Općinsko takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Kantona Sarajevo

11. 3. 2025.

Z A D A C I

VI razred

1. zadatak Neka je $A=\{1,2,4,6,7,8,9\}$ i $B=\{2,3,4,5,7,8\}$.

a) Odrediti $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

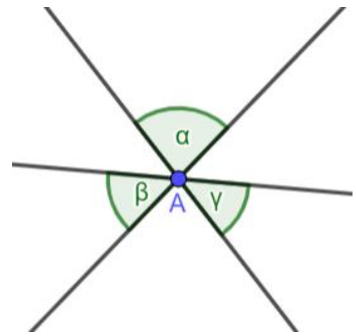
b) Odrediti skup X za koji vrijedi $X\cap A=\{1,2,8\}$ i $X\cup(A\cap B)=\{1,2,4,5,7,8,10\}$. Obavezno obrazložiti kako ste zaključili koji elementi pripadaju X, a koji ne pripadaju.

2. zadatak

a) Odrediti sve četverocifrene brojeve oblika $\overline{2a2b}$ koji su djeljivi sa 45. Odgovor obrazložiti!

b) Odrediti najveći četverocifreni broj koji pri dijeljenju sa 45 daje ostatak 19. Odgovor obrazložiti!

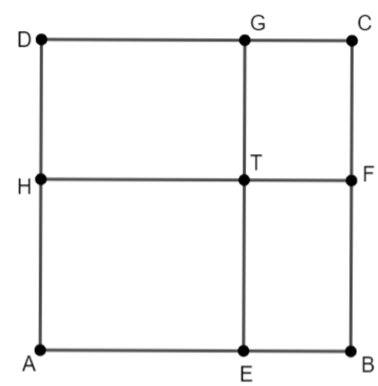
3. zadatak Tri prave se sijeku u tački A, kao na slici. Ako je ugao β za $9°$ veći od ugla γ, a ugao α je za $12°$ manji od zbira uglova β i γ, odrediti uglove α,β i γ.



Napomena: Slika služi samo u ilustrativne svrhe, nije za mjerenje.

4. zadatak Nora je pri dijeljenju prirodnog broja n sa 19 dobila neki količnik i ostatak 11. Kada je zatim broj n podijelila sa 17, dobila je ostatak 2, dok je količnik bio za 13 veći nego prilikom prvog dijeljenja. Odrediti broj n.

5. zadatak Kvadrat $ABCD$ stranice $48\ cm$ podijeljen je na četiri pravougaonika (kao na slici). Obim pravougaonika $HTGD$ je dvostruko veći od obima pravougaonika $EBFT$, dok je obim pravougaonika $AETH$ tri puta veći od obima pravougaonika $TFCG$. Odrediti površine pravougaonika $HTGD, EBFT, AETH, TFCG$.



Napomena: Slika služi samo u ilustrativne svrhe, nije za mjerenje.

Vrijeme za izradu zadataka iznosi 150 minuta! Za izradu zadataka nije dozvoljeno koristiti kalkulator, već samo geometrijski pribor!

Kanton Sarajevo
OPĆINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
11. 3. 2025.

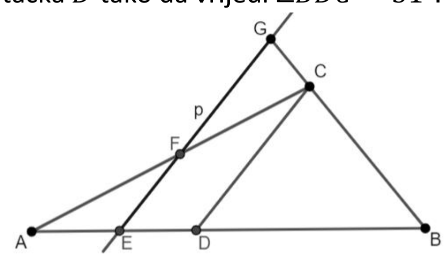
VII razred

1. Izračunati vrijednost izraza

$$\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1}+1}\cdot 8\right):3\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{2025}.$$

2. Nora je pročitala knjigu za 4 dana. Prvog dana je pročitala $\frac{1}{3}$ knjige, drugog dana $\frac{6}{11}$ ostatka knjige, trećeg dana je pročitala $\frac{7}{23}$ od onog što je pročitala prvog i drugog dana zajedno, a četvrtog dana je pročitala preostalih 12 stranica. Koliko je stranica imala ta knjiga?

3. U trouglu ΔABC vrijedi $\angle BAC = 27^\circ$. Na stranici $\overline{AB}$ je data tačka D tako da vrijedi $\angle BDC = 51°$. Povučena je prava p paralelna sa CD, te ona siječe pravu AB u tački E, pravu AC u tački F, a pravu BC u tački G.
   a) Odrediti veličinu ugla $\angle CFG$.
   b) Ako je $\angle BGE = 78°, \overline{BG} = 8\ cm, \overline{CF} = 5\ cm$, odrediti dužinu duži $\overline{EF}$.

   Napomena: Slika služi kao ilustracija, te nije za mjerenje. Također, nije dovoljno samo na slici napisati koliko iznose vrijednosti uglova, potrebno je objasniti kako ste ih izračunali.

4. Emil je zamislio neki prirodan broj. Kada se taj broj podijeli sa 11, dobija se neki količnik i ostatak 9. Ako taj broj pomnožimo sa 3 i zatim rezultat podijelimo sa 17, dobijemo ostatak 4, dok je količnik dvostruko veći nego prilikom prvog dijeljenja. Odredite koji je broj Emil zamislio.

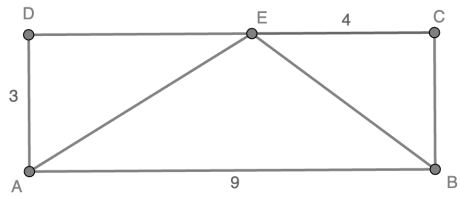
5. U trouglu ΔABC vrijedi da je $\angle BAC = 90^\circ + \angle ABC$. Neka je D tačka na pravoj BC takva da je tačka C između tačaka B i D (tj. D je na produžetku BC preko C). Simetrala ugla $\angle ACB$ siječe pravu AB u E, a simetrala ugla $\angle ACD$ siječe pravu AB u F (tačka F neće biti na stranici $\overline{AB}$, već na njenom produžetku). Ako je duž $\overline{CE}$ duga 3 cm, odrediti dužinu duži $\overline{CF}$.

Vrijeme za izradu zadataka je 150 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.
Sretno!

Općinsko takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Kantona Sarajevo
11. marta/ožujka 2025.

VIII razred

1. zadatak Na slici je dat pravougaonik $ABCD$ i tačka E na stranici DC. Vrijedi da je $AB = 9, AD = 3$ i $EC = 4$. Odrediti površinu i obim trougla ΔABE.



2. zadatak Alisa je otišla u zemlju čuda i tamo je našla 3 čarobna napitka. Svaki put kada bi popila napitak promijenila bi visinu. Odnos njene početne (prve) visine naspram njene druge visine je $24 : 13$, odnos njene druge visine naspram treće visine je $13 : 14$, a odnos njene originalne (početne) visine naspram njene četvrte visine je $16 : 9$. Kada je Alisa bila najniža, njena visina je iznosila $0,91m$. Odrediti Alisinu početnu visinu.

Napomena: Alisina početna visina je visina prije nego što je popila ijedan napitak, druga visina je visina nakon što je popila prvi napitak, i tako dalje.

3. zadatak Prirodni brojevi a, b, c su dužine stranice trougla $\triangle ABC$, tako da vrijedi

$$|a + b - c| + |b - a - c| = 5 + a - b - c.$$

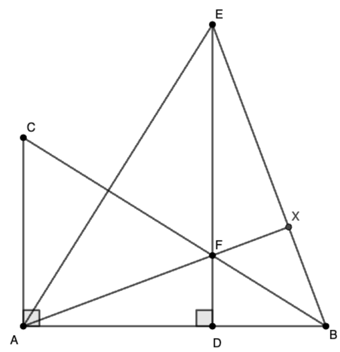
Odrediti sve moguće vrijednosti stranica trougla $\triangle ABC$.

4. zadatak Trocifreni broj $\overline{abc}$ nazivamo *lijepim* ako vrijede sljedeća tri uslova:

i) $c \neq 0$;
ii) broj $\overline{abc}$ je djeljiv sa 36;
iii) broj $\overline{abc} - \overline{cba}$ je pozitivan i djeljiv sa 36.

Odrediti sve *lijepe* brojeve.

5. zadatak Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle DEA$ dva podudarna trougla ($\angle BAC = \angle ADE = 90°, AD = AC, DE = AB$) kao na slici. Označimo sa F tačku presjeka duži BC i DE, a sa X tačku presjeka prave AF i duži BE. Ako je $AB = 8$ i $AC = 5$, izračunati dužinu duži FX.



Vrijeme za izradu zadataka je 150 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.
Sretno!

Kanton Sarajevo
OPĆINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
11. marta/ožujka 2025.

IX razred

Zadatak 1. Prava $-x + 2y - 4 = 0$ siječe pravu $y = -\frac{3}{2}x + 6$ u tački A, a pravu $5x - 4y - 10 = 0$ u tački B.

a) Nacratati prave u koordinatnom sistemu.
b) Izračunati udaljenost tačaka A i B.

Zadatak 2. Ako se broj stranica mnogougla uveća za 25, broj dijagonala novog mnogougla je za 2025 veći od broja dijagonala početnog mnogougla. Koliko stranica je imao početni mnogougao?

Zadatak 3.

a) Nađi sve cijele brojeve a za koje su izrazi $a + 4, a + 95$ kvadrati cijelih brojeva.
b) Odredi sve proste brojeve p za koje je $5p + 49$ kvadrat prirodnog broja.

Zadatak 4. Dat je pravougli trougao ABC, sa pravim uglom u vrhu C. Visina CD ima dužinu 5 cm, a obim trougla ACD iznosi 15 cm. Odrediti dužine stranica trougla ABC.

Zadatak 5. Dati su realni brojevi a, b, c, različiti od nule, takvi da je $a + b + c = 0$. Izračunati

$$\frac{a^2}{a^2 - (b-c)^2} + \frac{b^2}{b^2 - (a-c)^2} + \frac{c^2}{c^2 - (a-b)^2}$$

Vrijeme za izradu zadataka je 150 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Općinsko takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Kantona Sarajevo

11. 3. 2025.

