bodova na svim zadacima je manji ili jednak od $8 \cdot 15^2 = 1800$. Kako je $1800 = 30 \cdot 60$, mora vrijediti $n \leq 59$ (alternativa je da svi učenici imaju po 60 bodova, što je u kontradikciji sa činjenicom da je n strogo najmanji broj bodova nekog učenika).

Pretpostavimo da je $n = 59$. Tada je minimalni ukupni broj bodova svih učenika $59 + 29 \cdot 60 = 1799$. Ako je ukupni broj bodova svih učenika jednak 1800, to znači da svaki zadatak vrijedi tačno 15 bodova, pa je nemoguće imati učenika koji je osvojio 59 bodova. S druge strane, ako je ukupni broj osvojenih bodova jednak 1799, to znači da je na jednom (recimo prvom) zadatku osvojeno $14 \cdot 16$ bodova (tj. taj zadatak vrijedi 14 ili 16 bodova), a na preostalih 7 zadataka po $15 \cdot 15$ (maksimalni broj) bodova. Međutim, tada bilo koji učenik koji je uradio prvi zadatak ima $14+15t$ ili $16+15t$ bodova, za neki nenegativni cijeli broj t. Takvih učenika ima 16 ili 14, što je kontradikcija (imamo samo jednog učenika sa 59 bodova, a preostali učenici su svi morali osvojiti 60 bodova da bi u zbiru imali 1799).

	1	2	3	4	5	6	7	8	
15		+	+	+				+	60 - 1
		+	+	+				+	60 - 1
		+	+	+				+	60 - 1
		+	+				+	+	60 - 1 - 1
15	+				+	+	+		60 - 1
	+				+	+	+		60 - 1
	+				+	+	+		60 - 1
	+			+	+	+	$*$	$*$	60 + 14 + 14

Dakle, zaključujemo da je $n \leq 58$. Dokazat ćemo da je $n = 58$ zaista moguće moguće. Za početak, uzmimo da je svaki učenik riješio tačno po 4 zadatka označenih sa "+" (pogledati tabelu). Tada imamo da je svaki učenik osvojio 60 bodova. Dalje, uzmimo da je 30. učenik riješio 7. i 8. zadatak (pogledati oznaku "$*$" u tabeli). Vidimo da je sada 15. učenik osvojio 58, a 30. učenik 88 bodova, dok su svi preostali učenici osvojili 59 bodova.

Šema bodovanja:

- Dokaz da je $n \leq 59$ .... **4 boda**
  - Dokaz da je na jednom zadatku maksimalni broj bodova jednak 15^2 .. **2 boda**
  - Zaključak da je maksimalni ukupni broj bodova svih učenika 1800 ..... **1 bod**
  - Zaključak da postoji učenik sa maksimalno 59 bodova .... **1 bod**
- Dokaz da je $n \neq 59$ .... **2 boda**
- Konstrukcija za $n = 58$ .... **4 boda**

5. zadatak Neka su a, b, c prirodni brojevi koji predstavljaju stranice trougla takvi da je $\mathrm{NZD}(a, b, c) = 1$ i vrijedi da su brojevi

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}, \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}, \frac{c^2+a^2-b^2}{c+a-b}$$

svi cijeli. Dokazati da je broj

$$W = (a+b-c)\cdot(b+c-a)\cdot(c+a-b)$$

oblika k^2 ili $2k^2$ za neki prirodan broj k.

Rješenje 1:

Iz $a+b-c \mid a^2+b^2-c^2$ dobijamo

$$a+b-c \mid (a+b-c)(a+b+c)-(a^2+b^2-c^2) = (a+b)^2-c^2-(a^2+b^2-c^2) = 2ab.$$

Međutim, onda vrijedi i

$$a+b-c \mid a^2+b^2-c^2-2ab = (a-b)^2-c^2 = (a-b-c)(a-b+c),$$

pa vrijedi da prvi faktor iz W dijeli proizvod preostala dva faktora. Analogno se pokazuje da svaki faktor dijeli proizvod preostala dva faktora.

Pretpostavimo da postoji neparan prost broj p takav da p dijeli svaki od brojeva $a+b-c, b+c-a, c+a-b$. Tada

$$p \mid a+b-c+b+c-a = 2b,$$

pa kako je p neparan zaključujemo da $p \mid b$. Analogno dobijamo i $p \mid a$ i $p \mid c$, što je kontradikcija sa uslovom $\mathrm{NZD}(a, b, c) = 1$.

Posmatrajmo bilo koji neparan prost faktor p broja W. Na osnovu prethodno dokazanog, on mora dijeliti tačno dva od brojeva $a+b-c, b+c-a, c+a-b$. Neka bez umanjenja opštosti $p^\alpha \| b+c-a$ i $p^\beta \| c+a-b$ (notacija $p^n \| x$ znači da $p^n \mid x$ i $p^{n+1} \nmid x$).

Međutim, kako $b+c-a \mid (c+a-b)(a+b-c)$ i $p \nmid a+b-c$, vrijedi $\alpha \leq \beta$). Analogno dobijamo $\beta \leq \alpha$, pa vrijedi $\alpha = \beta$. To znači da $p^{2\alpha} \| W$). Kako ovo vrijedi za svaki neparan prost faktor broja W, te je broj W po uslovu zadatka prirodan, to je on ili kvadrat (ukoliko se u njemu nalazi paran broj dvica) ili dvostruki kvadrat (ukoliko se u njemu nalazi neparan broj dvica).

Šema bodovanja:

- dokaz da $a+b-c \mid 2ab$ (ili analogna djeljivost za preostale faktore) .... **1 bod**
- dokaz da svaki faktor dijeli proizvod preostala dva faktora .... **2 boda**
- dokaz da faktori ne mogu imati zajednički neparan prost djelioc .... **1 bod**
- dokaz da se svaki neparan prost faktor broja W pojavljuje u dvije zagrade sa jednakom potencijom .... **4 boda**
- završetak dokaza .... **2 boda**
  - $*$ Ukoliko učenik zaključi da je dovoljno dokazati da se svaki neparan prost broj pojavljuje paran broj puta u W, ali nema kompletan dokaz, dobija 1 od ova 2 boda

Rješenje 2:

Na isti način kao u prvom rješenju dobijamo da $a+b-c \mid 2ab$, $b+c-a \mid 2bc$ te $c+a-b \mid 2ca$. Također, na isti način dokazujemo da ne postoji neparan prost broj p koji dijeli sva tri data broja.

Pretpostavimo sada da neki neparan prost broj p dijeli $a+b-c$ i neka je k najveći stepen takav da $p^k|a+b-c$. Tada imamo i da $p^k|2ab$. Kako je p neparan, to $p^k|ab$. Ako bi imali da $p|a$ i $p|b$ onda bi iz $p|a+b-c$ slijedilo i da $p|c$, što je kontradikcija sa uslovom da je $NZD(a,b,c)=1$. Zaključujemo da $p^k|a$ ili $p^k|b$. Neka bez gubitka opštosti vrijedi $p^k|a$. Tada iz $p^k|a+b-c$ slijedi da $p^k|b-c$, pa zaključujemo da $p^k|c-b$, a samim tim i $p^k|a+c-b$. Iz činjenice da ne postoji neparan prost broj koji dijeli sva tri data broja, znamo da p ne dijeli $b+c-a$ (jer dijeli preostala dva broja). Ovo znači da je k ujedno i najveći stepen broja p koji dijeli $a+c-b$, jer kada bi $p^{k+1}|a+c-b$, onda bi analognim postupkom dobili da $p^{k+1}|a+b-c$, što je kontradikcija s tim da je k najveći stepena broja p u $a+b-c$.

Dakle, dokazali smo da ako p^k za neki neparan broj p i najveći stepen k dijeli neki od data tri broja, da onda dijeli još jedan od njih (sa istim stepenom k), a da to p ne dijeli treći broj. Ovo znači da se u proizvodu W svako p^k pojavljuje tačno dva puta, pa je neparni dio tog broja potpun kvadrat, pa je sam broj W oblika ili k^2 ili $2k^2$, zavisno od toga da li sadrži paran ili neparan broj dvica u sebi.

Šema bodovanja:

- dokaz da $a+b-c \mid 2ab$ (ili analogna djeljivost za preostale faktore) .... **1 bod**
- dokaz da faktori ne mogu imati zajednički neparan prost djelioc .... **1 bod**
- dokaz da ako za neparan prost broj p vrijedi $p \mid a+b-c$ onda p dijeli **tačno** jedan od preostala dva broja $b+c-a$ i $c+a-b$ .... **2 boda**
    * Bodovi se dodjeljuju i za analogne tvrdnje, npr. ako učenik pretpostavi da $p \mid b+c-a$ ili $p \mid c+a-b$ i dokaže da p onda dijeli tačno jedan od preostala dva broja
    * Ako učenik ne zaključi da isto p ne dijeli treći broj, dobija samo 1 od ova 2 boda
- zaključak da prethodna tvrdnja vrijedi i za p^k, gdje je k najveći stepen takav da $p^k|a+b-c$ .... **2 boda**
- zaključak da isti stepen broja p dijeli oba broja .... **3 boda**
- završetak dokaza .... **2 boda**
    * Ukoliko učenik zaključi da je dovoljno dokazati da se svaki neparan prost broj pojavljuje paran broj puta u W, ali nema kompletan dokaz, dobija 1 od ova 2 boda

E-mail: umks2016@gmail.com **Tel.:** ++ 387 33 279 874
Fax: ++ 387 33 649 342 **ID broj:** 4202191060004
Transakcijski račun: 1610000156600012

LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo iz matematike učenika srednjih škola
5. aprila/travnja 2025.

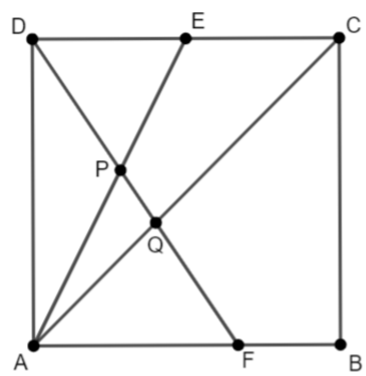
II razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

1. zadatak Neka je E sredina stranice CD kvadrata $ABCD$, a F tačka na stranici AB takva da je $AF = 3BF$. Prava FD siječe prave AE i AC u tačkama P i Q, redom. Ako je $AB = 4$, odrediti PQ.

Rješenje:

Iz uslova zadatka je $AF = 3$. Iz Pitagorine teoreme na trougao AFD dobijamo $DF^2 = AD^2 + AF^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2$, pa je $DF = 5$.
Primijetimo da su trouglovi APF i EPD slični, jer je $\angle APF = \angle EPD$ kao unakrsni uglovi i $\angle DEP = \angle FAP$ kao uglovi na transferzali. Zbog toga je



$$\frac{FP}{PD} = \frac{AF}{DE} = \frac{3}{2},$$

odakle dobijamo $FP = 3$.
Slično zaključujemo da su trouglovi AFQ i DQC slični, odakle je

$$\frac{FQ}{DQ} = \frac{AF}{DC} = \frac{3}{4},$$

pa imamo $FQ = \frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{15}{7}$.

Konačno, dobijamo $PQ = FP - FQ = 3 - \frac{15}{7} = \frac{6}{7}$.

Šema bodovanja:

- izračunavanje DF .... **1 bod**
- zaključak da su trouglovi AFP i DPE slični .... **2 boda**
- izračunavanje FP .... **2 boda**
- zaključak da su trouglovi AFQ i DQC slični .... **2 boda**
- izračunavanje FQ .... **2 boda**
- izračunavanje PQ .... **1 bod**

2. zadatak Odrediti sve realne brojeve q takve da za svaki realan broj $p \geq 0$ jednačina

$$x^2 - 2px + q^2 + q - 2 = 0$$

ima bar jedno rješenje u intervalu $(-1, 0)$.

Rješenje:

Neka je x_1 rješenje iz intervala $(-1, 0)$, te neka je x_2 drugo (također realno) rješenje. Iz Vijetovih pravila vrijedi $x_1 + x_2 = 2p \geq 0$, pa mora vrijediti $x_2 > 0$.

Neka je $f(x) = x^2 - 2px + q^2 + q - 2$. Uslov $-1 < x_1 < 0 < x_2$ je ekvivalentan sa $f(0) < 0$ i $f(-1) > 0$. Diskriminanta će sigurno biti pozitivna zbog uslova $f(0) < 0$, koji osigurava da će jednačina imati realna rješenja.

Uslov $f(0) < 0$ se svodi na $q^2 + q - 2 < 0$, tj. $(q-1)(q+2) < 0$, odakle imamo $q \in (-2, 1)$.

Uslov $f(-1) > 0$ se svodi na $1 + 2p + q^2 + q - 2 > 0$, tj. $q^2 + q - 1 > -2p$. Ovo će vrijediti za svako $p \geq 0$ ako i samo ako vrijedi $q^2 + q - 1 \geq 0$. S obzirom da su rješenja kvadratne jednačine $q^2 + q - 1 = 0$ jednaka $q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, pa će vrijediti $q^2 + q - 1 \geq 0$ za sve $q \in (-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

Dakle, konačno rješenje je $q \in (-2, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1)$.

Šema bodovanja:

- zaključak da je drugo rješenje pozitivno .... **1 bod**
- dobijanje uslova $q^2 + q - 2 < 0$ .... **2 boda**
- rješavanje uslova $q^2 + q - 2 < 0$ .... **1 bod**
- dobijanje uslova $1 + 2p + q^2 + q - 2 > 0$ .... **2 boda**
- rješavanje uslova $1 + 2p + q^2 + q - 2 > 0$ .... **3 boda**
- dobijanje konačnog rješenja .... **1 bod**

Napomena za prvi uslov: Do uslova $q^2 + q - 2 < 0$ se može doći i na druge načine. Na primjer, nakon što se zaključi da je drugo rješenje pozitivno, može se zaključiti da proizvod rješenja mora biti negativan, odakle je iz Vijetovih pravila $x_1 x_2 = q^2 + q - 2 < 0$. Također, može se zaključiti da je je x_1 manje rješenje, pa se uslov $x_1 < 0$ svodi na

$$\frac{2p - \sqrt{4p^2 - 4(q^2 + q - 2)}}{2} = p - \sqrt{p^2 - (q^2 + q - 2)} < 0,$$

tj. $p < \sqrt{p^2 - (q^2 + q - 2)}$. Kako je p pozitivan, posljednju nejednakost smijemo kvadrirati, te se ona svodi upravo na uslov $q^2 + q - 2 < 0$.