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

VI razred

---

1. zadatak Neka je $A = \{1,2,4,6,7,8,9\}$ i $B = \{2,3,4,5,7,8\}$.

a) Odrediti $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

b) Odrediti skup X za koji vrijedi $X \cap A = \{1,2,8\}$ i $X \cup (A \cap B) = \{1,2,4,5,7,8,10\}$. Obavezno obrazložiti kako ste zaključili koji elementi pripadaju X, a koji ne pripadaju.

Rješenje:

a) Imamo

$$A \cup B = \{1,2,4,6,7,8,9\} \cup \{2,3,4,5,7,8\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},$$
$$A \cap B = \{1,2,4,6,7,8,9\} \cap \{2,3,4,5,7,8\} = \{2,4,7,8\},$$

pa je

$$(A \cup B) \backslash (A \cap B) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \backslash \{2,4,7,8\} = \{1,3,5,6,9\}.$$

b) Kako je $X \cap A = \{1,2,8\}$, to elementi $1,2,8$ pripadaju skupu X, dok elementi $4,6,7,9$ ne pripadaju skupu X (inače bi pripadali presjeku skupova A i X).

Kako je $X \cup (A \cap B) = X \cup \{2,4,7,8\} = \{1,2,4,5,7,8,10\}$, to elementi $1,5$ i 10 sigurno pripadaju skupu X (za 1 smo već znali). Za elemente 2 i 8 smo već zaključili da pripadaju skupu X, dok smo za elemente 4 i 7 zaključili da ne pripadaju. Jasno je da niti jedan drugi element ne može biti u skupu X (inače bi on pripadao uniji skupova X i $\{2,4,7,8\}$).

Dakle, $X = \{1,2,5,8,10\}$.

Šema bodovanja:

- Dio pod a) nosi **6 bodova**, i to po 2 boda za računanje unije, presjeka i razlike
- Dio pod b) nosi **14 bodova**, i to:
  - **4 boda** za zaključak da elementi $1,2,8$ pripadaju skupu X
  - **4 boda** za zaključak da elementi 1, 5 i 10 pripadaju skupu X
  - **4 boda (*)** za zaključak da elementi $4,6,7,9$ ne pripadaju skupu X
  - **2 boda** za konačan skup X

Napomena za (*): Iz drugog uslova vidimo da je X podskup skupa $\{1,2,4,5,7,8,10\}$, te zbog toga nije potrebno posebno objašnavati zašto elementi 6 i 9 ne pripadaju skupu X. Međutim, za elemente 4 i 7 se samo iz prvog uslova može zaključiti da ne pripadaju skupu X (na osnovu drugog uslova bi oni mogli pripadati skupu X). Zbog toga je neophodno da učenik objasni zašto elementi 4 i 7 ne pripadaju skupu X. Dakle, ako učenik zaključi da elementi $1,2,5,8,10$ pripadaju skupu X, te tako napiše konačni skup X, bez da objasni zašto elementi 4 i 7 ne pripadaju skupu X, dobija 10 od 14 bodova za dio pod b).

2. zadatak

a) Odrediti sve četverocifrene brojeve oblika $\overline{2a2b}$ koji su djeljivi sa 45. Odgovor obrazložiti!

b) Odrediti najveći četverocifreni broj koji pri dijeljenju sa 45 daje ostatak 19. Odgovor obrazložiti!

Rješenje:

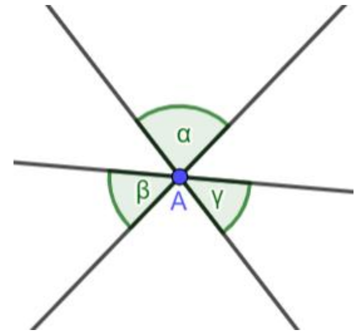
a) Da bi broj bio djeljiv sa 45, mora biti djejljiv sa 9 i 5.
Broj je djeljiv sa 5 ako mu je posljednja cifra 0 ili 5. Zbog toga je $b = 0$ ili $b = 5$.
Da bi broj bio djeljiv sa 9, njegov zbir cifara mora biti djeljiv sa 9, tj. broj $2 + a + 2 + b = 4 + a + b$ mora biti djeljiv sa 9.
Ako je $b = 0$, broj $4 + a$ mora biti djeljiv sa 9, što je tačno samo za $a = 5$, pa tako dobijamo broj 2520.
Ako je $b = 5$, broj $4 + a + 5 = 9 + a$ mora biti djeljiv sa 9, odakle zaključujemo da je $a = 0$ ili $a = 9$, pa u ovom slučaju dobijamo brojeve 2025 i 2925.
Dakle, traženi četverocifreni brojevi su $2520, 2025$ i 2925.

b) Dijeljenjem broja 10000 sa 45 dobijamo količnik 222 i ostatak 10. Dakle, $10000 = 222 \cdot 45 + 10$, pa broj $222 \cdot 45 + 19 > 10000$ nije četverocifren. Zbog toga je najveći četverocifreni broj sa traženom osobinom jednak $221 \cdot 45 + 19 = 9964$.

Šema bodovanja:

- Dio pod a) vrijedi **12 bodova**, i to:
  - **2 boda** za zaključak da broj mora biti djeljiv sa 9 i 5
  - **2 boda** za zaključak da je $b = 0$ ili $b = 5$
  - **2 boda** za navođenje pravila djeljivost sa 9
  - **2 boda** za dobijanje rješenja u slučaju $b = 0$
  - **4 boda** za dobijanje rješenja u slučaju $b = 5$ (po 2 boda za oba rješenja)
- Dio pod b) vrijedi **8 bodova**. Učenik može na razne načine doći do traženog broja. Ukoliko učenik napravi grešku u računanju, ali mu je postupak traženja traženog broja dobar, dobija 5 od 8 bodova.

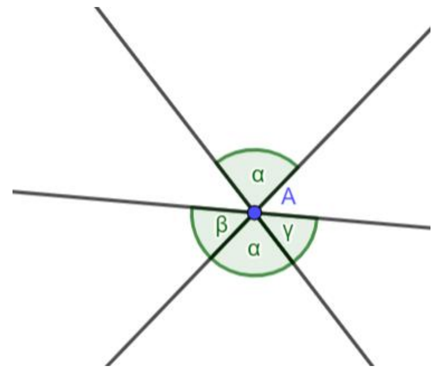
3. zadatak Tri prave se sijeku u tački A, kao na slici. Ako je ugao β za $9°$ veći od ugla γ, a ugao α je za $12°$ manji od zbira uglova β i γ, odrediti uglove α, β i γ.



Napomena: Slika služi samo u ilustrativne svrhe, nije za mjerenje.

Rješenje: Kako su unakrsni uglovi jednaki, to je ugao unakrsan uglu α također jednak α, pa imamo situaciju kao na sljedećoj slici.

Međutim, kako je ispruženi ugao jednak $180°$, to vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. S druge strane, iz uslova zadatka je $\alpha + 12° = \beta + \gamma$, pa prethodna relacija postaje



$$\alpha + \alpha + 12° = 180°,$$
$$2\alpha = 168°$$
$$\alpha = 84°$$

Sada je $\beta + \gamma = \alpha + 12° = 84° + 12° = 96°$. S druge strane, kako je $\beta = \gamma + 9°$, dobijamo

$$\gamma + 9° + \gamma = 96°$$
$$2\gamma = 87°$$
$$\gamma = 43°30'$$

Sada lako dobijamo $\beta = \gamma + 9° = 43°30' + 9° = 52°30'$.

Šema bodovanja:

- **2 boda** za zaključak da su bilo koji unakrsni uglovi jednaki (dovoljno ih je označiti na slici). Pri tome, nebitno je da li je učenik zaključio da su sva tri para unakrsnih uglova jednaki ili samo jedan par, u svakom slučaju dobija 2 boda.
- **4 boda** za zaključak da je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (ili $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360°$)

Dalji bodovi zavise od načina kako učenik radi zadatak.

Ako učenik radi kao u gornjem rješenju (zamijeni $\beta + \gamma$ sa $\alpha + 12°$):

- **3 boda** za dobijanje jednačine u kojoj je samo nepoznata α ($\alpha + \alpha + 12° = 180°$)
- **3 boda** za izračunavanje α
- **3 boda** za dobijanje jednačine u kojoj je samo γ (ili samo β)
- **3 boda** za rješavanje te jednačine i izračunavanje ugla
- **2 boda** za izračunavanje preostalog ugla

Ako učenik izrazi sve uglove preko γ (ili sve preko β), npr. $\beta = \gamma + 9°, \alpha = \gamma + 9° + \gamma - 12 = 2\gamma - 3°$:

- **5 bodova** za dobijanje jednačine u kojoj je samo γ (ili samo β)
- **4 boda** za rješavanje te jednačine i izračunavanje ugla
- **3 boda** za određivanje α
- **2 boda** za određivanje preostalog ugla

4. zadatak Nora je pri dijeljenju prirodnog broja n sa 19 dobila neki količnik i ostatak 11. Kada je zatim broj n podijelila sa 17, dobila je ostatak 2, dok je količnik bio za 13 veći nego prilikom prvog dijeljenja. Odrediti broj n.

Rješenje: Neka broj n pri dijeljenju sa 19 daje količnik k. Tada iz uslova zadatka vrijedi $n: 19 = k(11)$, tj. $n = 19k + 11$. (1)
Također, vrijedi $n: 17 = k + 13$ (2), pa je $n = 17 \cdot (k + 13) + 2 = 17k + 221 + 2 = 17k + 223$. (2)
Sada iz (1) i (2) vrijedi $19k + 11 = 17k + 223$, odakle je $2k = 212$, tj. $k = 106$.
Konačno, $n = 19k + 11 = 19 \cdot 106 + 11 = 2014 + 11 = 2025$.

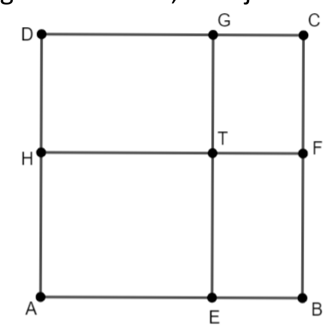
Šema bodovanja:

- **4 boda** za dobijanje relacije $n = 19k + 11$
- **6 bodova** za dobijanje relacije $n = 17k + 223$, pri čemu:
  - ako učenik označi drugi količnik sa l, te napiše $n = 17l + 2$, dobija samo jedan od ovih 6 bodova, sve dok ne izrazi l preko k (ili obrnuto). Dakle, jedna od relacija $n = 19k + 11$ i $n = 17l + 2$ vrijedi 4 boda, dok obje zajedno vrijede 5 bodova.
  - ako učenik zaboravi staviti zagradu, tj. umjesto $n = 17 \cdot (k + 13) + 2$ dobije $n = 17k + 13 + 2 = 17k + 15$, dobija 4 od ovih 6 bodova. U ovom slučaju, na narednim koracima učenik može redom osvojiti maksimalno $3 + 3 + 2$ bodova (treba dobiti $k = 2$ i $n = 49$).
- **3 boda** za izjednačavanje relacija (1) i (2). Ova 3 boda učenik dobija ako bilo kako izvrši izjednačavanje, čak i ako nije izrazio l preko k (tada će dobiti $19k + 11 = 17l + 2$) ili ako je napravio pomenutu grešku (tada dobija $19k + 11 = 17k + 15$).
- **4 boda** za izračunavanje k
- **3 boda** za određivanje n

5. zadatak Kvadrat $ABCD$ stranice $48\,cm$ podijeljen je na četiri pravougaonika (kao na slici). Obim pravougaonika $HTGD$ je dvostruko veći od obima pravougaonika $EBFT$, dok je obim pravougaonika $AETH$ tri puta veći od obima pravougaonika $TFCG$. Odrediti površine pravougaonika $HTGD, EBFT, AETH, TFCG$.

Napomena: Slika služi samo u ilustrativne svrhe, nije za mjerenje.

Rješenje: Neka je $DG = AE = x$ i $DH = CF = y$. Tada je $CG = BE = 48 - x$, a $AH = BF = 48 - y$. Kako je obim pravougaonika $HTGD$ dvostruko veći od obima pravougaonika $EBFT$, to vrijedi:



$$2x + 2y = 2 \cdot \big(2 \cdot (48 - x) + 2 \cdot (48 - y)\big)$$

$$2x + 2y = 2 \cdot (192 - 2x - 2y)$$

$$2x + 2y = 384 - 4x - 4y$$

$$6(x + y) = 384 \quad /:6$$

$$x + y = 64. \quad (1)$$

Kako je obim pravougaonika $AETH$ tri puta veći od obima pravougaonika $TFCG$, to vrijedi:

$$2x + 2 \cdot (48 - y) = 3 \cdot (2 \cdot (48 - x) + 2y)$$

$$2x + 96 - 2y = 3 \cdot (96 - 2x + 2y)$$

$$2x + 96 - 2y = 288 - 6x + 6y$$

$$8(x - y) = 192 \quad /:8$$

$$x - y = 24. \quad (2)$$

Sabiranjem (1) i (2) dobijamo $2x = 64 + 24 = 88$, tj. $x = 44$ i $y = 64 - 44 = 20$.

Sada je $CG = 48 - 44 = 4\,cm, AH = 48 - 20 = 28\,cm$, te lagano izračunavamo površine:

$$P_{HTDG} = DG \cdot HD = 44 \cdot 20 = 880\,cm^2, P_{TFCG} = CG \cdot CF = 4 \cdot 20 = 80\,cm^2,$$

$$P_{AETH} = AE \cdot AH = 44 \cdot 28 = 1232\,cm^2, P_{EBFT} = EB \cdot BF = 4 \cdot 28 = 112\,cm^2.$$

Šema bodovanja:

- **10 bodova (5+5)** za dobijanje relacija (1) i (2) ili njima ekvivalentnih relacija. Relacija (1) je ekvivalentna sa $EB + BF = 32$, dok je relacija (2) ekvivalentna sa $AE + AH = 72$ i $CF + CG = 24$. Učenik dobija svih 5 bodova i ako ne izvrši dijeljenje na kraju, nego ostavi npr. $6x + 6y = 384$ ili $8x = 192 + 8y$. Ovih 5 bodova je raspoređeno na sljedeći način:
  - 1 bod za pravilno postavljen uslov (npr. $2 \cdot DH + 2 \cdot DG = 2 \cdot (2 \cdot EB + 2 \cdot BF)$)
  - 2 boda za svođenje na 2 nepoznate (npr. uvrštavanje $DH = 48 - BF$, $DG = 48 - EB$)
  - 2 boda za pravilno oslobađanje od zagrada i dobijanje veze između te dvije nepoznate
- **6 bodova** za određivanje bilo koje od dužina DG, DH, GC, AH, pri čemu se 3 od ovih 6 bodova dobija za svođenje na jednačinu po jednoj nepoznatoj
- **4 boda** za pravilno izračunavanje površina (po bod za svaku)

Kanton Sarajevo
OPĆINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
11. 3. 2025.

VII razred – rješenja i šema bodovanja

---

1. Izračunati vrijednost izraza

$$\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1}+1}\cdot 8\right):3\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{2025}.$$

Rješenje.
Imamo da je

$$\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1}+1}\cdot 8\right):3\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{2025}=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{3}}-1}+1}\cdot 8\right):3\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{2025}$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\frac{3}{2}-1}+1}\cdot 8\right):3\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{2025}=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}}+1}\cdot 8\right):3\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{2025}$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{2+1}\cdot 8\right):3\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{2025}=\left[\left(1+\frac{8}{3}\right):3\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{2025}$$

$$=\left(\frac{11}{3}:\frac{11}{3}\right)-\frac{1}{2025}=1-\frac{1}{2025}=\frac{2024}{2025}.$$

Dakle, vrijednost datog izraza iznosi $\frac{2024}{2025}$.

Šema bodovanja:

- ispravno računanje $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}, \frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}, 1+\frac{8}{3}=\frac{11}{3}$ po 3 boda, ukupno **9 bodova**
- ispravno izražavanje dvojnih razlomaka $\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}, \frac{1}{\frac{1}{2}}=2$: po 3 boda, ukupno **6 bodova**
- pretvaranje $\frac{11}{3}$ u $3\frac{2}{3}$ ili pretvaranje $3\frac{2}{3}$ u $\frac{11}{3}$: **1 bod**
- ispravno računanje $\frac{11}{3}:\frac{11}{3}=1$ ili $3\frac{2}{3}:3\frac{2}{3}=1$: **2 boda**
- ispravno računanje $1-\frac{1}{2025}=\frac{2024}{2025}$: **2 boda**

2. Nora je pročitala knjigu za 4 dana. Prvog dana je pročitala 1/3 knjige, drugog dana 6/11 ostatka knjige, trećeg dana je pročitala 7/23 od onog što je pročitala prvog i drugog dana zajedno, a četvrtog dana je pročitala preostalih 12 stranica. Koliko je stranica imala ta knjiga?

Rješenje.
Označimo sa x ukupan broj stranica knjige.
Prvog dana Nora je pročitala $\frac{x}{3}$ stranica knjige.
Drugog dana Nora je pročitala $\frac{6}{11}\cdot\left(x-\frac{x}{3}\right)=\frac{4x}{11}$ stranica knjige.
Trećeg dana Nora je pročitala $\frac{7}{23}\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{4x}{11}\right)=\frac{7x}{33}$ stranica knjige.
Četvrtog dana Nora je pročitala 12 stranica knjige.
Zaključujemo da mora vrijediti

$$\frac{x}{3}+\frac{4x}{11}+\frac{7x}{33}+12=x.$$

Posljednja jednačina je ekvivalentna sa

$$\frac{11x+12x+7x}{33}+12=x,$$

$$\frac{30x}{33}+12=x,$$

odakle je $12=x-\frac{30x}{33}=\frac{3x}{33}=\frac{x}{11}$, pa je

$$x=11\cdot 12=132.$$

Dakle, knjiga koju je Nora pročitala je imala 132 stranice.

Šema bodovanja:
- označavanje ukupnog broja stranica knjige sa x ili nekom drugom nepoznatom: **1 bod**
- zaključak da je Nora prvog dana pročitala $\frac{x}{3}$ stranica knjige: **2 boda**
- zaključak da je Nora drugog dana pročitala $\frac{6}{11}\cdot\left(x-\frac{x}{3}\right)=\frac{4x}{11}$ stranica knjige: **3 boda**
- zaključak da je Nora trećeg dana pročitala $\frac{7}{23}\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{4x}{11}\right)=\frac{7x}{33}$ stranica knjige: **5 bodova**
- postavljanje jednačine $\frac{x}{3}+\frac{4x}{11}+\frac{7x}{33}+12=x$: **4 boda**

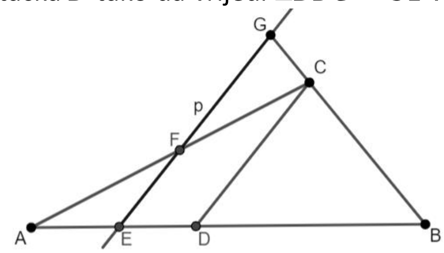
  Napomena: Ako učenik umjesto opisanog postupnog rješavanja odmah postavi jednačinu

  $$\frac{x}{3}+\frac{6}{11}\cdot\left(x-\frac{x}{3}\right)+\frac{7}{23}\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{6}{11}\cdot\left(x-\frac{x}{3}\right)\right)+12=x,$$

  za nju dobija **10 bodova**, a preostalih **5 bodova** dobija ako se ispravno riješi zagrada i svede na oblik ekvivalentan sa $\frac{x}{3}+\frac{4x}{11}+\frac{7x}{33}+12=x$.
- ispravno rješavanje jednačine i dobijanje rješenja $x=132$: **5 bodova**

  Napomena: Ako učenik konceptualno ispravno radi zadatak, ali napravi grešku koja je čisto računskog karaktera (množenje/sabiranje dva broja), te zbog toga dobije drugačiji rezultat, dobija 17 od 20 bodova. Greške ozbiljnijeg karaktera, npr. nepravilno svođenje razlomaka na zajednički nazivnik ili nepravilna primjena distributivnosti se ne smatraju računskim greškama.