S druge strane, ukoliko učenik postavljanjem uslova da je diskriminanta veća ili jednaka od 0 za svako $p \geq 0$ dođe do prvog uslova, ne dobija bodove predviđene za dobijanje tog uslova ukoliko u toku rada ne pokaže da mu to garantuje negativno rješenje. Međutim, i dalje može dobiti bod za rješavanje tog uslova.

Napomena za drugi uslov: Uslov $1 + 2p + q^2 + q - 2 > 0$ se može dobiti i iz:

$$p - \sqrt{p^2 - (q^2 + q - 2)} > -1 \Leftrightarrow$$

$$p + 1 > \sqrt{p^2 - (q^2 + q - 2)} \Leftrightarrow$$

$$p^2 + 2p + 1 > p^2 - (q^2 + q - 2) \Leftrightarrow$$

$$1 + 2p + q^2 + q - 2 > 0.$$

3. zadatak Test iz matematike radilo je 30 učenika. Učenici rješavaju ukupno 8 zadataka. Zadaci su na zaokruživanje, tako da ako učenik ispravno zaokruži dobija sve bodove na tom zadatku, a u suprotnom se smatra da taj zadatak nije uradio. Na kraju testa pravi se rangiranje učenika. Svaki zadatak vrijedi onoliko bodova koliko ga učenika nije uradilo tačno (na primjer ako je neki zadatak tačno uradilo 5 učenika, onda on vrijedi 25 bodova). Poznato je da postoji učenik koji je imao strogo manje bodova od svih ostalih učenika. Odrediti maksimalan broj bodova koji je taj učenik mogao imati.

Rješenje:

Dokazat ćemo da je učenik mogao najviše mogao imati 58 bodova. Označimo sa n broj bodova zadnjeplasiranog učenika. Primijetimo da ako je tačno k učenika riješilo neki zadatak, onda taj zadatak vrijedi $30-k$ bodova i ukupni broj bodova na tom zadatku je $k(30-k) = 30k - k^2 - 225 + 225 = 225 - (15-k)^2 \leq 225 = 15^2$ (maksimum se dostiže za $k = 15$). Dakle, ukupni broj bodova na svim zadacima je manji ili jednak od $8 \cdot 15^2 = 1800$. Kako je $1800 = 30 \cdot 60$, mora vrijediti $n \leq 59$ (alternativa je da svi učenici imaju po 60 bodova, što je u kontradikciji sa činjenicom da je n strogo najmanji broj bodova nekog učenika).

Pretpostavimo da je $n = 59$. Tada je minimalni ukupni broj bodova svih učenika $59 + 29 \cdot 60 = 1799$. Ako je ukupni broj bodova svih učenika jednak 1800, to znači da svaki zadatak vrijedi tačno 15 bodova, pa je nemoguće imati učenika koji je osvojio 59 bodova. S druge strane, ako je ukupni broj osvojenih bodova jednak 1799, to znači da je na jednom (recimo prvom) zadatku osvojeno $14 \cdot 16$ bodova (tj. taj zadatak vrijedi 14 ili 16 bodova), a na preostalih 7 zadataka po $15 \cdot 15$ (maksimalni broj) bodova. Međutim, tada bilo koji učenik koji je uradio prvi zadatak ima $14+15t$ ili $16+15t$ bodova, za neki nenegativni cijeli broj t. Takvih učenika ima 16 ili 14, što je kontradikcija (imamo samo jednog učenika sa 59 bodova, a preostali učenici su svi morali osvojiti 60 bodova da bi u zbiru imali 1799).

	1	2	3	4	5	6	7	8	
15		+	+	+				+	60 - 1
		+	+	+				+	60 - 1
		+	+	+				+	60 - 1
		+	+				+	+	60 - 1 - 1
15	+				+	+	+		60 - 1
	+				+	+	+		60 - 1
	+				+	+	+		60 - 1
	+			+	+	+	$*$	$*$	60 + 14 + 14

Dakle, zaključujemo da je $n \leq 58$. Dokazat ćemo da je $n = 58$ zaista moguće moguće. Za početak, uzmimo da je svaki učenik riješio tačno po 4 zadatka označenih sa "+" (pogledati tabelu). Tada imamo da je svaki učenik osvojio 60 bodova. Dalje, uzmimo da je 30. učenik riješio 7. i 8. zadatak (pogledati oznaku "$*$" u tabeli). Vidimo da je sada 15. učenik osvojio 58, a 30. učenik 88 bodova, dok su svi preostali učenici osvojili 59 bodova.

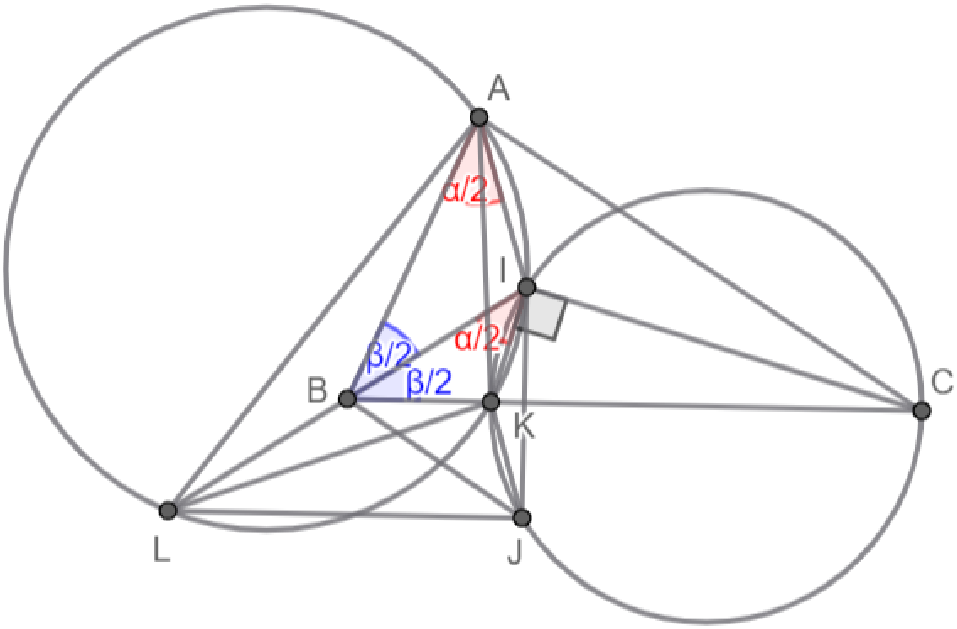
Šema bodovanja:

- Dokaz da je $n \leq 59$ .... **4 boda**
  - Dokaz da je na jednom zadatku maksimalni broj bodova jednak 15^2 .. **2 boda**
  - Zaključak da je maksimalni ukupni broj bodova svih učenika 1800 ..... **1 bod**
  - Zaključak da postoji učenik sa maksimalno 59 bodova .... **1 bod**
- Dokaz da je $n \neq 59$ .... **2 boda**
- Konstrukcija za $n = 58$ .... **4 boda**

4. zadatak Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC, te neka je J tačka simetrična I u odnosu na pravu BC. Dalje, neka je K drugi presjek prave BC sa kružnicom opisanom oko trougla CIJ, a L drugi presjek prave BI sa kružnicom opisanom oko trougla AIK. Dokazati da su prave BC i JL paralelne.

Rješenje:

Neka su α, β, γ unutrašnji uglovi trougla ABC. Zbog simetrije je $\angle KIC = \angle KJC$, a kako su ovi uglovi suplementni (jer je četverougao $KJCI$ tetivni), to je $\angle KIC = \angle KJC = 90°$.



Sada je $\angle BIK = \angle BIC - \angle KIC = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} - 90° = \frac{\alpha}{2} = \angle BAI$. Kako je uz to i $\angle KBI = \angle ABI = \frac{\beta}{2}$, to su trouglovi BKI i ABI slični, odakle je

$$\frac{IK}{AI} = \frac{BI}{AB}.$$

Dalje, kako je $\angle LAK = \angle LIK = \frac{\alpha}{2} = \angle BAI$, to je $\angle LAB = \angle KAI$, što zajedno sa $\angle ALI = \angle AKI$ znači da su trouglovi ALB i AKI slični, odakle slijedi:

$$\frac{BL}{AB} = \frac{IK}{AI} = \frac{BI}{AB},$$

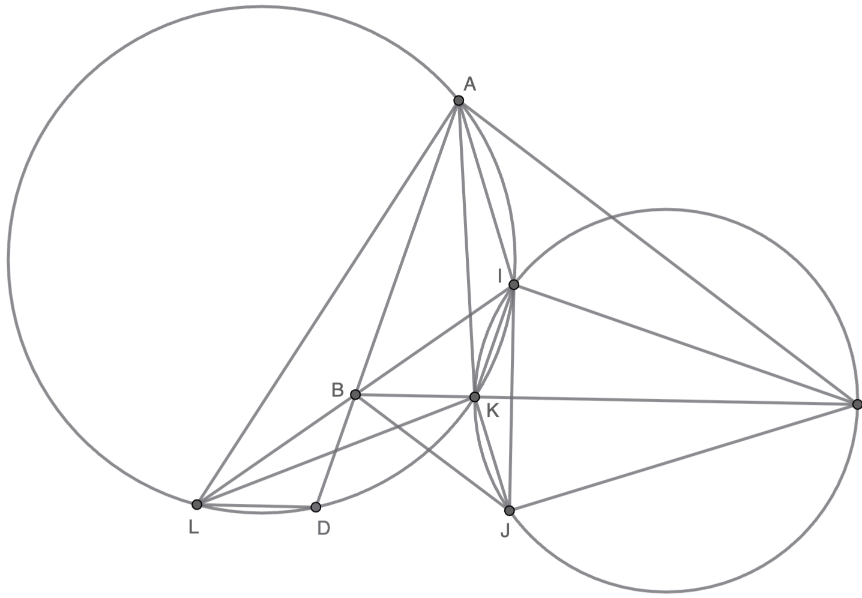
tj. $BL = BI$. Kako je prava BC simetrala duži IJ, to ona polovi i IJ i IL, pa je ona srednja linija trougla JLI, tj. vrijedi $JL||BC$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- dokaz da je $\angle KIC = 90°$ .... **1 bod**
- zaključak da je $\angle BIK = \frac{\alpha}{2}$ .... **1 bod**
- zaključak da su trouglovi BKI i BIA slični .... **1 bod**
- dobijanje jednakosti $\frac{IK}{AI} = \frac{BI}{AB}$ .... **1 bod**
- zaključak da su trouglovi ALB i AKI slični .... **1 bod**
- dobijanje jednakosti $\frac{BL}{AB} = \frac{IK}{AI}$ .... **1 bod**
- zaključak $BI = BL$ .... **2 boda**
- završetak dokaza .... **2 boda**
  - $*$ Ukoliko učenik zaključi da je dovoljno dokazati $BI = BL$, ali ne završi dokaz, dobija 1 od ova 2 boda

Rješenje 2 (rješenje učenice Sare Smajić):

Kao i u prvom rješenju pokazujemo da je $\angle BIK = \frac{\alpha}{2}$, pa je $\angle LAB = \angle KAI$.

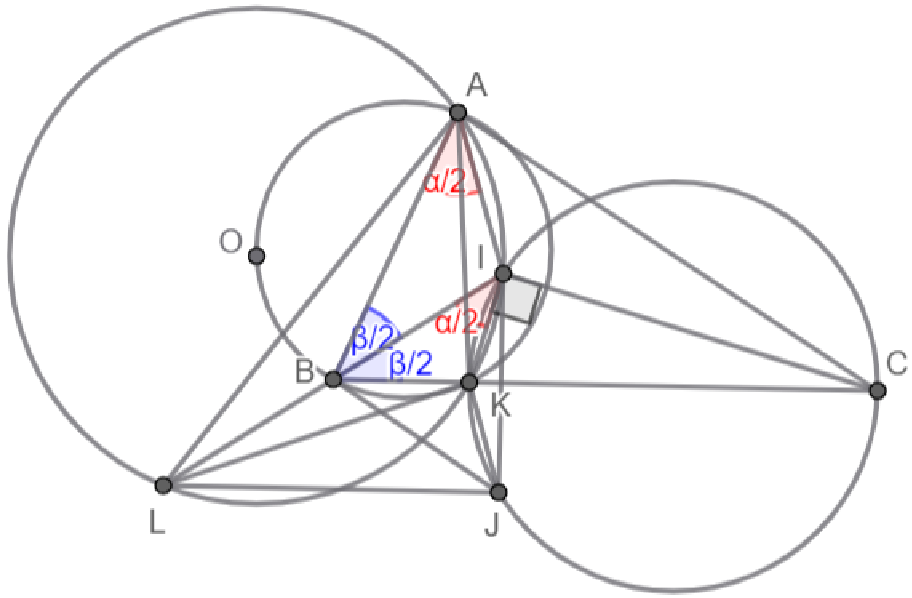


Neka je D drugi presjek prave AB sa kružnicom opisanom oko trougla AIK. Kako su nad tetivama DL i IK isti uglovi, to su te tetive jednake, odakle je i $\angle KLI = \angle LKD$, pa su prave DK i IL paralelne, tj. četverougao $LDKI$ je jednakokraki trapez.

Posmatrajmo sada trouglove LDB i BKI. Kako je $\angle LDB = \angle LDA = \angle LIA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \angle BKI$ i $\angle DLB = \angle BIK$, to su ovi trouglovi podudarni, odakle je $BL = BI$, te završavamo kao u prethodnom rješenju.