3. U trouglu ΔABC vrijedi $\angle BAC = 27^\circ$. Na stranici $\overline{AB}$ je data tačka D tako da vrijedi $\angle BDC = 51°$. Povučena je prava p paralelna sa CD, te ona siječe pravu AB u tački E, pravu AC u tački F, a pravu BC u tački G.



a) Odrediti veličinu ugla $\angle CFG$.

b) Ako je $\angle BGE = 78°, \overline{BG} = 8\ cm, \overline{CF} = 5\ cm$, odrediti dužinu duži $\overline{EF}$.

Napomena: Slika služi kao ilustracija, te nije za mjererenje. Također, nije dovoljno samo na slici napisati koliko iznose vrijednosti uglova, potrebno je objasniti kako ste ih izračunali.

Rješenje.

a) Kako su prave CD i p paralelne, to je $\angle BEG = \angle BDC = 51°$. Sada je
$$\angle AEF = 180° - \angle BEG = 180° - 51° = 129°.$$
Iz trougla ΔAEF je
$$\angle AFE = 180° - \angle AEF - \angle EAF = 180° - 129° - 27° = 24°.$$
Konačno, kako su uglovi $\angle AFE$ i $\angle CFG$ unakrsni, oni su jednaki, pa je i
$$\angle CFG = 24°.$$
Napomena: Moguće je da učenik zaključi da su uglovi $\angle CFG$ i $\angle ACD$ jednaki kao uglovi na transferzali, a onda nakon što zaključi $\angle ADC = 180° - \angle BDC = 129°$, iz ΔACD izračunava $\angle ACD = 180° - \angle DAC - \angle ADC = 24°$.

b) Iz trougla ΔGFC imamo
$$\angle FCG = 180° - \angle CFG - \angle CGF = 180° - 24° - 78° = 78°,$$
pa je trougao ΔCFG jednakokraki i vrijedi $\overline{FG} = \overline{FC} = 5\ cm$.
Dalje, iz trougla ΔEBG dobijamo
$$\angle EBG = 180° - \angle BEG - \angle BGE = 180° - 51° - 78° = 51°,$$
pa je i trougao ΔBGE jednakokraki i vrijedi $\overline{GE} = \overline{BG} = 8\ cm$.
Sada je
$$\overline{EF} = \overline{GE} - \overline{GF} = 8 - 5 = 3\ cm.$$

Šema bodovanja:

- dio pod a) vrijedi **7 bodova**, i to
  - $\angle BEG = 51°$ 3 boda
  - $\angle AEF = 129°$ 1 bod
  - $\angle AFE = 24°$ 1 bod
  - $\angle CFG = 24°$ 2 boda

  odnosno (ako učenik radi na način kao u napomeni)
  - $\angle ADC = 129°$ 1 bod
  - $\angle ACD = 24°$ 1 bod
  - $\angle CFG = \angle ACD = 24°$ kao uglovi na transferzali 5 bodova
- zaključak da je trougao ΔCFG jednakokraki vrijedi **4 boda**
- zaključak da je trougao ΔEBG jednakokraki vrijedi **4 boda**
- određivanje dužine duži $\overline{EF}$ **5 bodova**

4. Emil je zamislio neki prirodan broj. Kada se taj broj podijeli sa 11, dobija se neki količnik i ostatak 9. Ako taj broj pomnožimo sa 3 i zatim rezultat podijelimo sa 17, dobijemo ostatak 4, dok je količnik dvostruko veći nego prilikom prvog dijeljenja. Odredite koji je broj Emil zamislio.

Rješenje.
Označimo sa n broj koji je zamislio Emil. Pošto taj broj pri djeljenju sa 11 daje ostatak 9, to vrijedi

$$n = 11k + 9, \text{ za neki } k \in \mathbb{N}.$$

S druge strane, $3n$ pri djeljenju sa 17 daje količnik $2k$ i ostatak 4, pa vrijedi da je

$$3n = 17 \cdot 2k + 4 = 34k + 4.$$

Kako je $3n = 3 \cdot n$, to je

$$34k + 4 = 3 \cdot (11k + 9) = 33k + 27,$$

odakle se dobija $k = 23$.
Broj koji je zamislio Emil iznosi

$$n = 11 \cdot 23 + 9 = 253 + 9 = 262.$$

Šema bodovanja:
- zapisivanje broja koji je Emil zamislio u obliku $n = 11k + 9$, za neki $k \in \mathbb{N}$ **3 boda**
- zapisivanje $3n = 34k + 4$ **6 bodova**
- postavljanje relacije iz koje se može odrediti k: $34k + 4 = 3 \cdot (11k + 9)$ **6 bodova**
- određivanje broja k **3 boda**
- određivanjebroja n **2 boda**

Napomena: Moguće je da učenik izrazi k preko n, tj. $k = \frac{n-9}{11}$ i $k = \frac{3n-4}{34}$, te izjednači te relacije i odredi n. U tom slučaju je posljednjih 11 bodova raspoređeno na sljedeći način:

- **7 bodova** za postavljanje uslova $\frac{n-9}{11} = \frac{3n-4}{34}$
- **4 boda** za određivanje broja n

5. U trouglu ΔABC vrijedi da je $\angle BAC = 90^{\circ} + \angle ABC$. Neka je D tačka na pravoj BC takva da je tačka C između tačaka B i D (tj. D je na produžetku BC preko C). Simetrala ugla $\angle ACB$ siječe pravu AB u E, a simetrala ugla $\angle ACD$ siječe pravu AB u F (tačka F neće biti na stranici $\overline{AB}$, već na njenom produžetku). Ako je duž $\overline{CE}$ duga 3 cm, odrediti dužinu duži $\overline{CF}$.

Rješenje.

Označimo $\angle ABC$ sa β. Tada je $\angle BAC = 90^{\circ} + \beta$ i

$$\angle ACB = 180^{\circ} - \angle BAC - \angle ABC = 180^{\circ} - \left(90^{\circ} + \beta\right) - \beta = 90^{\circ} - 2\beta.$$

Kako je $\overline{CE}$ simetrala ugla $\angle ACB$, to je

$$\angle ECB = \angle ECA = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^{\circ} - \beta.$$

Iz trougla ΔEBC slijedi da je

$$\angle BEC = 180^{\circ} - \angle EBC - \angle ECB = 180^{\circ} - \beta - \left(45^{\circ} - \beta\right) = 135^{\circ}$$

pa je

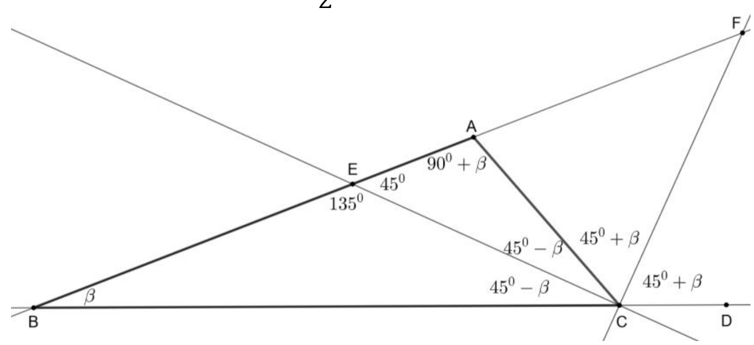
$$\angle AEC = 180^{\circ} - \angle BEC = 180^{\circ} - 135^{\circ} = 45^{\circ}. \quad (1)$$

Dalje,

$$\angle ACD = 180^{\circ} - \angle ACB = 180^{\circ} - \left(90^{\circ} - 2\beta\right) = 90^{\circ} + 2\beta,$$

pa kako je $\overline{CF}$ simetrala ugla $\angle ACD$, to je

$$\angle ACF = \frac{1}{2}\angle ACD = 45^{\circ} + \beta.$$



Posmatrajmo sada trougao ΔECF. U njemu je

$$\angle FEC = \angle AEC = 45^{\circ}$$

i

$$\angle ECF = \angle ECA + \angle ACF = \left(45^{\circ} - \beta\right) + \left(45^{\circ} + \beta\right) = 90^{\circ},$$

pa je

$$\angle EFC = 180^{\circ} - \angle ECF - \angle FEC = 180^{\circ} - 90^{\circ} - 45^{\circ} = 45^{\circ}. \quad (2)$$

Sada iz (1) i (2) zaključujemo da je trougao ΔECF jednakokrako-pravougli, pa vrijedi

$$\overline{CF} = \overline{CE} = 3\ cm.$$

Šema bodovanja:

- Zaključak (1): $\angle FEC = 45^{\circ}$ **6 bodova**
- zaključak (2): $\angle EFC = 45^{\circ}$ **6 bodova**
- zaključak da je ΔECF jednakokraki **5 bodova**
- zakljkučak da je $\overline{CF} = \overline{CE} = 3\ cm$ **3 boda**

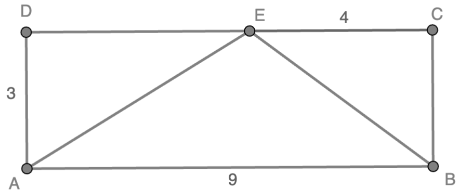
Napomena 1: Učenik može osvojiti parcijalne bodove za zaključke (1) i (2) samo ukoliko ima preko jedne varijable izražene uglove koji su potrebni za izračunavanje ugla $\angle FEC$ (ili $\angle EFC$), npr. ako ima oba ugla $\angle EAC$ i $\angle ACE$ preko jedne varijable. U tom slučaju dobija 2 od 6 bodova.

Napomena 2: Ako učenik nema oba zaključka (1) i (2), ali ima zaključak $\angle ECF = 90°$, za taj zaključak dobija 4 boda. Ovi bodovi su aditivni sa bodovima iz napomene 1 samo ako učenik nema ni (1) ni (2).