Rješenje 3 (rješenje učenika Abdullaha Fehratbegovića i Sergeja Petkovića):

Kao i u prvom rješenju pokazujemo da je $\angle BIK = \frac{\alpha}{2}$, pa je $\angle AIK = \angle AIB + \angle BIK = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \frac{\beta}{2}$.

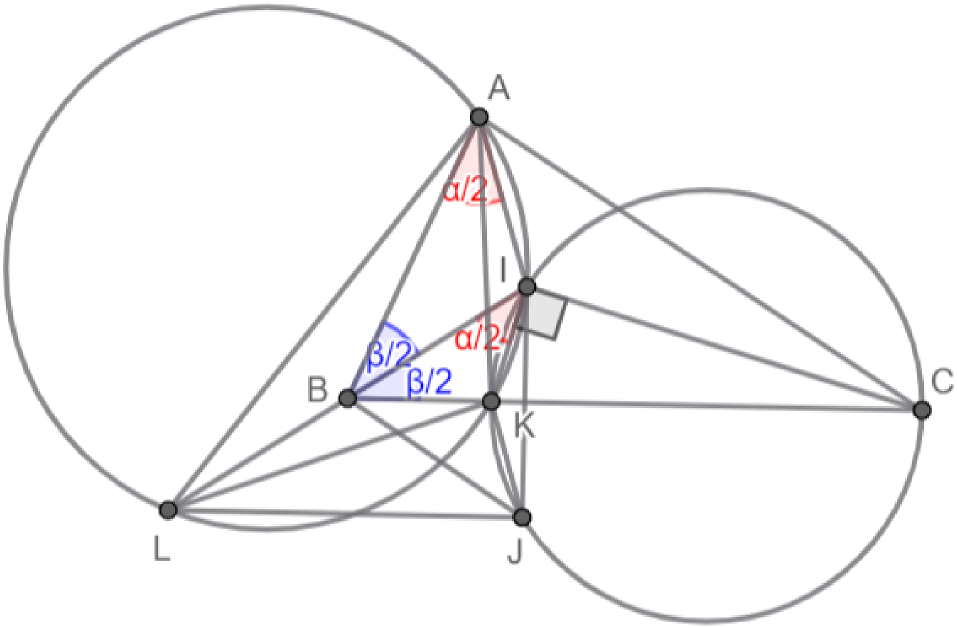


Neka je O centar kružnice opisane oko trougla AIK. Tada je $\angle AOK = 2 \cdot (180^\circ - \angle AIK) = \beta = \angle ABK$, pa tačke O, B, K, A pripadaju istoj kružnici. Kako je $OA = OK$, to je O sredina luka AK na kojem je i tačka B, pa je BO simetrala vanjskog ugla $\angle KBA$. Kako je BI simetrala unutrašnjeg ugla, to je $\angle OBI = 90^\circ$, te zbog $OI = OL$ zaključujemo $BI = BL$, te završavamo kao u prethodnim rješenjima.

Rješenje 4 (rješenje članice komisije Adise Bolić):

Opet ćemo dokazati da je $BI = BL$. Doboljno je dokazati da vrijedi $\frac{BI}{BA} = \frac{BL}{BA}$, odnosno primjenjujući sinusnu teoremu na trouglove BIA i BLA, dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\frac{\sin \angle BAI}{\sin \angle BIA} = \frac{\sin \angle BAL}{\sin \angle ALB}.$$



S jedne strane je

$$\frac{\sin \angle BAI}{\sin \angle BIA} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}.$$

S druge strane, u prvom rješenju je dokazano da je $\angle LAB = \angle KAI$, pa je

$$\frac{\sin \angle BAL}{\sin \angle ALB} = \frac{\sin \angle KAI}{\sin \angle AKI} = \frac{IK}{AI}.$$

Iz $\frac{IK}{IC} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$ i $\frac{AI}{IC} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, dijeljenjem dobijamo $\frac{IK}{AI} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$, čime je dokaz završen.

5. zadatak Neka su a, b, c prirodni brojevi koji predstavljaju stranice trougla takvi da je $\mathrm{NZD}(a, b, c) = 1$ i vrijedi da su brojevi

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}, \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}, \frac{c^2+a^2-b^2}{c+a-b}$$

svi cijeli. Dokazati da je broj

$$W = (a+b-c) \cdot (b+c-a) \cdot (c+a-b)$$

oblika k^2 ili $2k^2$ za neki prirodan broj k.

Rješenje 1:

Iz $a+b-c \mid a^2+b^2-c^2$ dobijamo

$$a+b-c \mid (a+b-c)(a+b+c) - (a^2+b^2-c^2) = (a+b)^2 - c^2 - (a^2+b^2-c^2) = 2ab.$$

Međutim, onda vrijedi i

$$a+b-c \mid a^2+b^2-c^2-2ab = (a-b)^2 - c^2 = (a-b-c)(a-b+c),$$

pa vrijedi da prvi faktor iz W dijeli proizvod preostala dva faktora. Analogno se pokazuje da svaki faktor dijeli proizvod preostala dva faktora.

Pretpostavimo da postoji neparan prost broj p takav da p dijeli svaki od brojeva $a+b-c, b+c-a, c+a-b$. Tada

$$p \mid a+b-c+b+c-a = 2b,$$

pa kako je p neparan zaključujemo da $p \mid b$. Analogno dobijamo i $p \mid a$ i $p \mid c$, što je kontradikcija sa uslovom $\mathrm{NZD}(a, b, c) = 1$.

Posmatrajmo bilo koji neparan prost faktor p broja W. Na osnovu prethodno dokazanog, on mora dijeliti tačno dva od brojeva $a+b-c, b+c-a, c+a-b$. Neka bez umanjenja opštosti $p^\alpha \| b+c-a$ i $p^\beta \| c+a-b$ (notacija $p^n \| x$ znači da $p^n \mid x$ i $p^{n+1} \nmid x$).

Međutim, kako $b+c-a \mid (c+a-b)(a+b-c)$ i $p \nmid a+b-c$, vrijedi $\alpha \leq \beta$). Analogno dobijamo $\beta \leq \alpha$, pa vrijedi $\alpha = \beta$. To znači da $p^{2\alpha} \| W$). Kako ovo vrijedi za svaki neparan prost faktor broja W, te je broj W po uslovu zadatka prirodan, to je on ili kvadrat (ukoliko se u njemu nalazi paran broj dvica) ili dvostruki kvadrat (ukoliko se u njemu nalazi neparan broj dvica).

Šema bodovanja:

- dokaz da $a+b-c \mid 2ab$ (ili analogna djeljivost za preostale faktore) .... **1 bod**
- dokaz da svaki faktor dijeli proizvod preostala dva faktora .... **2 boda**
- dokaz da faktori ne mogu imati zajednički neparan prost djelioc .... **1 bod**
- dokaz da se svaki neparan prost faktor broja W pojavljuje u dvije zagrade sa jednakom potencijom .... **4 boda**
- završetak dokaza .... **2 boda**
  - $*$ Ukoliko učenik zaključi da je dovoljno dokazati da se svaki neparan prost broj pojavljuje paran broj puta u W, ali nema kompletan dokaz, dobija 1 od ova 2 boda

Rješenje 2:

Na isti način kao u prvom rješenju dobijamo da $a+b-c \mid 2ab$, $b+c-a \mid 2bc$ te $c+a-b \mid 2ca$. Također, na isti način dokazujemo da ne postoji neparan prost broj p koji dijeli sva tri data broja.

Pretpostavimo sada da neki neparan prost broj p dijeli $a+b-c$ i neka je k najveći stepen takav da $p^k|a+b-c$. Tada imamo i da $p^k|2ab$. Kako je p neparan, to $p^k|ab$. Ako bi imali da $p|a$ i $p|b$ onda bi iz $p|a+b-c$ slijedilo i da $p|c$, što je kontradikcija sa uslovom da je $NZD(a,b,c)=1$. Zaključujemo da $p^k|a$ ili $p^k|b$. Neka bez gubitka opštosti vrijedi $p^k|a$. Tada iz $p^k|a+b-c$ slijedi da $p^k|b-c$, pa zaključujemo da $p^k|c-b$, a samim tim i $p^k|a+c-b$. Iz činjenice da ne postoji neparan prost broj koji dijeli sva tri data broja, znamo da p ne dijeli $b+c-a$ (jer dijeli preostala dva broja). Ovo znači da je k ujedno i najveći stepen broja p koji dijeli $a+c-b$, jer kada bi $p^{k+1}|a+c-b$, onda bi analognim postupkom dobili da $p^{k+1}|a+b-c$, što je kontradikcija s tim da je k najveći stepena broja p u $a+b-c$.

Dakle, dokazali smo da ako p^k za neki neparan broj p i najveći stepen k dijeli neki od data tri broja, da onda dijeli još jedan od njih (sa istim stepenom k), a da to p ne dijeli treći broj. Ovo znači da se u proizvodu W svako p^k pojavljuje tačno dva puta, pa je neparni dio tog broja potpun kvadrat, pa je sam broj W oblika ili k^2 ili $2k^2$, zavisno od toga da li sadrži paran ili neparan broj dvica u sebi.

Šema bodovanja:

- dokaz da $a+b-c \mid 2ab$ (ili analogna djeljivost za preostale faktore) .... **1 bod**
- dokaz da faktori ne mogu imati zajednički neparan prost djelioc .... **1 bod**
- dokaz da ako za neparan prost broj p vrijedi $p \mid a+b-c$ onda p dijeli **tačno** jedan od preostala dva broja $b+c-a$ i $c+a-b$ .... **2 boda**
    - ∗ Bodovi se dodjeljuju i za analogne tvrdnje, npr. ako učenik pretpostavi da $p \mid b+c-a$ ili $p \mid c+a-b$ i dokaže da p onda dijeli tačno jedan od preostala dva broja
    - ∗ Ako učenik ne zaključi da isto p ne dijeli treći broj, dobija samo 1 od ova 2 boda
- zaključak da prethodna tvrdnja vrijedi i za p^k, gdje je k najveći stepen takav da $p^k|a+b-c$ .... **2 boda**
- zaključak da isti stepen broja p dijeli oba broja .... **3 boda**
- završetak dokaza .... **2 boda**
    - ∗ Ukoliko učenik zaključi da je dovoljno dokazati da se svaki neparan prost broj pojavljuje paran broj puta u W, ali nema kompletan dokaz, dobija 1 od ova 2 boda

E-mail: umks2016@gmail.com **Tel.:** ++ 387 33 279 874
Fax: ++ 387 33 649 342 **ID broj:** 4202191060004
Transakcijski račun: 1610000156600012

LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo iz matematike učenika srednjih škola
5. aprila/travnja 2025.

III razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

1. zadatak Ako je $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{3}$, odrediti vrijednost $\cos(4x)$.

Rješenje:

Primijetimo da je $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}(2\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x)$.

Sada po uslovu dobijamo da je $1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{3}$, odnosno $\sin^2(2x) = \frac{8}{9}$.

S druge strane, imamo da je $\cos(4x) = \cos^2(2x) - \sin^2(2x) = \cos^2(2x) + \sin^2(2x) - 2\sin^2(2x) = 1 - 2\sin^2(2x)$, pa konačno dobijamo da je $\cos(4x) = 1 - 2 \cdot \frac{8}{9} = -\frac{7}{9}$.

Šema bodovanja:

- Dokaz da je $\sin^2(2x) = \frac{8}{9}$ .... **8 bodova**
  - Izražavanje datog izraza kao $\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$ .... **3 boda**
  - Izražavanje datog izraza kao $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x$ .... **2 boda**
  - Izražavanje datog izraza $1 - \frac{3}{4}\sin^2(2x)$ .... **2 boda**
  - Dokaz da je $\sin^2(2x) = \frac{8}{9}$ .... **1 bod**
- Dokaz da je $\cos(4x) = 1 - 2\sin^2(2x)$ .... **1 bod**
- Krajnji izračun $\cos(4x)$ .... **1 bod**

2. zadatak Odrediti sve realne brojeve s takve da jednačina

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 0$$

ima četiri različita realna rješenja, i da je proizvod dva od ovih rješenja jednak -2.

Rješenje:

Označimo rješenja jednačine sa x_1, x_2, x_3, x_4 i neka vrijedi $x_1x_2 = -2$. Imamo

$$4x^4 - 20x^3 + sx^2 + 22x - 2 = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

odakle množenjem izraza na desnoj strani i izjednačavanjem koeficijenata dobijamo sljedeće relacije

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{-20}{4} = 5 \tag{1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{s}{4} \tag{2}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{22}{4} = -\frac{11}{2} \tag{3}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}. \tag{4}$$

Ovo su zapravo Vieteove formule za polinom četvrtog stepena. Iz $x_1x_2 = -2$ i (4) dobijamo $x_3x_4 = \frac{1}{4}$, pa iz (3) imamo

$$\begin{aligned} x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 = -\frac{11}{2} &\Leftrightarrow \\ (x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -\frac{11}{2} &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{4}(x_1 + x_2) - 2(x_3 + x_4) = -\frac{11}{2}&. \end{aligned}$$

Ako označimo $x_1 + x_2 = u$ i $x_3 + x_4 = v$, posljednja relacija zajedno s relacijom (1) daje sistem dvije linearne jednačine $u + v = 5$ i $\frac{1}{4}u - 2v = -\frac{11}{2}$. Rješenje ovog sistema je $(u, v) = (2, 3)$, pa vrijedi $x_1 + x_2 = 2$ i $x_3 + x_4 = 3$. Konačno, iz (2) imamo

$$\begin{aligned} \frac{s}{4} &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \\ &= x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = -2 + 2 \cdot 3 + 1/4 = \frac{17}{4}, \end{aligned}$$

odakle slijedi $s = 17$.

Dokažimo još da su za $s = 17$ uslovi zadatka zadovoljeni. Iz $x_1 + x_2 = 2$ i $x_1x_2 = -2$ na osnovu Vieteovih formula za polinom drugog stepena slijedi da su x_1 i x_2 rješenja jednačine $x^2 - 2x - 2$, pa je $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$. Slično iz $x_3 + x_4 = 3$ i $x_3x_4 = \frac{1}{4}$ dobijamo $x_{3,4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2}$. Dakle, brojevi x_1, x_2, x_3, x_4 su zaista četiri realna različita rješenja početne jednačine za $s = 17$.

Šema bodovanja:

- Dobijanje relacija (1)-(4) .... **2 boda**
  - $*$ Relacije se ne moraju izvoditi, dovoljno je pozvati se na Vietove formule
- Dobijanje relacije $x_3x_4 = \frac{1}{4}$ .... **1 bod**
- Dobijanje relacije $\frac{1}{4}(x_1 + x_2) - 2(x_3 + x_4) = -\frac{11}{2}$ ....**2 boda**
- Dobijanje $x_1 + x_2 = 2$ i $x_3 + x_4 = 3$ ....**1 bod**
- Dobijanje vrijednosti $s = 17$ ....**3 boda**
- Zaključak da $s = 17$ zadovoljava uslov zadatka ....**1 bod**

3. zadatak Alisa je gledala košarkaški turnir na kojem je učestvovalo 20 timova i ona zna krajnji poredak timova na tabeli, dok Benjamin nije gledao turnir i nema nikakve informacije o tabeli. Benjamin ima pravo da Alisi postavlja koliko god želi pitanja, ali je pravilo da u jednom pitanju Benjamin odabere bilo koja 3 tima i Alisa mu kaže ili koji od ta tri tima je bio najbolji među njima (najviše rangiran), ili koji je bio najlošiji (najniže rangiran). Pri tome Alisa bira koju od te dvije opcije će reći, i Benjamin zna da li mu je Alisa rekla najbolji ili najlošiji tim. Odrediti najveći prirodan broj N za kojeg Benjamin može garantovati da može odrediti N timova $T_1, T_2, ..., T_n$ i poredati ih od najlošijeg do najboljeg.

Rješenje:

Dokazat ćemo da je $N = 10$.

Za početak dokažimo da je $N \geq 10$, tj. da Benjamin može odabrati listu od 10 timova i sa sigurnošću ih poredati od najlošijeg do najboljeg. Nazovimo par timova t_x, t_y *problematičnim* ako Benjamin ne može nikako odrediti koji od ta dva tima je bolji. Primijetimo sada da svaki tim t_x može biti član samo jednog problematičnog para, jer inače, ako su t_x, t_y i t_x, t_z dva problematična para, Benjamin može Alisu pitati o ta tri tima. Neovisno od njenog odgovora, Benjamin će saznati ili odnos t_x, t_y ili t_x, t_z, što je kontradikcija.

Zaključujemo da možemo imati najviše 10 problematičnih parova. Pretpostavimo da Benjamin označi timove u problematičnim parovima sa $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_k, b_k)$, pri čemu je $k \leq 10$. Preostalim timovima (ako ih ima) nasumično daje preostala imena $a_{k+1}, b_{k+1}, a_{k+2}, b_{k+2}, ..., a_{10}, b_{10}$. Primijetimo sada da među timovima $a_1, a_2, ..., a_{10}$ nema problematičnih parova, pa ih Benjamin može poredati od najlošijeg do najboljeg, čime je tvrdnja dokazana.

Dokažimo sada još da je $N \leq 10$. Želimo da nađemo strategiju koja Alisi omogućava da Benjamin nikad ne može sa sigurnošću poredati 11 timova od najlošijeg do najboljeg. Pretpostavimo da su timovi na tabeli redom $c_1, c_2, ..., c_{20}$, gdje je c_1 najbolji, a c_{20} najlošiji tim.

Ako Benjamin pita Alisu pitanje koje uključuje dva tima na tabeli c_{2i-1} i c_{2i} za neko $1 \leq i \leq 10$ zajedno sa nekim timom c_k, onda Alisa treba da mu odgovori ili da je c_k najlošiji ili da je c_k najbolji od ta tri tima (ovisno od toga koja od te dvije tvrdnje je tačna). Na taj način nikad neće otkriti Benjaminu koji od dva tima u svakom od 10 parova na tabeli je bolji. Na ostala pitanja može odgovarati kako želi.

Primijetimo sada da u bilo kojoj listi od 11 timova po Dirihleovom principu postoji $1 \leq i \leq 10$ tako da su izabrani c_{2i-1} i c_{2i}. Međutim, po Alisinoj strategiji, Benjamin nikako ne može saznati koji od ta dva tima je bolji, tako da ne može tih 11 timova sa sigurnošću poredati od najlošijeg do najboljeg. Ovim je dokaz završen.

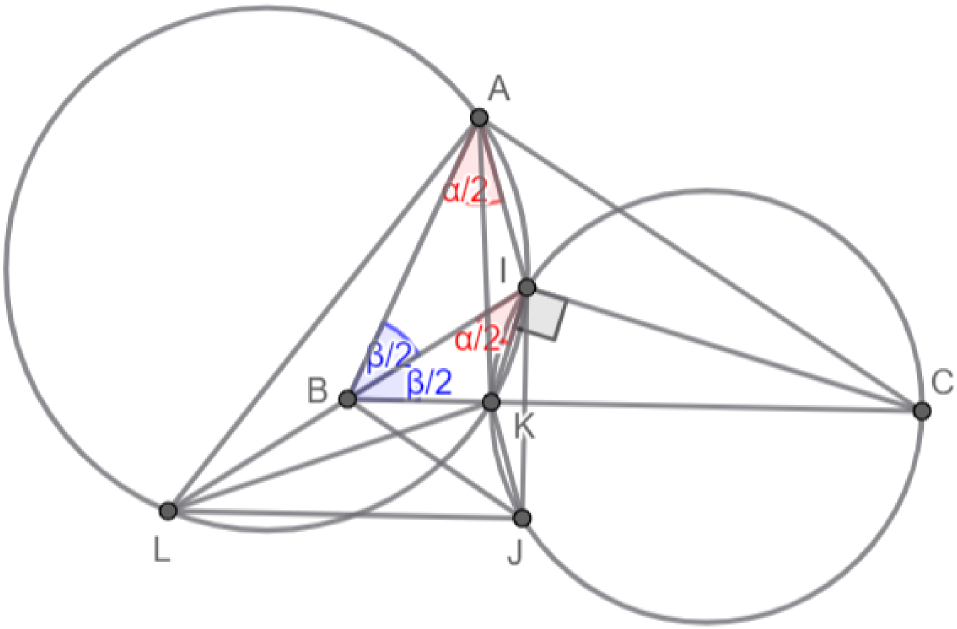
Šema bodovanja:

- Dokaz da je $N \geq 10$ .... **6 bodova**
  - Zaključak da Benjamin može saznati koji od dva tima je bolji ako oni nisu susjedni na tabeli .... **1 bod**
  - Zaključak da je svaki tim u najviše jednom problematičnom paru (pogledati rješenje za definiciju problematičnog para) .... **3 boda**
  - Zaključak da Benjamin može odabrati 10 traženih timova .... **2 boda**
- Dokaz da je $N \leq 10$ .... **4 boda**
  - Definisanje strategije u kojoj Alisa ne otkriva Benjaminu odnos dva susjedna tima sa tabele .... **2 boda**
  - Zaključak da Benjamin ne može poredati 11 timova .... **2 boda**

4. zadatak Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC, te neka je J tačka simetrična I u odnosu na pravu BC. Dalje, neka je K drugi presjek prave BC sa kružnicom opisanom oko trougla CIJ, a L drugi presjek prave BI sa kružnicom opisanom oko trougla AIK. Dokazati da su prave BC i JL paralelne.

Rješenje:

Neka su α, β, γ unutrašnji uglovi trougla ABC. Zbog simetrije je $\angle KIC = \angle KJC$, a kako su ovi uglovi suplementni (jer je četverougao $KJCI$ tetivni), to je $\angle KIC = \angle KJC = 90°$.



Sada je $\angle BIK = \angle BIC - \angle KIC = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} - 90° = \frac{\alpha}{2} = \angle BAI$. Kako je uz to i $\angle KBI = \angle ABI = \frac{\beta}{2}$, to su trouglovi BKI i ABI slični, odakle je

$$\frac{IK}{AI} = \frac{BI}{AB}.$$

Dalje, kako je $\angle LAK = \angle LIK = \frac{\alpha}{2} = \angle BAI$, to je $\angle LAB = \angle KAI$, što zajedno sa $\angle ALI = \angle AKI$ znači da su trouglovi ALB i AKI slični, odakle slijedi:

$$\frac{BL}{AB} = \frac{IK}{AI} = \frac{BI}{AB},$$

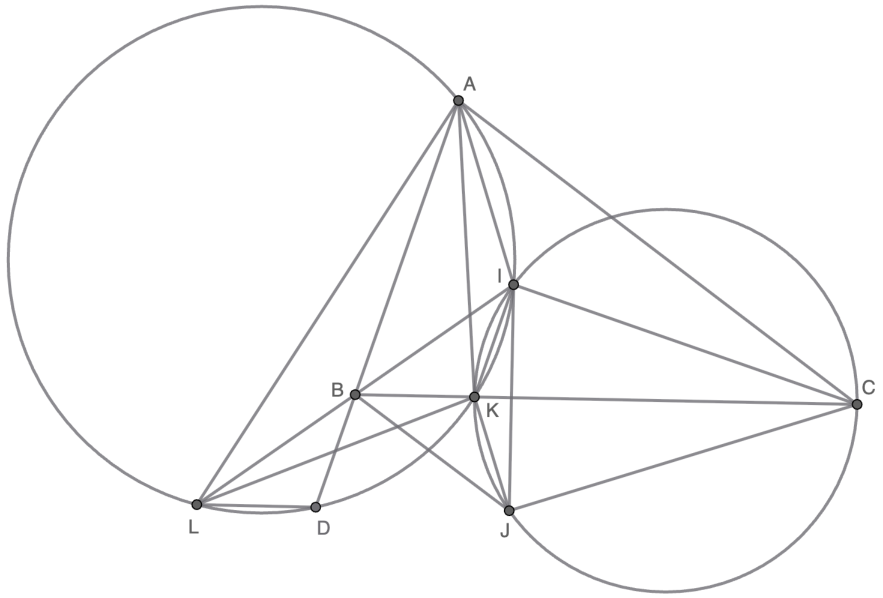
tj. $BL = BI$. Kako je prava BC simetrala duži IJ, to ona polovi i IJ i IL, pa je ona srednja linija trougla JLI, tj. vrijedi $JL||BC$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- dokaz da je $\angle KIC = 90°$ .... **1 bod**
- zaključak da je $\angle BIK = \frac{\alpha}{2}$ .... **1 bod**
- zaključak da su trouglovi BKI i BIA slični .... **1 bod**
- dobijanje jednakosti $\frac{IK}{AI} = \frac{BI}{AB}$ .... **1 bod**
- zaključak da su trouglovi ALB i AKI slični .... **1 bod**
- dobijanje jednakosti $\frac{BL}{AB} = \frac{IK}{AI}$ .... **1 bod**
- zaključak $BI = BL$ .... **2 boda**
- završetak dokaza .... **2 boda**
  - ∗ Ukoliko učenik zaključi da je dovoljno dokazati $BI = BL$, ali ne završi dokaz, dobija 1 od ova 2 boda

Rješenje 2 (rješenje učenice Sare Smajić):

Kao i u prvom rješenju pokazujemo da je $\angle BIK = \frac{\alpha}{2}$, pa je $\angle LAB = \angle KAI$.

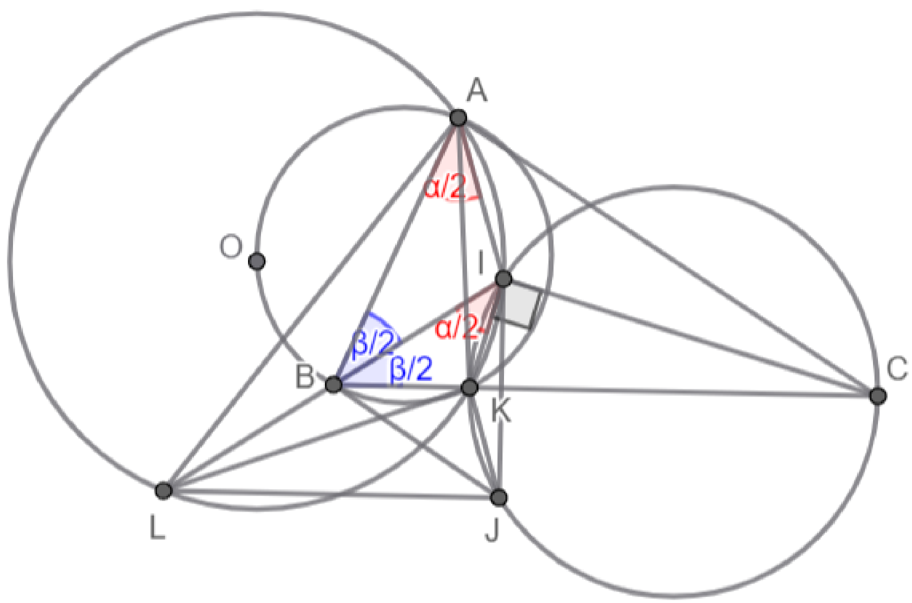


Neka je D drugi presjek prave AB sa kružnicom opisanom oko trougla AIK. Kako su nad tetivama DL i IK isti uglovi, to su te tetive jednake, odakle je i $\angle KLI = \angle LKD$, pa su prave DK i IL paralelne, tj. četverougao $LDKI$ je jednakokraki trapez.

Posmatrajmo sada trouglove LDB i BKI. Kako je $\angle LDB = \angle LDA = \angle LIA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \angle BKI$ i $\angle DLB = \angle BIK$, to su ovi trouglovi podudarni, odakle je $BL = BI$, te završavamo kao u prethodnom rješenju.

Rješenje 3 (rješenje učenika Abdullaha Fehratbegovića i Sergeja Petkovića):

Kao i u prvom rješenju pokazujemo da je $\angle BIK = \frac{\alpha}{2}$, pa je $\angle AIK = \angle AIB + \angle BIK = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \frac{\beta}{2}$.