Općinsko takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Kantona Sarajevo
11. marta/ožujka 2025.

VIII razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja



1. zadatak Na slici je dat pravougaonik $ABCD$ i tačka E na stranici DC. Vrijedi da je $AB = 9, AD = 3$ i $EC = 4$. Odrediti površinu i obim trougla ΔABE.

Rješenje:

Kako je $ABCD$ pravougaonik, imamo da je $DC = AB = 9$ i $BC = AD = 3$. Dalje je $DE = DC - EC = 9 - 4 = 5$. Iz Pitagorine teoreme na trougao ADE imamo:

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 = 3^2 + 5^2 = 34$$

$$AE = \sqrt{34}$$

Iz Pitagorine teoreme na trougao EBC imamo:

$$EB^2 = EC^2 + CB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$EB = 5$$

Sada je obim trougla ΔABE jednak $AE + EB + AB = \sqrt{34} + 5 + 9 = 14 + \sqrt{34}$.

Površinu trougla ΔABE možemo izračunati na dva načina:

I način Visina iz vrha E na stranicu AB je jednaka stranici pravougaonika $BC = AD = 3$ (jer su AB i CD paralelene). Zato je površina trougla ΔABE jednaka $\frac{3\cdot 9}{2} = \frac{27}{2}$.

II način Površinu trougla ΔABE dobijamo tako što od površine pravougaonika oduzmemo površine pravouglih trouglova ΔADE i ΔBCE, pa je tražena površina jednaka

$$AB \cdot AD - \frac{AD \cdot DE}{2} - \frac{BC \cdot CE}{2} = 3 \cdot 9 - \frac{3 \cdot 5}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{27}{2}$$

.

Dakle obim trougla ΔABE jednak je $14 + \sqrt{34}$, a površina $\frac{27}{2}$.

Šema bodovanja:

- izračun stranice DE .... **3 boda**
- izračun stranice AE .... **4 boda**
- izračun stranice BE .... **5 bodova**
- izračun obima trougla ΔABE .... **2 boda**
- izračun površine trougla ΔABE .... **6 bodova**

Napomena: Greške u računu se kažnjavaju sa -2 boda! Ovo pravilo se primjenjuje ako je zadatak konceptualno tačno urađen, te vrijedi i ako je učenik negdje na početku napravio grešku koju propagira kroz zadatak.

2. zadatak Alisa je otišla u zemlju čuda i tamo je našla 3 čarobna napitka. Svaki put kada bi popila napitak promijenila bi visinu. Odnos njene početne (prve) visine naspram njene druge visine je 24 : 13, odnos njene druge visine naspram treće visine je 13 : 14, a odnos njene originalne (početne) visine naspram njene četvrte visine je 16 : 9. Kada je Alisa bila najniža, njena visina je iznosila $0,91m$. Odrediti Alisinu početnu visinu.

Napomena: Alisina početna visina je visina prije nego što je popila ijedan napitak, druga visina je visina nakon što je popila prvi napitak, i tako dalje.

Rješenje:

Označimo sa x Alisinu početnu (prvu) visinu, a sa x_1, x_2, x_3 njenu drugu, treću i četvrtu visinu. Iz uslova zadatka imamo da vrijedi

$$x_1 : x_2 = 24 : 13, \text{ tj. } 13x_1 = 24x_2, \text{ tj. } x_2 = \frac{13}{24}x_1,$$

$$x_2 : x_3 = 13 : 14, \text{ tj. } 14x_2 = 13x_3, \text{ tj. } x_3 = \frac{14}{13}x_2,$$

$$x_1 : x_4 = 16 : 9, \text{ tj. } 9x_1 = 16x_4, \text{ tj. } x_4 = \frac{9}{16}x_1.$$

Dokažimo sada da je x_2 najmanja Alisina visina na dva načina:

I način Iz $x_2 = \frac{13}{24}x_1$, i $x_3 = \frac{14}{13}x_2$ dobijamo

$$x_3 = \frac{14}{13} \cdot \frac{13}{24}x_1 = \frac{7}{12}x_1.$$

Dakle, dobili smo sve visine izražene preko Alisine prvobitne visine. Primjetimo da je svaki od razlomaka $\frac{13}{24}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{16}$ manji od 1, a to znači da je svaka nova Alisina visina manja od početne. Najmanjoj visini odgovara i najmanji od navedenih razlomaka. Kako je $NZS(24, 12, 16) = 48$, proširujući razlomke $\frac{13}{24}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{16}$ redom sa $2, 4$ i 3 oni postaju $\frac{26}{48}$, $\frac{28}{48}$, $\frac{27}{48}$, redom. Kako sada ovi razlomci imaju isti nazivnik, najmanji je onaj čiji je brojnik najmanji, a to je razlomak $\frac{26}{48}$, odnosno $\frac{13}{24}$. Dakle, x_2 je najmanja Alisina visina.

II način Primijetimo da pošto je $\frac{14}{13} > 1$ imamo da je $x_3 = \frac{14}{13}x_2 > x_2$. Također, imamo i da je $x_1 > \frac{13}{24}x_1 = x_2$. Dakle, i x_3 i x_1 su veći od x_2. Dovoljno je još dokazati da je x_4 veći od x_2. Za to nam treba da je $\frac{9}{16} > \frac{13}{24}$, odnosno da je $9 \cdot 24 > 13 \cdot 16$ što vrijedi, jer je $216 > 208$. Dakle, x_2 je najmanja Alisina visina.

Kako je Alisina najmanja visina $0,91m$ imamo da vrijedi

$$x_2 = \frac{13}{24}x_1 = 0.91.$$

Odavde dobijamo

$$x_1 = \frac{91}{100} \cdot \frac{24}{13} = \frac{168}{100} = 1.68.$$

Dakle, Alisina početna visina je $1,68m$.

Šema bodovanja:

- izražavanje $x_2 = \frac{13}{24}x_1$ .... **1 bod**
- izražavanje $x_3 = \frac{14}{13}x_2$ .... **1 bod**
- izražavanje $x_4 = \frac{9}{16}x_1$ .... **1 bod**

- dokaz da je x_2 najmanja Alisina visina .... **13 bodova**

  I način

  - izražavanje $x_3 = \frac{7}{12}x_1$ .... **6 bodova**
  - upoređivanje razlomaka $\frac{13}{24}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{9}{16}$ .... **5 bodova**
  - konačni zaključak da je x_2 najmanja visina .... **2 boda**

  II način

  - zaključak da je $x_3 > x_2$ .... **3 boda**
  - zaključak da je $x_1 > x_2$ .... **3 boda**
  - zaključak da je $x_4 > x_2$ .... **5 bodova**
  - konačni zaključak da x_2 najmanja težina .... **2 boda**

- konačno izračunavanje x_1 .... **4 boda**

3. zadatak Prirodni brojevi a, b, c su dužine stranice trougla $\triangle ABC$, tako da vrijedi

$$|a+b-c|+|b-a-c|=5+a-b-c.$$

Odrediti sve moguće vrijednosti stranica trougla $\triangle ABC$.

Rješenje:

Kako su a, b, c stranice trougla to znači da za njih vrijedi nejednakost trougla, odnosno da je zbir ma koje dvije od njih veći od treće. Specijalno, vrijede nejednakosti

$$a+b-c>0, \text{ i } a+c-b>0.$$

To znači da je $|a+b-c|=a+b-c$ i $|b-a-c|=-(b-a-c)=a+c-b$. Sada dati uslov $|a+b-c|+|b-a-c|=5+a-b-c$ postaje

$$a+b-c+a+c-b=5+a-b-c.$$

Nakon sređivanja posljednja jednakost postaje

$$a+b+c=5.$$

Kako vrijedi $a+b>c$, to mora vrijediti $c \leq 2$. Sada posmatramo dva slučaja.

I slučaj: $c=1$ Ako je $c=1$ onda je $a+b=4$. Sada može biti $\{a,b\}=\{2,2\}$ ili $\{a,b\}=\{1,3\}$. Ako je $\{a,b\}=\{1,3\}$ onda bez umanjenja opštosti neka je $a=1$ i $b=3$. Tada je $a+c=2<b=3$, pa nejednakost trougla nije zadovoljena i ovaj slučaj nije moguć. Ako je $\{a,b\}=\{2,2\}$ onda je $a=b=2$ i $c=1$. U ovom slučaju je zadovoljena nejednakost trougla. Ovaj slučaj daje rješenje $(a,b,c)=(2,2,1)$

II slučaj: $c=2$ Ako je $c=2$ onda je $a+b=3$. Jedina mogućnost je $\{a,b\}=\{1,2\}$ pa bez umanjenja opštosti možemo uzeti $a=1, b=2$. U ovom slučaju je zadovoljena nejednakost trougla. Ovaj slučaj daje dva rješenja $(a,b,c)=(1,2,2)$ i $(a,b,c)=(2,1,2)$.

Konačno imamo tri rješenja $(a,b,c) \in \{(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\}$.

Šema bodovanja:

- zaključak da iz nejednakosti trougla slijedi da je $a+b-c>0$ .... **4 boda**
- zaključak da iz nejednakosti trougla slijedi da je $b-a-c<0$ .... **4 boda**
- ∗ Ako učenik/ica prethodne zaključke izvede bez oslanjanja na nejednakost trougla dobija 0 bodova
- zaključak da vrijedi $a+b+c=5$ .... **5 bodova**
- ∗ Ako učenik/ica krene rješavati slučajeve kada je $a+b-c$ (ili $b-a-c$) pozitivno ili negativno (ukupno 4 slučaja), te se jedan od slučajeva svede na $a+b+c=5$, ne dobija bodove sve dok ne odbaci neki od preostalih slučajeva. Dakle, odbacivanje preostala 3 slučaja (tj. dokaz da je $a+b+c=5$ jedini mogući slučaj) nosi 13 bodova.
- određivanje trouglova za koje vrijedi $a+b+c=5$ .... **7 bodova**
- ∗ Ukoliko je učenik/ica je zaboravio/la da napiše sve permutacije rješenja (na primjer dobije da je jedino rješenje $(a,b,c)=(1,2,2)$), oduzima se 1 bod za svako zaboravljeno rješenje (dakle maksimalno -2 boda.)
- ∗ Ukoliko učenik/ica nije odbacio rješenje $(a,b,c)=(1,1,3)$ (i permutacije) gubi 3 boda (tj. maksimalno može osvojiti 4 od ovih 7 bodova).
- ∗ Učenik/ica može imati bodove iz ove stavke ako riješi ovu jednačinu bez da je odbacio/la ostale slučajeve. .

4. zadatak Trocifreni broj $\overline{abc}$ nazivamo *lijepim* ako vrijede sljedeća tri uslova:

i) $c \neq 0$;
ii) broj $\overline{abc}$ je djeljiv sa 36;
iii) broj $\overline{abc} - \overline{cba}$ je pozitivan i djeljiv sa 36.

Odrediti sve *lijepe* brojeve.

Rješenje:

Da bi broj bio djeljiv sa 36 mora biti djeljiv sa 9 i 4. Broj je djeljiv sa 9 ako mu je zbir cifara djeljiv sa 9. Broj je djeljiv sa 4 ako mu je dvocifreni završetak djeljiv sa 4. Dakle, iz drugog uslova znamo da je $a+b+c$ djeljivo sa 9 i da je $\overline{bc}$ djeljivo sa 4. Ovo nam govori da c mora biti paran.

Iz trećeg uslova imamo da je $\overline{abc} - \overline{cba}$ pozitivno, pa mora vrijediti $a > c$ (za $a < c$ bi imali negativnu razliku, a za $a = c$ razlika bi bila 0).

Dokažimo sada da je $a - c$ djeljivo sa 4 na dva načina.

I način Iz trećeg uslova imamo da

$$36|\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a-c),$$

tj. $4|99(a-c)$, a kako je $NZD(4,99) = 1$, zaključujemo da $4|a-c$.

II način Iz trećeg uslova, pošto je $\overline{abc}$ djeljiv sa 36, mora i $\overline{cba}$ biti djeljiv sa 36 (kako bi im razlika bila djeljiva). Dakle, zaključujemo i da je $\overline{ba}$ djeljivo sa 4.
Kako su i $\overline{bc}$ i $\overline{ba}$ sa 4, zaključujemo da je i njihova razlika $\overline{ba} - \overline{bc} = a - c$ djeljiva sa 4.

Dakle, $a > c > 0$ su dvije parne cifre čija je razlika djeljiva sa 4, što nam daje slučajeve $(a,c) \in \{(6,2),(8,4)\}$.

U prvom slučaju $a = 6, c = 2$ imamo da 9 dijeli $a+b+c = b+8$, pa je jedina mogućnost $b = 1$.

U drugom slučaju $a = 8, c = 4$ imamo da 9 dijeli $a+b+c = 12+b$, pa je jedina mogućnost $b = 6$.

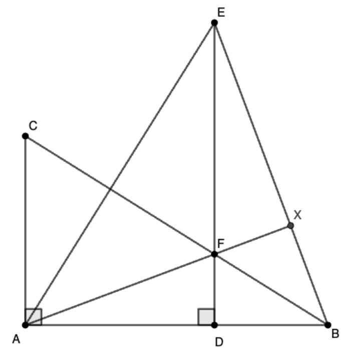
Dakle, jedini lijepi brojevi su $\overline{abc} \in \{612, 864\}$

Šema bodovanja:

- zaključak da 9 dijeli $a+b+c$ .... **2 boda**
- zaključak da je a ili c parna cifra .... **3 boda**
- zaključak da 4 dijeli $a-c$ .... **10 bodova**
  I način
  - zapis izraza $\overline{abc} - \overline{cba}$ kao $99(a-c)$ .... **5 bodova**
  - zaključak da 4 dijeli $a-c$ .... **5 bodova**

  II način
  - zaključak da je $\overline{cba}$ djeljiv sa 36 (ili samo sa 4) .... **4 boda**
  - zaključak da $4|\overline{ba} - \overline{bc}$ .... **4 boda**
  - konačni zaključak da $4|a-c$ .... **2 boda**
- ispravno dobijanje jedinih mogućih slučajeva za a i c .... **4 boda**
  * Ako učenik/ica izostavi neki slučaj, oduzeti 2 boda
- izračun b po slučajevima .... **1 bod**

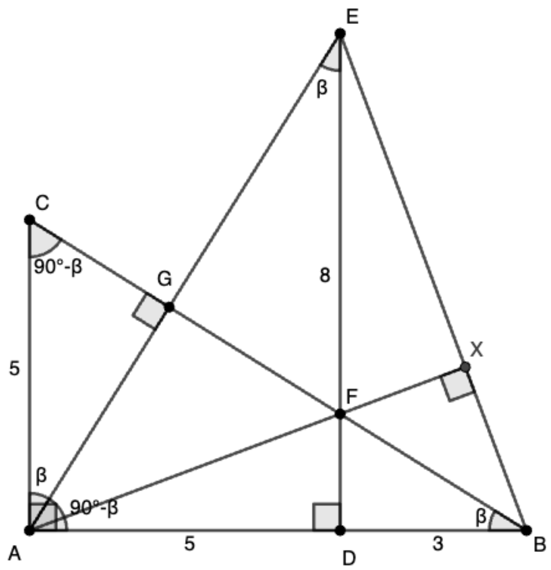
5. zadatak Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle DEA$ dva podudarna trougla ($\angle BAC = \angle ADE = 90°, AD = AC, DE = AB$) kao na slici. Označimo sa F tačku presjeka duži BC i DE, a sa X tačku presjeka prave AF i duži BE. Ako je $AB = 8$ i $AC = 5$, izračunati dužinu duži FX.



Rješenje:

Sa G označimo tačku presjeka duži BC i AE. S obzirom da su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$ podudarni to znači da su im odgovarajući uglovi i odgovarajuće stranice podudarne. Zbog toga vrijedi $\angle ABC = \angle AED = \beta$, $\angle ACB = DAE = 90° - \beta$, $AD = AC = 5$ i $AB = DE = 8$. Kako je $AD + DB = AB$, dobijamo da je $BD = AB - AD = 8 - 5 = 3$. Kako je $\angle BAC = 90°$, imamo da je

$$\angle GAC = 90° - \angle GAB = 90° - \angle EAD = 90° - (90° - \beta) = \beta.$$



Dalje je

$$\angle AGC = 180° - \angle GAC - \angle GCA = 180° - (90° - \beta) - \beta = 90°.$$

Odavde zaključujemo da je $AE \perp BC$, što znači da je BG visina trougla $\triangle ABE$ na stranicu AE. Kako je i ED visina tog trougla, to znači da je F ortocentar trougla $\triangle ABE$, pa je i AX visina tog trougla, odnosno imamo da je $AX \perp BE$.

Ostatak dokaza ćemo uraditi na dva načina.

I način Primjenom Pitagorine teoreme na trougao FBX imamo:

$$FX^2 = BF^2 - BX^2.$$

Izračunajmo sada dužinu duži BF. Iz Pitagorine teoreme na trougao ABC imamo da je $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89}$. Dalje, kako je $\angle BAC = \angle ADE = 90°$

zaključujemo da je $AC \parallel DF$. Primjenimo li Talesovu teoremu na ugao $\angle ABC$ dobijamo

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BA}, \text{tj. } \frac{BF}{\sqrt{89}} = \frac{3}{8}.$$

Zaključujemo da je $BF = \frac{3\sqrt{89}}{8}$.

Dalje, izračunajmo dužinu duži BX. Primjenom Pitagorine teoreme na trougao ABX imamo:

$$BX^2 = AB^2 - AX^2 = 64 - AX^2$$

Posmatrajmo površinu trougla $\triangle ABE$. S jedne strane ona je jednaka $\frac{DE \cdot AB}{2}$, a sa druge jednaka je $\frac{AX \cdot BE}{2}$. Dakle, imamo da je

$$DE \cdot AB = AX \cdot BE$$

$$AX = \frac{DE \cdot AB}{BE} = \frac{64}{BE}.$$

Primjenom Pitagorine teoreme na trougao $\triangle BDE$ dobijamo

$$BE^2 = BD^2 + ED^2 = 9 + 64 = 73, \text{tj. } BE = \sqrt{73}.$$

Konačno, imamo:

$$AX = \frac{64}{BE} = \frac{64}{\sqrt{73}}.$$

Sada imamo i:

$$BX^2 = 64 - AX^2 = 64 - \frac{64^2}{73} = \frac{576}{73}$$

$$BX = \frac{24}{\sqrt{73}}$$

Dakle, dobili smo $BF = \frac{3\sqrt{89}}{8}$ i $BX = \frac{24}{\sqrt{73}}$. Konačno, imamo da je

$$FX^2 = BF^2 - BX^2 = \frac{801}{64} - \frac{576}{73} = \frac{21609}{64 \cdot 73}$$

$$FX = \sqrt{\frac{21609}{64 \cdot 73}} = \frac{147}{8\sqrt{73}} = \frac{147\sqrt{73}}{584}.$$

II način Imamo da je

$$FX = AX - AF.$$

Dužinu duži AX računamo isto kao u prvom načinu i dobijamo

$$AX = \frac{64}{\sqrt{73}}.$$

Sada izračunajmo dužinu duži AF. Primjenom Pitagorine teoreme na trougao $\triangle ADF$ imamo:

$$AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{25 + DF^2}$$

Kao u prvom načinu zaključujemo da je $AC \parallel DF$ i primjenom Talesove teoreme dobijamo:

$$\frac{DF}{AC} = \frac{BD}{BA}, \text{tj. } DF = \frac{BD \cdot AC}{BA} = \frac{3 \cdot 5}{8} = \frac{15}{8}.$$

Sada imamo da je:

$$AF = \sqrt{25 + DF^2} = \sqrt{25 + \frac{225}{64}} = \sqrt{\frac{1825}{64}} = \frac{5\sqrt{73}}{8}.$$

Konačno, imamo da je:

$$FX = AX - AF = \frac{64}{\sqrt{73}} - \frac{5\sqrt{73}}{8} = \frac{147}{8\sqrt{73}} = \frac{147\sqrt{73}}{584}.$$

Šema bodovanja:

- dokaz da je $AE \perp BC$ .... **3 boda**
- dokaz da je $AX \perp BE$ .... **4 boda**

∗ ovdje se dodjeljuju 2 od 4 boda ako učenik/ica zaključi da je F ortocentar trougla ABE, ali ne zaključi da to povlači da je $AX \perp BE$

- izračunavanje dužine duži BF ili DF .... **4 boda**
- izračunavanje dužine duži AX .... **4 boda**
- izračunavanje dužine duži AF ili BX .... **3 boda**
- konačno izračunavanje duži FX .... **2 boda**

∗ **Napomena:** Greške u računu se kažnjavaju sa -2 boda! Ovo pravilo se primjenjuje ako je zadatak konceptualno tačno urađen, te vrijedi i ako je učenik negdje na početku napravio grešku koju propagira kroz zadatak.