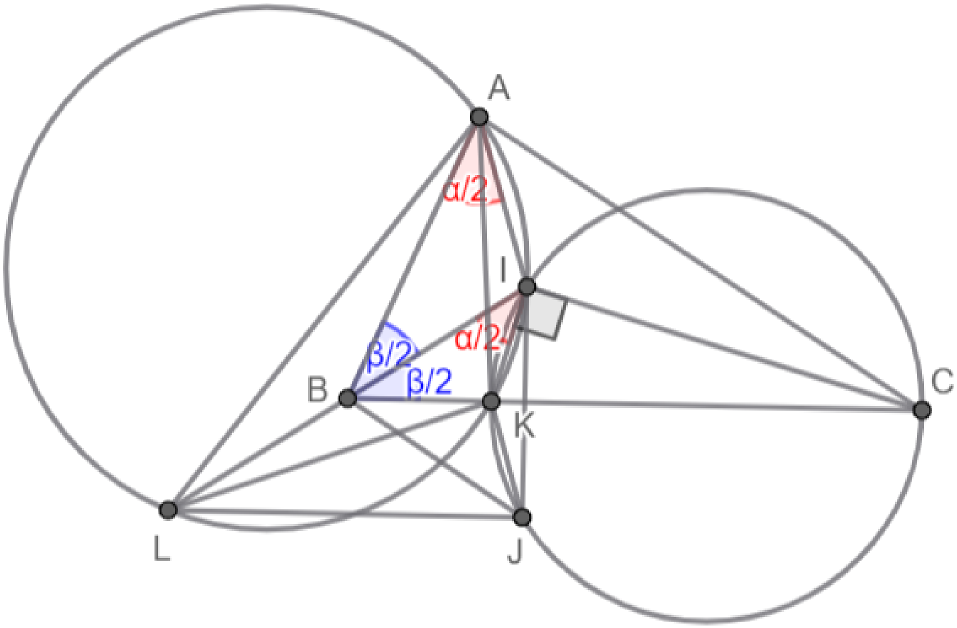


Neka je O centar kružnice opisane oko trougla AIK. Tada je $\angle AOK = 2 \cdot (180^\circ - \angle AIK) = \beta = \angle ABK$, pa tačke O, B, K, A pripadaju istoj kružnici. Kako je $OA = OK$, to je O sredina luka AK na kojem je i tačka B, pa je BO simetrala vanjskog ugla $\angle KBA$. Kako je BI simetrala unutrašnjeg ugla, to je $\angle OBI = 90^\circ$, te zbog $OI = OL$ zaključujemo $BI = BL$, te završavamo kao u prethodnim rješenjima.

Rješenje 4 (rješenje članice komisije Adise Bolić):

Opet ćemo dokazati da je $BI = BL$. Doboljno je dokazati da vrijedi $\frac{BI}{BA} = \frac{BL}{BA}$, odnosno primjenjujući sinusnu teoremu na trouglove BIA i BLA, dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\frac{\sin\angle BAI}{\sin\angle BIA} = \frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle ALB}.$$



S jedne strane je

$$\frac{\sin\angle BAI}{\sin\angle BIA} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

S druge strane, u prvom rješenju je dokazano da je $\angle LAB = \angle KAI$, pa je

$$\frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle ALB} = \frac{\sin\angle KAI}{\sin\angle AKI} = \frac{IK}{AI}.$$

Iz $\frac{IK}{IC} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ i $\frac{AI}{IC} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, dijeljenjem dobijamo $\frac{IK}{AI} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$, čime je dokaz završen.

5. zadatak Neka su a, b, c prirodni brojevi koji predstavljaju stranice trougla takvi da je $\mathrm{NZD}(a, b, c) = 1$ i vrijedi da su brojevi

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}, \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}, \frac{c^2+a^2-b^2}{c+a-b}$$

svi cijeli. Dokazati da je broj

$$W = (a+b-c) \cdot (b+c-a) \cdot (c+a-b)$$

oblika k^2 ili $2k^2$ za neki prirodan broj k.

Rješenje 1:

Iz $a+b-c \mid a^2+b^2-c^2$ dobijamo

$$a+b-c \mid (a+b-c)(a+b+c) - (a^2+b^2-c^2) = (a+b)^2 - c^2 - (a^2+b^2-c^2) = 2ab.$$

Međutim, onda vrijedi i

$$a+b-c \mid a^2+b^2-c^2-2ab = (a-b)^2 - c^2 = (a-b-c)(a-b+c),$$

pa vrijedi da prvi faktor iz W dijeli proizvod preostala dva faktora. Analogno se pokazuje da svaki faktor dijeli proizvod preostala dva faktora.

Pretpostavimo da postoji neparan prost broj p takav da p dijeli svaki od brojeva $a+b-c, b+c-a, c+a-b$. Tada

$$p \mid a+b-c+b+c-a = 2b,$$

pa kako je p neparan zaključujemo da $p \mid b$. Analogno dobijamo i $p \mid a$ i $p \mid c$, što je kontradikcija sa uslovom $\mathrm{NZD}(a, b, c) = 1$.

Posmatrajmo bilo koji neparan prost faktor p broja W. Na osnovu prethodno dokazanog, on mora dijeliti tačno dva od brojeva $a+b-c, b+c-a, c+a-b$. Neka bez umanjenja opštosti $p^\alpha \| b+c-a$ i $p^\beta \| c+a-b$ (notacija $p^n \| x$ znači da $p^n \mid x$ i $p^{n+1} \nmid x$).

Međutim, kako $b+c-a \mid (c+a-b)(a+b-c)$ i $p \nmid a+b-c$, vrijedi $\alpha \leq \beta$). Analogno dobijamo $\beta \leq \alpha$, pa vrijedi $\alpha = \beta$. To znači da $p^{2\alpha} \| W$). Kako ovo vrijedi za svaki neparan prost faktor broja W, te je broj W po uslovu zadatka prirodan, to je on ili kvadrat (ukoliko se u njemu nalazi paran broj dvica) ili dvostruki kvadrat (ukoliko se u njemu nalazi neparan broj dvica).

Šema bodovanja:

- dokaz da $a+b-c \mid 2ab$ (ili analogna djeljivost za preostale faktore) .... **1 bod**
- dokaz da svaki faktor dijeli proizvod preostala dva faktora .... **2 boda**
- dokaz da faktori ne mogu imati zajednički neparan prost djelioc .... **1 bod**
- dokaz da se svaki neparan prost faktor broja W pojavljuje u dvije zagrade sa jednakom potencijom .... **4 boda**
- završetak dokaza .... **2 boda**
  - $*$ Ukoliko učenik zaključi da je dovoljno dokazati da se svaki neparan prost broj pojavljuje paran broj puta u W, ali nema kompletan dokaz, dobija 1 od ova 2 boda

Rješenje 2:

Na isti način kao u prvom rješenju dobijamo da $a+b-c \mid 2ab$, $b+c-a \mid 2bc$ te $c+a-b \mid 2ca$. Također, na isti način dokazujemo da ne postoji neparan prost broj p koji dijeli sva tri data broja.

Pretpostavimo sada da neki neparan prost broj p dijeli $a+b-c$ i neka je k najveći stepen takav da $p^k|a+b-c$. Tada imamo i da $p^k|2ab$. Kako je p neparan, to $p^k|ab$. Ako bi imali da $p|a$ i $p|b$ onda bi iz $p|a+b-c$ slijedilo i da $p|c$, što je kontradikcija sa uslovom da je $NZD(a,b,c)=1$. Zaključujemo da $p^k|a$ ili $p^k|b$. Neka bez gubitka opštosti vrijedi $p^k|a$. Tada iz $p^k|a+b-c$ slijedi da $p^k|b-c$, pa zaključujemo da $p^k|c-b$, a samim tim i $p^k|a+c-b$. Iz činjenice da ne postoji neparan prost broj koji dijeli sva tri data broja, znamo da p ne dijeli $b+c-a$ (jer dijeli preostala dva broja). Ovo znači da je k ujedno i najveći stepen broja p koji dijeli $a+c-b$, jer kada bi $p^{k+1}|a+c-b$, onda bi analognim postupkom dobili da $p^{k+1}|a+b-c$, što je kontradikcija s tim da je k najveći stepena broja p u $a+b-c$.

Dakle, dokazali smo da ako p^k za neki neparan broj p i najveći stepen k dijeli neki od data tri broja, da onda dijeli još jedan od njih (sa istim stepenom k), a da to p ne dijeli treći broj. Ovo znači da se u proizvodu W svako p^k pojavljuje tačno dva puta, pa je neparni dio tog broja potpun kvadrat, pa je sam broj W oblika ili k^2 ili $2k^2$, zavisno od toga da li sadrži paran ili neparan broj dvica u sebi.

Šema bodovanja:

- dokaz da $a+b-c \mid 2ab$ (ili analogna djeljivost za preostale faktore) .... **1 bod**
- dokaz da faktori ne mogu imati zajednički neparan prost djelioc .... **1 bod**
- dokaz da ako za neparan prost broj p vrijedi $p \mid a+b-c$ onda p dijeli **tačno** jedan od preostala dva broja $b+c-a$ i $c+a-b$ .... **2 boda**
    - ∗ Bodovi se dodjeljuju i za analogne tvrdnje, npr. ako učenik pretpostavi da $p \mid b+c-a$ ili $p \mid c+a-b$ i dokaže da p onda dijeli tačno jedan od preostala dva broja
    - ∗ Ako učenik ne zaključi da isto p ne dijeli treći broj, dobija samo 1 od ova 2 boda
- zaključak da prethodna tvrdnja vrijedi i za p^k, gdje je k najveći stepen takav da $p^k|a+b-c$ .... **2 boda**
- zaključak da isti stepen broja p dijeli oba broja .... **3 boda**
- završetak dokaza .... **2 boda**
    - ∗ Ukoliko učenik zaključi da je dovoljno dokazati da se svaki neparan prost broj pojavljuje paran broj puta u W, ali nema kompletan dokaz, dobija 1 od ova 2 boda

E-mail: umks2016@gmail.com **Tel.:** ++ 387 33 279 874
Fax: ++ 387 33 649 342 **ID broj:** 4202191060004
Transakcijski račun: 1610000156600012

LXV. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
Federalno prvenstvo iz matematike učenika srednjih škola
5. aprila/travnja 2025.

IV razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

1. zadatak Za beskonačan niz pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vrijedi sljedeće:

i. za svaki prirodan broj k tročlani podniz $a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}$ je geometrijski;
ii. za svaki prirodan broj k tročlani podniz $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}$ je aritmetički.

Ako je $a_1 = x$ i $a_2 = y$, odrediti a_{2024} i a_{2025} u funkciji od x i y.

Rješenje:

Po uslovu zadatka imamo da za sve $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{2k+2} - a_{2k+1} = a_{2k+1} - a_{2k}$ i $\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}$, odnosno $a_{2k+2} = 2 \cdot a_{2k+1} - a_{2k}$ i $a_{2k+1} = \frac{a_{2k}^2}{a_{2k-1}}$. Neka je $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{y}{x}$. Kako a_1, a_2 i a_3 čine geometrijski niz, vrijedi $a_2 = q \cdot x$ i $a_3 = q^2 \cdot x$.

Dokažimo indukcijom po n da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijede relacije

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= ((n-1) \cdot q - (n-2))(n \cdot q - (n-1)) \cdot x \\
a_{2n+1} &= (n \cdot q - (n-1))^2 \cdot x
\end{aligned}$$

Za $n = 1$ ove relacije postaju $a_2 = q \cdot x$ i $a_3 = q^2 \cdot x$, što je tačno i predstavlja bazu indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo da vrijedi i za $n+1$. Imamo

$$\begin{aligned}
a_{2n+2} = 2 \cdot a_{2n+1} - a_{2n} &= 2 \cdot (n \cdot q - (n-1))^2 \cdot x - ((n-1) \cdot q - (n-2))(n \cdot q - (n-1)) \cdot x = \\
&= (n \cdot q - (n-1))(2 \cdot (n \cdot q - (n-1)) - ((n-1) \cdot q - (n-2)) \cdot x = \\
&= (n \cdot q - (n-1))((n+1) \cdot q - n) \cdot x,
\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}
a_{2n+3} = \frac{a_{2n+2}^2}{a_{2n+1}} &= \frac{((n \cdot q - (n-1))((n+1) \cdot q - n) \cdot x)^2}{(n \cdot q - (n-1))^2 \cdot x} = \\
&= \frac{(n \cdot q - (n-1))^2((n+1) \cdot q - n)^2 \cdot x^2}{(n \cdot q - (n-1))^2 \cdot x} = ((n+1) \cdot q - n)^2 \cdot x.
\end{aligned}$$

Ovim je indukcija završena.