Kanton Sarajevo
OPĆINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
11. 3. 2025.

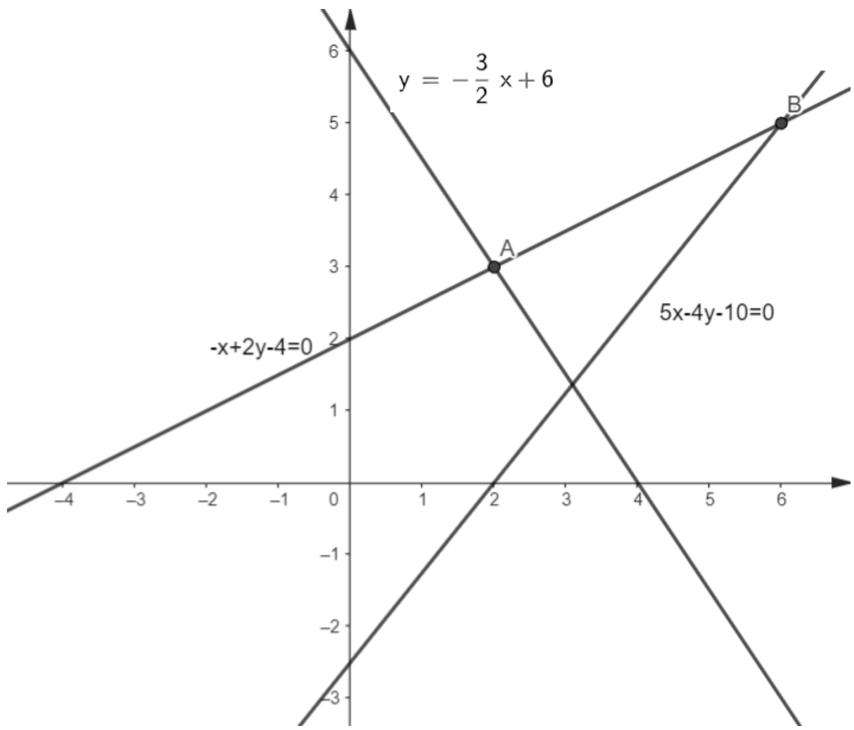
IX razred – rješenja i šema bodovanja

Zadatak 1. Prava $-x+2y-4=0$ siječe pravu $y=-\frac{3}{2}x+6$ u tački A, a pravu $5x-4y–10=0$ u tački B.

a) **Nacrtati prave u koordinatnom sistemu.**
b) **Izračunati udaljenost tačaka A i B.**

Rješenje:

a)



b)

Koordinate tačke A dobivamo rješavanjem sistema jednačina:

$$-x+2y-4=0$$
$$y=-\frac{3}{2}x+6$$

Rješenje ovog sistema je $x=2, y=3$, tj. tačka $A(2{,}3)$.

Na isti način, rješavanjem sistema

$$-x+2y-4=0$$
$$5x-4y-10=0$$

dobijamo koordinate tačke B: $x=6, y=5$, tj. $B(6{,}5)$.

Udaljenost tačaka $A(2,3)$ i $B(6,5)$ računamo po furmuli:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = 6, y_2 = 5$$

$\overline{AB} = \sqrt{(6-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$

Shema bodovanja:

- Nacrtane prave u koordinatnom sistemu ***(6 bodova)***
- Zaključak da su koordinate tačke A rješenje sistema jednačina $-x + 2y - 4 = 0$, $y = -\frac{3}{2}x + 6$ i traženje rješenja sistema (***2 boda)***
- Dobijanje rješenja $x = 2, y = 3$ (***2 boda***)
- Postavljanje i rješavanje sistema $-x + 2y - 4 = 0, 5x - 4y - 10 = 0$ (***2 boda***)
- Dobijanje rješenja $x = 6, y = 5$ (***2 boda***)
- Navođenje formule $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ***(2 boda)***
- Uvrštavanje $x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = 6, y_2 = 5$ u formulu i računanje udaljenosti ***(2 boda)***
- Dobijena udaljenost tačaka A i B, $\overline{AB} = \sqrt{20}$ ili $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ ***(2 boda)***

Napomena: *Ako učenici dođu do koordinata tačaka A i B grafičkim putem, crtajući prave u koordinatnom sistemu, bodovati kao u predloženoj shemi pod uslovom da su dobijena rješenja tj. koordinate tačaka A i B provjerili uvrštavanjem u polazne sisteme jednačina. Ako učenik odredi koordinate tačke A sa grafika, bez kasnije provjere uvrštavanjem koordinata u sistem, dobija maksimalno 3 boda (umjesto 4). Isto vrijedi za tačku* B.
Ako udaljenost tačaka izračunaju primjenom Pitagorine teoreme u koordinatnom sistemu, takođe bodovati analogno predloženom.

Zadatak 2. Ako se broj stranica mnogougla uveća za 25, broj dijagonala novog mnogougla je za 2025 veći od broja dijagonala početnog mnogougla. Koliko stranica je imao početni mnogougao?

Rješenje: Označimo broj stranica početnog mnogougla sa n. Tada je broj dijagonala tog mnogougla jednak $D = \frac{n(n-3)}{2}$.

Broj stranica novog mnogougla iznosi $n_1 = n + 25$, a broj dijagonala novog mnogougla je $D_1 = \frac{n_1(n_1-3)}{2} = \frac{(n+25)(n+22)}{2}$.

Iz uslova zadatka imamo da je $D_1 = D + 2025$, tj.

$$\frac{(n+25)(n+22)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} + 2025$$

$$(n+25)(n+22) = n(n-3) + 4050$$

$$n^2 + 22n + 25n + 550 = n^2 - 3n + 4050$$

$$47n + 550 = -3n + 4050$$

$$50n = 3500$$

$$n = 70$$

Dakle, početni mnogougao je imao 70 stranica.

Shema bodovanja

- Navedena formula za broj dijagonala, $D = \frac{n(n-3)}{2}$ (**3** ***boda***)
- Izvedena formula za broj dijagonala novog mnogougla, $D_1 = \frac{(n+25)(n+22)}{2}$ (***4 boda***)
- Uslov zadatka napisan kao jednačina $D_1 = D + 2025$ ili $\frac{(n+25)(n+22)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} + 2025$ (***4 boda***)
- Postavljena jednačina prevedena u oblik $n^2 + 22n + 25n + 550 = n^2 - 3n + 4050$ (***4 boda***)
- Riješena jednačina, tj. dobijeno rješenje $n = 70$ (***5 bodova***)

Zadatak 3.

a) Nađi sve cijele brojeve a za koje su izrazi $a + 4, a + 95$ kvadrati cijelih brojeva.
b) Odredi sve proste brojeve p za koje je $5p + 49$ kvadrat prirodnog broja.

Rješenje:
a) Pretpostavimo da su brojevi $a + 4$ i $a + 95$ kvadrati cijelih brojeva. Tada postoje nenegativni cijeli brojevi x i y takvi da vrijedi

$$x^2 = a + 95$$
$$y^2 = a + 4$$

(možemo uzeti da su x i y nenegativni jer ako je neki od njih negativan, možemo umjesto njega posmatrati njegovu apsolutnu vrijednost).
Oduzimanjem ove dvije jednakosti dobijamo $x^2 - y^2 = 91$, tj. $(x - y)(x + y) = 91$. Pošto je $x + y \geq 0$, to je i $x - y \geq 0$ (inače proizvod ne bi bio pozitivan). Kako su uz to $x - y$ i $x + y$ cjelobrojni faktori broja 91, oni mogu biti jednaki samo nekom od sljedećih brojeva: $1, 7, 13$ i 91. Pored toga, kako je $x - y \leq x + y$, imamo sljedeća dva slučaja:

1. Ako je $x - y = 1, x + y = 91$, tada je $x = 46, y = 45, a = 2021$.
2. Ako je $x - y = 7, x + y = 13$, tada je $x = 10, y = 3, a = 5$.

Dakle, cijeli brojevi a za koje su izrazi $a + 4, a + 95$ kvadrati cijelih brojeva su 5 i 2021.

Shema bodovanja (dio pod a) vrijedi 10 bodova):

- Dobijanje jednakosti $(x - y)(x + y) = 91$ ***(3 boda)***
- Zaključak da su cjelobrojni faktori broja 91: $1, 7, 13$, 91 (i $-1, -7, -13, -91$ ako učenik nije pretpostavio da su x i y nenegativni) ***(1 bod)***
- Pravilan zaključak koji su slučajevi mogući. ***(4 boda)***
  „Pravilan zaključak" znači sljedeće:
  - Navedena dva slučaja iz rješenja ukoliko je učenik zaključio da može pretpostaviti da su x i y nenegativni i da je $x - y \leq x + y$
  - Četiri slučaja: $1 \cdot 91, 7 \cdot 13, 13 \cdot 7, 91 \cdot 1$ ukoliko je učenik zaključio da može pretpostaviti da su x i y nenegativni, ali nije zaključio da je $x - y \leq x + y$.
  - Osam slučajeva: $1 \cdot 91, 7 \cdot 13, 13 \cdot 7, 91 \cdot 1, (-1) \cdot (-91), (-7) \cdot (-13), (-13) \cdot (-7), (-91) \cdot (-1)$ ukoliko učenik nije pretpostavio da su x i y nenegativni.