Specijalno, za $n = 2024$ i $n = 2025$ imamo

$$\begin{aligned}
a_{2024} &= (1011 \cdot q - 1010)(1012 \cdot q - 1011) \cdot x = (1011 \cdot \frac{y}{x} - 1010)(1012 \cdot \frac{y}{x} - 1011) \cdot x \\
a_{2025} &= (1012 \cdot q - 1011)^2 \cdot x = (1012 \cdot \frac{y}{x} - 1011)^2 \cdot x.
\end{aligned}$$

Šema bodovanja:

- Relacije $a_2 = q \cdot x$ i $a_3 = q^2 \cdot x$ (ili ekvivalentne) .... **1 bod**
- Pravilna pretpostavka za opšti oblik članova a_{2n} i a_{2n+1} .... **4 boda**
  - ∗ Svaki od dva oblika nosi po 2 boda
- Baza indukcije .... **1 bod**
  - ∗ Potrebno je eksplicitno navesti koje relacije predstavljaju bazu indukcije, nije dovoljno samo da se te relacije nalaze zapisane negdje u radu
- Induktivni korak za a_{2n+2} .... **2 boda**
- Induktivni korak za a_{2n+3} .... **1 bod**
- Izražavanje a_{2024} i a_{2025} preko x i y .... **1 bod**

2. zadatak Neka je $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, tj. C je skup svih kompleksnih brojeva čiji je modul manji ili jednak 1. Dokazati da za bilo kojih 12 brojeva $z_1, z_2, \ldots, z_{12} \in C$ postoji 12 brojeva $e_1, e_2, \ldots, e_{12}$, od kojih je svaki jednak -1 ili 1, tako da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{12} |z_k + e_k| < 17.$$

Rješenje:

Posmatrajmo proizvoljan $z \in C$. Dokazat ćemo da vrijedi barem jedna od nejednakosti $|z-1| \leq \sqrt{2}$ i $|z+1| \leq \sqrt{2}$. Neka je $z = x + y \cdot i$, gdje su x i y realni brojevi za koje vrijedi $x^2 + y^2 \leq 1$ (zbog $|z| \leq 1$). Pretpostavimo suprotno, tj. da istovremeno vrijedi $|z-1| > \sqrt{2}$ i $|z+1| > \sqrt{2}$. Ovo je ekvivalentno sa $(x-1)^2 + y^2 > 2$ i $(x+1)^2 + y^2 > 2$, odnosno $x^2 - 2x + 1 + y^2 > 2$ i $x^2 + 2x + 1 + y^2 > 2$. Sabirajući posljednje dvije nejednakosti dobijamo $2x^2 + 2 + 2y^2 > 4$, odakle slijedi $x^2 + y^2 > 1$, što je kontradikcija.

Zaključujemo, za svaki $z \in C$ možemo odabrati $e \in \{-1, 1\}$ tako da je $|z+e| \leq \sqrt{2}$. Zato za brojeve $z_1, z_2, \ldots, z_{12} \in C$ možemo odabrati $e_1, e_2, \ldots e_{12}$ tako da je

$$\sum_{k=1}^{12} |z_k - e_k| \leq 12 \cdot \sqrt{2} < 17.$$

Posljednja nejednakost vrijedi jer je $(12 \cdot \sqrt{2})^2 = 288 < 289 = 17^2$. Ovim je dokaz završen.

Komentar: Geometrijski, skup C predstavlja jedinični krug s centrom u 0, a $|z-1|$ i $|z+1|$ su udaljenosti tačke z od tačaka 1 i -1, redom. Tvrdnja da za svaki $z \in C$ vrijedi barem jedna od nejednakosti $|z-1| \leq \sqrt{2}$ i $|z+1| \leq \sqrt{2}$ govori da se svaka tačka kruga C nalazi u barem jednom od krugova s centrima u 1 i -1 i poluprečnicima $\sqrt{2}$. Ukoliko nacrtamo kompleksnu ravan, lako možemo vidjeti da to jeste slučaj, jer navedeni krugovi u potpunosti pokrivaju krug C.

Šema bodovanja:

- Dokaz da za svaki $z \in C$ vrijedi $|z-1| < \frac{17}{12}$ ili $|z+1| < \frac{17}{12}$ .... **7 bodova**
  - Predstavljanje broja z u algebarskom, trigonometrijskom ili eksponencijalnom obliku i pravilno iskorištavanje uslova $|z| \leq 1$ .... **1 bod**
  - Pretpostavljanje suprotno tvrdnji .... **2 boda**
  - Privođenje dokaza kraju .... **4 boda**
- Privođenje dokaza kraju koristeći navedenu tvrdnju .... **3 boda**
  - ∗ Ukoliko učenik zaključi da je ova tvrdnja ekvivalentna datom zadatku (tj. da je potreban i dovoljan uslov), a ne dokaže je, i dalje dobija 3 boda

3. zadatak Alisa je gledala košarkaški turnir na kojem je učestvovalo 20 timova i ona zna krajnji poredak timova na tabeli, dok Benjamin nije gledao turnir i nema nikakve informacije o tabeli. Benjamin ima pravo da Alisi postavlja koliko god želi pitanja, ali je pravilo da u jednom pitanju Benjamin odabere bilo koja 3 tima i Alisa mu kaže ili koji od ta tri tima je bio najbolji među njima (najviše rangiran), ili koji je bio najlošiji (najniže rangiran). Pri tome Alisa bira koju od te dvije opcije će reći, i Benjamin zna da li mu je Alisa rekla najbolji ili najlošiji tim. Odrediti najveći prirodan broj N za kojeg Benjamin može garantovati da može odrediti N timova $T_1, T_2, ..., T_n$ i poredati ih od najlošijeg do najboljeg.

Rješenje:

Dokazat ćemo da je $N = 10$.

Za početak dokažimo da je $N \geq 10$, tj. da Benjamin može odabrati listu od 10 timova i sa sigurnošću ih poredati od najlošijeg do najboljeg. Nazovimo par timova t_x, t_y *problematičnim* ako Benjamin ne može nikako odrediti koji od ta dva tima je bolji. Primijetimo sada da svaki tim t_x može biti član samo jednog problematičnog para, jer inače, ako su t_x, t_y i t_x, t_z dva problematična para, Benjamin može Alisu pitati o ta tri tima. Neovisno od njenog odgovora, Benjamin će saznati ili odnos t_x, t_y ili t_x, t_z, što je kontradikcija.

Zaključujemo da možemo imati najviše 10 problematičnih parova. Pretpostavimo da Benjamin označi timove u problematičnim parovima sa $(a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_k, b_k)$, pri čemu je $k \leq 10$. Preostalim timovima (ako ih ima) nasumično daje preostala imena $a_{k+1}, b_{k+1}, a_{k+2}, b_{k+2}, ..., a_{10}, b_{10}$. Primijetimo sada da među timovima $a_1, a_2, ..., a_{10}$ nema problematičnih parova, pa ih Benjamin može poredati od najlošijeg do najboljeg, čime je tvrdnja dokazana.

Dokažimo sada još da je $N \leq 10$. Želimo da nađemo strategiju koja Alisi omogućava da Benjamin nikad ne može sa sigurnošću poredati 11 timova od najlošijeg do najboljeg. Pretpostavimo da su timovi na tabeli redom $c_1, c_2, ..., c_{20}$, gdje je c_1 najbolji, a c_{20} najlošiji tim.

Ako Benjamin pita Alisu pitanje koje uključuje dva tima na tabeli c_{2i-1} i c_{2i} za neko $1 \leq i \leq 10$ zajedno sa nekim timom c_k, onda Alisa treba da mu odgovori ili da je c_k najlošiji ili da je c_k najbolji od ta tri tima (ovisno od toga koja od te dvije tvrdnje je tačna). Na taj način nikad neće otkriti Benjaminu koji od dva tima u svakom od 10 parova na tabeli je bolji. Na ostala pitanja može odgovarati kako želi.

Primijetimo sada da u bilo kojoj listi od 11 timova po Dirihleovom principu postoji $1 \leq i \leq 10$ tako da su izabrani c_{2i-1} i c_{2i}. Međutim, po Alisinoj strategiji, Benjamin nikako ne može saznati koji od ta dva tima je bolji, tako da ne može tih 11 timova sa sigurnošću poredati od najlošijeg do najboljeg. Ovim je dokaz završen.

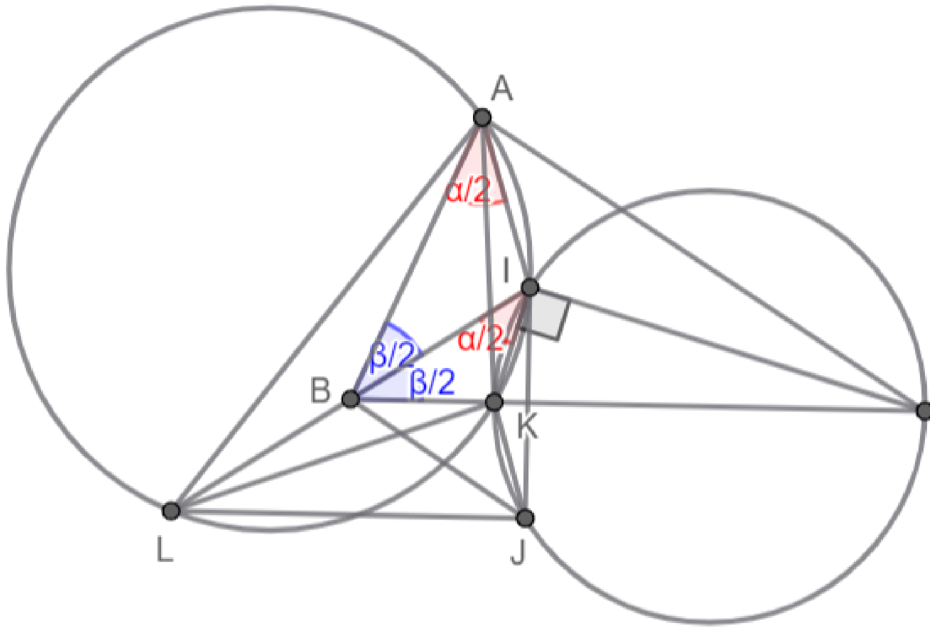
Šema bodovanja:

- Dokaz da je $N \geq 10$ .... **6 bodova**
  - Zaključak da Benjamin može saznati koji od dva tima je bolji ako oni nisu susjedni na tabeli .... **1 bod**
  - Zaključak da je svaki tim u najviše jednom problematičnom paru (pogledati rješenje za definiciju problematičnog para) .... **3 boda**
  - Zaključak da Benjamin može odabrati 10 traženih timova .... **2 boda**
- Dokaz da je $N \leq 10$ .... **4 boda**
  - Definisanje strategije u kojoj Alisa ne otkriva Benjaminu odnos dva susjedna tima sa tabele .... **2 boda**
  - Zaključak da Benjamin ne može poredati 11 timova .... **2 boda**

4. zadatak Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC, te neka je J tačka simetrična I u odnosu na pravu BC. Dalje, neka je K drugi presjek prave BC sa kružnicom opisanom oko trougla CIJ, a L drugi presjek prave BI sa kružnicom opisanom oko trougla AIK. Dokazati da su prave BC i JL paralelne.

Rješenje:

Neka su α, β, γ unutrašnji uglovi trougla ABC. Zbog simetrije je $\angle KIC = \angle KJC$, a kako su ovi uglovi suplementni (jer je četverougao $KJCI$ tetivni), to je $\angle KIC = \angle KJC = 90°$.



Sada je $\angle BIK = \angle BIC - \angle KIC = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} - 90° = \frac{\alpha}{2} = \angle BAI$. Kako je uz to i $\angle KBI = \angle ABI = \frac{\beta}{2}$, to su trouglovi BKI i ABI slični, odakle je

$$\frac{IK}{AI} = \frac{BI}{AB}.$$

Dalje, kako je $\angle LAK = \angle LIK = \frac{\alpha}{2} = \angle BAI$, to je $\angle LAB = \angle KAI$, što zajedno sa $\angle ALI = \angle AKI$ znači da su trouglovi ALB i AKI slični, odakle slijedi:

$$\frac{BL}{AB} = \frac{IK}{AI} = \frac{BI}{AB},$$

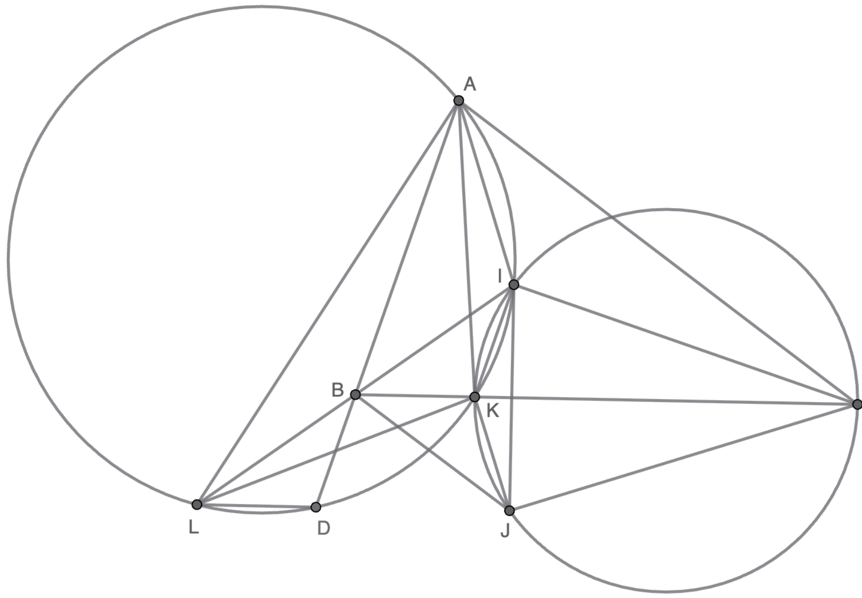
tj. $BL = BI$. Kako je prava BC simetrala duži IJ, to ona polovi i IJ i IL, pa je ona srednja linija trougla JLI, tj. vrijedi $JL || BC$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- dokaz da je $\angle KIC = 90°$ .... **1 bod**
- zaključak da je $\angle BIK = \frac{\alpha}{2}$ .... **1 bod**
- zaključak da su trouglovi BKI i BIA slični .... **1 bod**
- dobijanje jednakosti $\frac{IK}{AI} = \frac{BI}{AB}$ .... **1 bod**
- zaključak da su trouglovi ALB i AKI slični .... **1 bod**
- dobijanje jednakosti $\frac{BL}{AB} = \frac{IK}{AI}$ .... **1 bod**
- zaključak $BI = BL$ .... **2 boda**
- završetak dokaza .... **2 boda**
  - ∗ Ukoliko učenik zaključi da je dovoljno dokazati $BI = BL$, ali ne završi dokaz, dobija 1 od ova 2 boda

Rješenje 2 (rješenje učenice Sare Smajić):

Kao i u prvom rješenju pokazujemo da je $\angle BIK = \frac{\alpha}{2}$, pa je $\angle LAB = \angle KAI$.

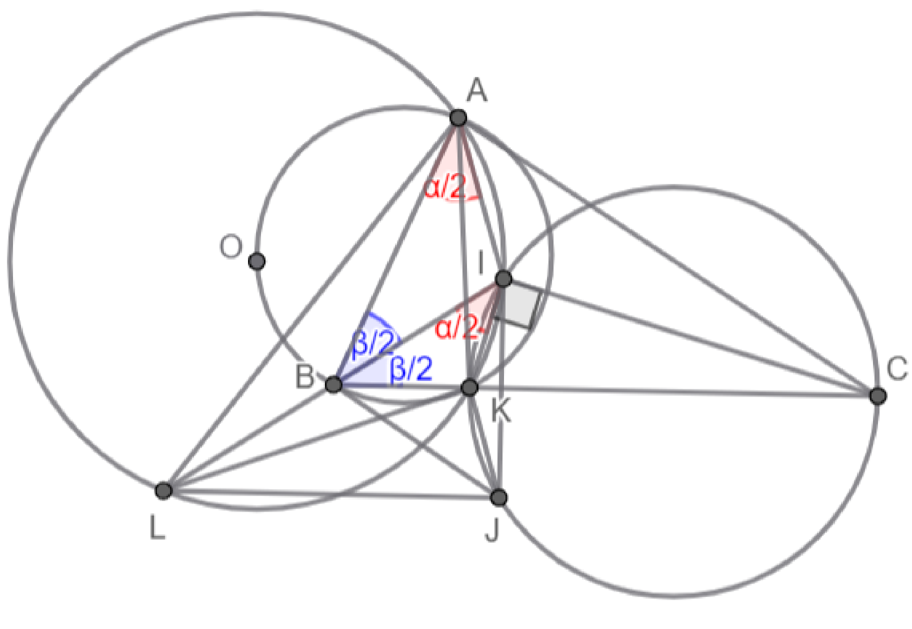


Neka je D drugi presjek prave AB sa kružnicom opisanom oko trougla AIK. Kako su nad tetivama DL i IK isti uglovi, to su te tetive jednake, odakle je i $\angle KLI = \angle LKD$, pa su prave DK i IL paralelne, tj. četverougao $LDKI$ je jednakokraki trapez.

Posmatrajmo sada trouglove LDB i BKI. Kako je $\angle LDB = \angle LDA = \angle LIA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \angle BKI$ i $\angle DLB = \angle BIK$, to su ovi trouglovi podudarni, odakle je $BL = BI$, te završavamo kao u prethodnom rješenju.

Rješenje 3 (rješenje učenika Abdullaha Fehratbegovića i Sergeja Petkovića):

Kao i u prvom rješenju pokazujemo da je $\angle BIK = \frac{\alpha}{2}$, pa je $\angle AIK = \angle AIB + \angle BIK = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \frac{\beta}{2}$.

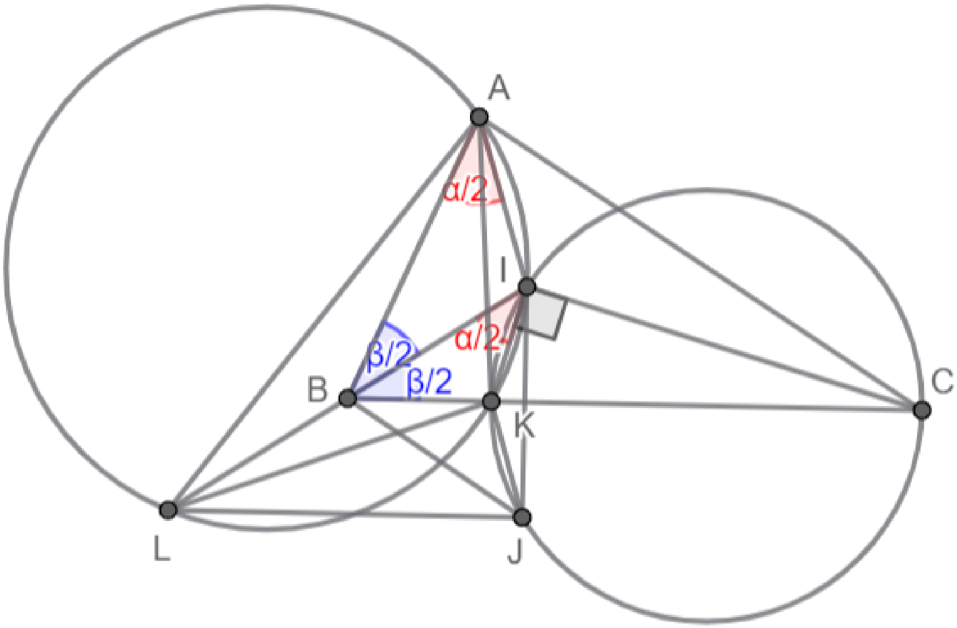


Neka je O centar kružnice opisane oko trougla AIK. Tada je $\angle AOK = 2 \cdot (180^\circ - \angle AIK) = \beta = \angle ABK$, pa tačke O, B, K, A pripadaju istoj kružnici. Kako je $OA = OK$, to je O sredina luka AK na kojem je i tačka B, pa je BO simetrala vanjskog ugla $\angle KBA$. Kako je BI simetrala unutrašnjeg ugla, to je $\angle OBI = 90^\circ$, te zbog $OI = OL$ zaključujemo $BI = BL$, te završavamo kao u prethodnim rješenjima.

Rješenje 4 (rješenje članice komisije Adise Bolić):

Opet ćemo dokazati da je $BI = BL$. Doboljno je dokazati da vrijedi $\frac{BI}{BA} = \frac{BL}{BA}$, odnosno primjenjujući sinusnu teoremu na trouglove BIA i BLA, dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\frac{\sin\angle BAI}{\sin\angle BIA} = \frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle ALB}.$$



S jedne strane je

$$\frac{\sin\angle BAI}{\sin\angle BIA} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

S druge strane, u prvom rješenju je dokazano da je $\angle LAB = \angle KAI$, pa je

$$\frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle ALB} = \frac{\sin\angle KAI}{\sin\angle AKI} = \frac{IK}{AI}.$$

Iz $\frac{IK}{IC} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$ i $\frac{AI}{IC} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, dijeljenjem dobijamo $\frac{IK}{AI} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$, čime je dokaz završen.

5. zadatak Za podskup S skupa $\{0,1,2,\dots,98\}$ kažemo da je *interesantan* ako za svaka dva (ne nužno različita) elementa $x,y\in S$ postoji element $z\in S$ (ne nužno različit od x i y) takav da je $x+y\equiv 2z \pmod{99}$. Odrediti sve mogućnosti za broj elemenata interesantnog podskupa.

Rješenje:

Mogućnosti za traženi broj elemenata su svi djelioci broja 99.

Pokažimo najprije da, ako $k\mid 99$, postoji interesantan skup sa k elemenata. Neka je $t=\frac{99}{k}$. Tada je skup $S=\{0,k,2k,\dots,(t-1)k\}$ interesantan. Naime, neka su $x=a\cdot k$ i $y=b\cdot k$ proizvoljni elementi ovog skupa, pri čemu vrijedi $a,b\in\{0,1,2,\dots,t-1\}$. Potrebno je naći element $z=c\cdot k$ takav da je $x+y\equiv 2z \pmod{99}$, pri čemu je $c\in\{0,1,2,\dots,t-1\}$. Kako je $99=t\cdot k$, posljednja kongruencija je ekvivalentna sa $a+b=2c \pmod{t}$. Ovakav broj c postoji jer je t relativno prost s 2 (jer $t\mid 99$), pa skup $\{2c\mid c\in\{0,1,2,\dots,t-1\}\}$ čini potpun sistem ostataka po modulu t.

Dokažimo sada da ne postoji interesantan skup sa k elemenata ako $k\nmid 99$. Pretpostavimo suprotno, neka $k\nmid 99$ i neka je $S=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ interesantan skup. Tada postoje $y_1,y_2,\dots,y_{k-1}\in S$ takvi da za svako $i\in\{1,2,\dots,k-1\}$ vrijedi $x_k+x_i\equiv 2y_i \pmod{99}$. Kako su $x_1,x_2,\dots,x_k$ različiti po modulu 99, to su i $y_1,y_2,\dots,y_{k-1}$ različiti po modulu 99. Pretpostavimo da je $y_i\equiv x_k \pmod{99}$ za neki indeks i. Tada iz $x_k+x_i\equiv 2y_i \pmod{99}$ slijedi $x_i\equiv y_i\equiv x_k \pmod{99}$, što je kontradikcija jer su x_k i x_i različiti elementi skupa S.

Dakle, $y_1,y_2,\dots,y_{k-1}$ su elementi skupa S koji su međusobno različiti i različiti od x_k, pa je $(y_1,y_2,\dots,y_{k-1})$ permutacija od $(x_1,x_2,\dots,x_{k-1})$. Specijalno, vrijedi $x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}=y_1+y_2+\ldots+y_{k-1}$. Sabirajući relacije $x_k+x_i\equiv 2y_i \pmod{99}$ za sve i dobijamo

$$\begin{gathered}(k-1)x_k+x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}\equiv 2\cdot(y_1+y_2+\ldots+y_{k-1}) \pmod{99} \Leftrightarrow\\ (k-1)x_k\equiv x_1+x_2+\ldots+x_{k-1} \pmod{99} \Leftrightarrow\\ k\cdot x_k\equiv x_1+x_2+\ldots+x_k \pmod{99}.\end{gathered}$$

Analogno možemo za sve $i\in\{1,2,\dots,k\}$ dobiti $k\cdot x_i\equiv x_1+x_2+\ldots+x_k \pmod{99}$, pa vrijedi $k\cdot x_1\equiv k\cdot x_2\equiv\ldots\equiv k\cdot x_k \pmod{99}$.

Neka je $d=\text{nzd}(k,99)$, te $k=d\cdot t$ i $99=d\cdot s$. Zbog $k\nmid 99$ je $t>1$, odnosno $k>d$. Iz $k\cdot x_1\equiv k\cdot x_2\equiv\ldots\equiv k\cdot x_k \pmod{99}$ slijedi $x_1\equiv x_2\equiv\ldots\equiv x_k \pmod{s}$. Dakle, brojevi $x_1,x_2,\ldots x_k$ su isti po modulu s, a različiti po modulu $99=d\cdot s$. Ovo je nemoguće jer je $k>d$.

Šema bodovanja:

- Dokaz da postoji intersantan skup sa k elemenata ako $k\mid 99$ .... **3 boda**
  - Posmatranje skupa $S=\{0,k,2k,\dots,(t-1)k\}$ .... **2 boda**
  - Dokaz da je ovaj skup interesantan .... **1 bod**
- Dokaz da ne postoji interesantan skup sa k elemenata ako $k\nmid 99$ .... **7 bodova**
  - Posmatranje relacija oblika $x_k+x_i\equiv 2y_i \pmod{99}$ .... **1 bod**
  - Dokaz da je $(y_1,y_2,\dots,y_{k-1})$ permutacija od $(x_1,x_2,\dots,x_{k-1})$ .... **1 bod**
  - Zaključak $k\cdot x_k\equiv x_1+x_2+\ldots+x_k \pmod{99}$ .... **2 boda**
  - Zaključak $k\cdot x_1\equiv k\cdot x_2\equiv\ldots\equiv k\cdot x_k \pmod{99}$ .... **2 boda**
  - Privođenje dokaza kraju .... **1 boda**

Rezultati učenika I razreda

Plasman	Ime i prezime	Škola	Mjesto	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Σ
1	Harun Memić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	10	4	10	44
VK	Tarik Odžak	OŠ "Grbavica I"	Sarajevo	10	10	10	10	4	44
VK	Faris Šabeta	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	Sarajevo	10	10	10	7	2	39
VK	Dino Ahić	OŠ "Safvet-beg Bašagić"	Visoko	10	10	10	4	1	35
2	Abdurahman Fehratbegović	JU Gimnazija Dobrinja	Sarajevo	10	10	6	0	0	26
3	Davud Palić	Prva bošnjačka gimnazija	Sarajevo	10	10	0	4	0	24
4	Tarik Omanović	MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko	Visoko	10	10	0	3	0	23
4	Hana Memić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	2	0	1	23
6	Faruk Kunić	JU Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	Tuzla	10	10	0	2	0	22
7	Fatima Čolan	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	1	10	0	0	21
7	Suad Mumić	JU Behram - begova medresa Tuzla	Tuzla	10	10	0	0	1	21
9	Ajla Krdžić	JU Gazi Husrev-begova medresa u Sarajevu	Sarajevo	10	10	0	0	0	20
9	Emin Džambegović	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	0	0	0	20
11	Eldar Hodžić	Richmond Park International Secondary School Tuzla	Tuzla	4	10	0	5	0	19
12	Max Dedić	JU Treća gimnazija Sarajevo	Sarajevo	4	10	0	3	0	17
13	Dženan Jašarspahić	Gimnazija "Mushin Rizvić" Kakanj	Kakanj	10	0	4	0	0	14
14	Adem Agić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	1	2	0	0	13
15	Adin Čorić	Prva gimnazija u Zenici	Zenica	2	10	0	0	0	12
16	Almir Hadžović	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	1	0	0	0	11
16	Selim Čengić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	1	0	0	0	11
16	Mehmedalija Šibonjić	JU Gimnazija ˝Mustafa Novalić˝ Gradačac	Gradačac	10	1	0	0	0	11
16	Emrah Nišić	JU Mješovita srednja elektrotehnička škola Tuzla	Tuzla	10	1	0	0	0	11
16	Ajdin Bešić	PU Richmond Park College	Bihać	9	1	0	0	1	11
16	Hana Ćufurović	PU Richmond Park College	Bihać	1	10	0	0	0	11
22	Laila Kević	Gimnazija Mostar	Mostar	10	0	0	0	0	10
22	Adi Bojić	Gimnazija “Meša Selimović”	Tuzla	10	0	0	0	0	10
22	Faris Bašić	Medicinska škola Zenica	Zenica	10	0	0	0	0	10
22	Nejla Tukić	Gimnazija "Musa Ćazim Ćatić" Tešanj	Tešanj	9	1	0	0	0	10
26	Hadi Ćurtović	JU Mješovita srednja elektrotehnička škola Tuzla	Tuzla	1	5	0	0	0	6
27	Faruk Smailagić	Gimnazija"Visoko"	Visoko	4	1	0	0	0	5
28	Ajla Rašidagić	Richmond Park International Secondary School	Sarajevo	1	2	0	0	1	4
29	Ahmed Dragolj	STŠ Hasib Hadžović	Goražde	3	0	0	0	0	3
30	Nejla Džambo	Mješovita srednja škola "Gornji Vakuf"	Gornji Vakuf	1	1	0	0	0	2
30	Emir Felić	JU "Mješovita elektrotehnička i drvoprerađivačka srednja škola" Bihać	Bihać	1	1	0	0	0	2
30	Ismail Duranović	Mješovita srednja škola "Travnik"	Travnik	1	1	0	0	0	2
33	Selma Deljo	MSŠ "Enver Pozderović"	Goražde	0	1	0	0	0	1
33	Larisa Masleša	JU Srednja škola Konjic	Konjic	0	1	0	0	0	1
33	Nora Halvadžija	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	0	1	0	0	0	1
33	Vedad Jusufspahić	Srednja tehnička škola Bugojno	Bugojno	1	0	0	0	0	1
37	Ajla Abaza	JU Druga gimnazija Mostar	Mostar	0	0	0	0	0	0
37	Harun Salčinović	JU Tehnicka skola Zenica	Zenica	0	0	0	0	0	0

Učenici Harun Memić, Tarik Odžak, Faris Šabeta i Dino Ahić su ostvarili plasman na Matematičku olimpijadu BiH.

Napomena: Učenici devetog razreda Tarik Odžak, Faris Šabeta i Dino Ahić su predstavljali BiH na Juniorskoj balkanskoj matematičkoj olimpijadi 2024, čime su stekli pravo da se takmiče van konkurencije na federalnom takmičenju učenika prvih razreda, ali sa mogućnošću prolaska na Matematičku olimpijadu BiH.

Rezultati učenika II razreda

Plasman	Ime i prezime	Škola	Mjesto	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Σ
1	Adnan Osmić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	10	10	10	50
2	Nermin Malićević	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	0	2	8	30
3	Ajla Ćuprija	JU Treća gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	6	0	10	3	29
4	Tarik Dacić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	0	4	0	24
4	Emir Tuzlak	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	4	10	0	0	24
4	Iman Kurtović	JU Mješovita srednja elektrotehnička škola Tuzla	Tuzla	10	10	0	3	1	24
7	Uma Senta	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	8	5	0	10	0	23
8	Ismar Aljukić	JU Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	Tuzla	10	7	3	0	1	21
9	Anel Salibašić	JU Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	Tuzla	10	8	0	1	0	19
9	Faris Valjevac	MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko	Visoko	10	9	0	0	0	19
11	Selma Mujačić	Gimnazija „Meša Selimović“	Tuzla	10	8	0	0	0	18
12	Abdullah Muslić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	6	1	0	0	17
13	Nedžla Demirović	JU Treća gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	6	0	0	0	16
14	Mirza Hajduk	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	5	0	0	0	15
14	Delila Bošnjaković	JU Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	Tuzla	9	6	0	0	0	15
14	Amer Moštro	Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj	Kakanj	10	4	0	1	0	15
17	Tarik Melunović	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	4	0	0	0	14
18	Amir Plivčić	MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko	Visoko	10	3	0	0	0	13
19	Ahmed Čengić	SŠC "Nedžad Ibrišimović" Ilijaš	Breza	10	1	0	0	0	11
19	Malik Agić	Tehnička škola Zenica	Zenica	10	1	0	0	0	11
19	Lana Žepić	JU Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	Tuzla	1	10	0	0	0	11
22	Abdulkerim Kurgaš	Gimnazija "Visoko" Visoko	Visoko	8	2	0	0	0	10
22	Edi Lukić	Gimnazija "Dobrinja" Sarajevo	Sarajevo	10	0	0	0	0	10
24	Jovana Banjac	JU Mješovita srednja škola Bosanski Petrovac	Bosanski Petrovac	1	6	0	0	0	7
25	Malik Hodžić	JU Gimnazija “Mustafa Novalić” Gradačac	Gradačac	1	4	0	0	0	5
25	Adin Mehić	JU Gimnazija “Mustafa Novalić” Gradačac	Gradačac	1	4	0	0	0	5
27	Samedina Škrebo	JU Gimnazija”Dr. Mustafa Kamarić”	Gračanica	1	1	1	0	0	3
28	Faruk Šošo	STŠ Hasib Hadžović	Goražde	1	1	0	0	0	2
28	Lamija Jazvin	JU Srednja škola Konjic	Konjic	1	1	0	0	0	2
28	Mirza Bušatlić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	1	1	0	0	0	2
31	Šejma Šabanagić	JU Druga gimnazija Mostar	Mostar	1	0	0	0	0	1
31	Emina Šabić	Srednja tehnička škola Bugojno	Bugojno	1	0	0	0	0	1
31	Samina Borić	JU Srednja škola Konjic	Konjic	0	0	0	0	1	1
31	Emina Hasanbegović	JU "Gimnazija" Sanski Most	Sanski Most	1	0	0	0	0	1
31	Hana Jušić	JU "I srednja škola" Cazin	Cazin	1	0	0	0	0	1
31	Ishak Klopic	Richmond Park Medunarodna Skola Tuzla	Tuzla	1	0	0	0	0	1
37	Anel Adilović	STŠ Hasib Hadžović	Goražde	0	0	0	0	0	0

Učenici Adnan Osmić, Nermin Malićević, Ajla Ćuprija, Tarik Dacić, Emir Tuzlak, Iman Kurtović i Uma Senta su ostvarili plasman na Matematičku olimpijadu BiH.

Rezultati učenika III razreda

Plasman	Ime i prezime	Škola	Mjesto	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Σ
VK	Sergej Petković	Matematička gimnazija u Beogradu	Bijeljina	10	9	10	10	7	46
1	Amila Pašić	JU Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	Tuzla	10	9	10	2	10	41
2	Faruk Demirović	JU Peta gimnazija	Sarajevo	10	9	10	3	1	33
VK	Danis Begović	New Hall School	Sarajevo	10	10	6	1	0	27
3	Nedžma Durović	JU Gazi Husrev-begova medresa u Sarajevu	Sarajevo	10	10	0	4	1	25
4	Aron Arslan	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	5	9	0	0	24
5	Faruk Džinić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	0	0	0	20
5	Lamija Hadžić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	0	0	0	20
5	Ruoyi (Gloria) TANG	UWC Mostar	Mostar	10	0	0	10	0	20
9	Asad Šabaredžović	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	9	2	0	1	0	12
9	Danis Džaferagić	JU Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	Tuzla	10	1	0	0	1	12
11	Farah Demirović	JU Peta gimnazija	Sarajevo	10	0	0	0	1	11
11	Emir Salčinović	JU Treća gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	0	1	0	0	11
13	Mustafa Vrabac	JU Druga gimnazija Sarajevo	Ilijaš	10	0	0	0	0	10
13	Minela Gasal	Mješovita srednja škola "Travnik"	Travnik	10	0	0	0	0	10
13	Lamija Ramić	JU "Gimnazija" Cazin	Cazin	10	0	0	0	0	10
13	Nejra Aščalić	JU MSŠ "Hazim Šabanović"	Visoko	10	0	0	0	0	10
13	Mustafa Parić	Srednja tehnička škola Zavidovići	Zavidovići	10	0	0	0	0	10
13	Ali Kulagić	Gimnazija "Muhsin Rizvić" Breza	Breza	10	0	0	0	0	10
13	Vedad Čišija	Gimnazija "Visoko" Visoko	Visoko	10	0	0	0	0	10
13	Nađa Trešnjo	JU Srednja škola Konjic	Konjic	10	0	0	0	0	10
13	Adnan Hajdić	JU Gimnazija „Mustafa Kamarić“ Gračanica	Gračanica	10	0	0	0	0	10
13	Tarik Arifhodžić	JU Gimnazija „Meša Selimović“ Tuzla	Tuzla	10	0	0	0	0	10
23	Tarik Ramić	JU "Gimnazija" Cazin	Cazin	8	0	0	0	1	9
23	Adi Sudžuka	Gimnazija "Visoko" Visoko	Visoko	9	0	0	0	0	9
25	Alma Kajmaković	Mješovita srednja škola "Travnik"	Travnik	7	0	0	0	0	7
25	Emina Gabeljić	Mješovita srednja škola Banovići	Banovići	7	0	0	0	0	7
27	Adnan Terzić	JU Treća gimnazija Sarajevo	Sarajevo	3	0	1	0	1	5
28	Harisa Nazdraić	JU Druga gimnazija Mostar	Mostar	3	0	0	0	0	3
28	Faris Čilaš	Srednja mješovita škola "Zijah Dizdarević" Fojnica	Fojnica	3	0	0	0	0	3
28	Adnan Halilović	JU Gimnazija Živinice	Živinice	2	0	0	1	0	3
31	Emir Avdić	JU Gimnazija „Mustafa Kamarić“ Gračanica	Gračanica	2	0	0	0	0	2
32	Harun Lapo	JU Srednja škola Konjic	Konjic	0	0	0	0	0	0
32	Amina Hodžić	MSŠ Živinice	Živinice	0	0	0	0	0	0
32	Admir Kadić	JU MSŠ ,,Hasan Kikić” Gradačac	Gradačac	0	0	0	0	0	0
32	Ajna Merdanović	Gimnazija "Rizah Odžečkić" Zavidovići	Zavidovići	0	0	0	0	0	0

Učenici Sergej Petković, Amila Pašić, Faruk Demirović, Danis Begović, Nedžma Durović i Aron Arslan su ostvarili plasman na Matematičku olimpijadu BiH (MOBiH).

Napomena: Učenici Sergej Petković i Danis Begović ne pohađaju školu u Bosni i Hercegovini, ali imaju pravo nastupa na međunarodnim takmičenjima za BiH. S obzirom da su izrazili želju da predstavljaju BiH, a da su ranije ostvarivali vrhunske rezultate, omogućeno im je da se takmiče van konkurencije, ali sa mogućnošću prolaska na MOBiH.

Rezultati učenika IV razreda

Plasman	Ime i prezime	Škola	Mjesto	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Σ
1	Benjamin Mujkić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	10	10	10	50
2	Abdullah Fehratbegović	JU Gimnazija Dobrinja	Sarajevo	10	10	3	10	0	33
3	Sara Smajić	Richmond Park International Secondary School	Sarajevo	7	0	10	10	0	27
4	Tarik Ramić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	0	0	0	20
5	Isa Švrakić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	1	10	8	0	0	19
6	Kerim Fetić	Prva gimnazija u Zenici	Zenica	7	9	0	0	0	16
7	Ines Jozić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	1	0	4	0	15
8	Afan Isaković	Treća gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	1	1	0	0	12
9	Merjem Mešan	Srednja tehnička škola Bugojno	Bugojno	10	0	0	0	0	10
9	Muhamed Numanović	Richmond Park International Secondary School Tuzla	Tuzla	1	9	0	0	0	10
11	Tarik Hasanbegović	JU "Gimnazija" Sanski Most	Sanski Most	6	1	0	0	0	7
12	Faris Dinarević	Richmond Park International Secondary School Tuzla	Tuzla	1	5	0	0	0	6
13	Adem Kunovac	STŠ Hasib Hadžović Goražde	Goražde	1	3	0	0	0	4
13	Senada Zaketović	Richmond Park International Secondary School Tuzla	Tuzla	1	1	0	2	0	4
13	Lejla Baturić	JU Behram - begova medresa Tuzla	Tuzla	1	3	0	0	0	4
13	Faris Omanović	MSŠ "Hazim Šabanović"	Visoko	1	3	0	0	0	4
13	Ilhana Kvakić	Gimanzija "Visoko"	Visoko	1	2	0	1	0	4
18	Lamija Sabitović	JU Srednja škola Jablanica	Jablanica	1	2	0	0	0	3
18	Alma Harbaš	JU Gimnazija "Bihać"	Bihać	1	2	0	0	0	3
18	Emina Bjelić	Gimnazija "Rizah Odžečkić" Zavidovići	Zavidovići	3	0	0	0	0	3
18	Amela Smolo	Gimnazija "Visoko" Visoko	Visoko	1	1	0	1	0	3
22	Sara Omerbašić	MSŠ "Enver Pozderović"	Goražde	1	1	0	0	0	2
22	Amila Alibašić	JU Gimnazija Velika Kladuša	Velika Kladuša	1	1	0	0	0	2
24	Amar Čengić	MSŠ "Enver Pozderović"	Goražde	1	0	0	0	0	1
24	Faris Suljić	JU Srednja škola Konjic	Konjic	1	0	0	0	0	1
24	Fatih Efe Memišević	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	1	0	0	0	0	1
24	Nejla Mameledžija	Mješovita srednja škola "Travnik"	Travnik	1	0	0	0	0	1
24	Said Semić	Mješovita srednja škola "Gornji Vakuf"	Gornji Vakuf	1	0	0	0	0	1
24	Iman Omić	Gimnazija Sanski Most	Sanski Most	1	0	0	0	0	1
24	Faruk Ramić	JU "Gimnazija" Cazin	Cazin	1	0	0	0	0	1
24	Dominik Tomić	JU "Mješovita elektrotehnička i drvnoprerađivačka srednja škola " Bihać	Bihać	1	0	0	0	0	1
24	Elmin Botić	MSŠ "Hazim Šabanović"	Visoko	1	0	0	0	0	1
24	Emin Buza	Gimnazija "Visoko" Visoko	Visoko	1	0	0	0	0	1
34	Adnan Šehanović	Richmond Park Secondary School Tuzla	Tuzla	0	0	0	0	0	0

Učenici Benjamin Mujkić, Abdullah Fehratbegović, Sara Smajić, Tarik Ramić i Isa Švrakić su ostvarili plasman na Matematičku olimpijadu Bosne i Hercegovine.