  Ukoliko učenik napiše moguće slučajeve, ali napravi mali previd (npr. izostavi slučaj $1 \cdot 91$ ili zaboravi slučajeve sa negativnim faktorima) dobija 2 od 4 boda.
- Pravilno rješavanje slučajeva koje je učenik dobio (čak i ukoliko nije pravilno napisao koji su sve slučajevi mogući) ***(2 boda)***

b) Neka je x prirodan broj čiji je kvadrat $5p + 49$. Tada vrijedi:

$$5p + 49 = x^2$$
$$5p = x^2 - 49$$
$$5p = (x - 7)(x + 7)$$

Pošto su brojevi 5 i p prosti, jedini prirodni djelioci broja $5p$ su $1, 5, p, 5p$. Kako je uz to $x + 7 > 5$ i $x + 7 > 1$, to imamo sljedeće dvije mogućnosti:

1. $x + 7 = p, x - 7 = 5 \Rightarrow x = 12$. U ovom slučaju je $p = x + 7 = 19$, što jest prost broj.
2. $x + 7 = 5p,\ x - 7 = 1 \Rightarrow x = 8$. Sada je $5p = x + 7 = 15$, odakle je $p = 3$, što također jest prost broj.

Znači, prosti brojevi p takvi da je $5p + 49$ kvadrat prirodnog broja su 3 i 19.

Shema bodovanja (dio pod b) vrijedi 10 bodova):

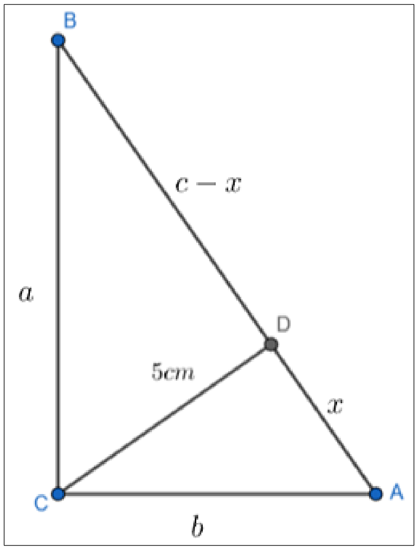
- Faktorizacija razlike kvadrata $5p = (x - 7)(x + 7)$ ***(2 boda)***
- Zaključak da su jedini djelioci broja $5p$ brojevi $1, 5, p, 5p$ ***(2 boda)***
- Zaključak koji su slučajevi mogući ***(4 boda)***

Napomena: *Ako učenik napiše „Kako je broj p prost, imamo sljedeće slučajeve", te pravilno navede slučajeve, dobija bodove iz oba prethodna koraka (iako možda nije eksplicitno naveo koji su djelioci broja* $5p$*).*

- Rješavanje mogućih slučajeva ***(2 boda)***

Zadatak 4. Dat je pravougli trougao ABC, sa pravim uglom u vrhu C. Visina CD ima dužinu 5 cm, a obim trougla ACD iznosi 15 cm. Odrediti dužine stranica trougla ABC.

Rješenje 1: Označimo tražene dužine stranica trougla ABC standardno sa $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}$ i $c = \overline{AB}$. Označimo dužinu duži AD sa x. Tada je $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = c - x$.



Pošto obim trougla ACD računamo po formuli $O = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ i vrijedi $O = 15$, a $\overline{CD} = 5$, slijedi:

$$\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 15$$

$$b + 5 + x = 15$$

$$b + x = 10 \quad (*)$$

Trougao ACD je pravougli, pa je po Pitagorinoj teoremi:

$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$, tj. $b^2 = x^2 + 25 \quad (**)$.

Iz $(*)$ slijedi $b = 10 - x$, pa uvrštavanjem u $(**)$ dobijamo:

$$(10 - x)^2 = x^2 + 25.$$

Rješavajući ovu jednačinu, dobijamo:

$$100 - 20x + x^2 = x^2 + 25 \ \Rightarrow 100 - 20x = 25 \ \Rightarrow 75 = 20x,$$

pa je $x = \frac{75}{20}$, tj. $x = \frac{15}{4}$ i $b = 10 - x = 10 - \frac{15}{4} = \frac{25}{4}$. Dakle, dužina stranice AC je $\frac{25}{4}$ cm.

Budući da je trougao ABC pravougli, iz Pitagorine teoreme slijedi

$$a^2 = c^2 - b^2,$$

a pošto je pravougli i trougao BCD, slijedi

$$a^2 = (c - x)^2 + 5^2.$$

Iz ove dvije jednakosti slijedi:

$$c^2 - b^2 = (c - x)^2 + 5^2$$

$$c^2 - \left(\frac{25}{4}\right)^2 = c^2 - 2cx + x^2 + 25$$

$$-\frac{625}{16} = -2c \cdot \frac{15}{4} + \left(\frac{15}{4}\right)^2 + 25$$

$$-\frac{625}{16} = -\frac{15}{2}c + \frac{225}{16} + 25$$

$$\frac{15}{2}c = \frac{1250}{16}$$

$$c = \frac{125}{12}\text{ cm}$$

Konačno, iz $a^2 = (c-x)^2 + 5^2$ slijedi

$$a^2 = \left(\frac{125}{12} - \frac{15}{4}\right)^2 + 25$$

$$a^2 = \left(\frac{20}{3}\right)^2 + 25$$

$$a^2 = \frac{400}{9} + 25$$

$$a^2 = \frac{625}{9}$$

(napomena: $a^2 = \frac{625}{9}$ bismo dobili i iz jednakosti $a^2 = c^2 - b^2$)

Budući da je a dužina stranice trougla, broj a mora biti pozitivan, pa uzimamo u obzir samo pozitivno rješenje jednačine $a^2 = \frac{625}{9}$, a to je $a = \frac{25}{3}$.

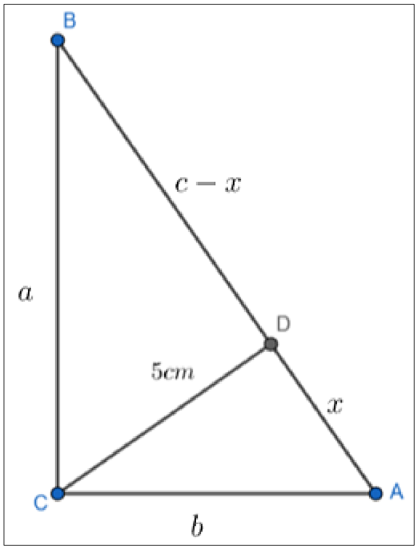
Dakle, dužine stranica pravouglog trougla ABC su $a = \frac{25}{3}$ cm, $b = \frac{25}{4}$ cm i $c = \frac{125}{12}$ cm.

Shema bodovanja za Rješenje 1

- Izračunato $AC + AD = b + x = 10$ (***1 bod***)
- Primijenjena Pitagorina teorema i dobijeno $b^2 = x^2 + 25$ (***1 bod***)
- Dobijena jednačina samo po x (ili samo po b) ***(2 boda)***
- Određene vrijednosti $x = \frac{15}{4}$ i $b = \frac{25}{4}$ (***3 boda***)

  Napomena: učenici mogu sistem $\begin{cases} b + x = 10 \\ b^2 = x^2 + 25 \end{cases}$ *riješiti na različite načine (npr. uvrstiti* $b = 10 - x$ *u drugu jednačinu ili drugu jednačinu pisati kao* $(b-x)(b+x) = 25$ *iz čega uvrštavanjem prve jednačine dobijamo* $10(b-x) = 25$*,...). Bez obzira na koji način rješavali, ako je ispravan i dobiju ispravno rješenje, dobivaju svih 5 bodova.*
- Dužina stranice BC izražena kao $a^2 = (c-x)^2 + 5^2$ (***3 boda***)
- Dobijena jednakost iz koje se može odrediti c: $c^2 - b^2 = (c-x)^2 + 5^2$ (***4 boda***)
- Riješena jednačina i dobijeno $c = \frac{125}{12}$ (***4 boda***)
- Iz jednakosti $a^2 = c^2 - b^2$ ili $a^2 = (c-x)^2 + 5^2$ dobijeno $a = \frac{25}{3}$ (***2 boda***)

Rješenje 2: Na isti način kao u Rješenju 1, i sa istim oznakama, dobije se $x = \frac{15}{4}$ i $b = \frac{25}{4}$.



Uočimo da su trouglovi ACD i ABC slični (imaju jedan zajednički ugao u vrhu A, te jedan pravi ugao). Iz sličnosti ovih trouglova slijedi:

$$\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{AB} : \overline{AC},$$

tj. $b : x = c : b$, odnosno $\frac{25}{4} : \frac{15}{4} = c : \frac{25}{4}$. Iz ove proporcije slijedi:

$$\frac{15}{4} \cdot c = \left(\frac{25}{4}\right)^2$$

$$\frac{15}{4} c = \frac{625}{16}$$

$$c = \frac{125}{12}$$

Sada lagano iz Pitagorine teoreme dobijamo $a = \frac{25}{3}$.

Napomena: Zadatak se može riješiti i koristeći sličnost trouglova ACD i BCD, jer se dobija $\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{BC} : \overline{CD}$, tj. $b : x = a : 5$, odakle je $a = \frac{25}{3}$, pa se iz Pitagorine teoreme dobija $c = \frac{125}{12}$.

Shema bodovanja za Rješenje 2

- Izračunate vrijednosti $x = \frac{15}{4}$ i $b = \frac{25}{4}$ (vidjeti shemu bodovanja za Rješenje 1) (***7 bodova***)
- Uočena sličnost trouglova ACD i ABC (ili ACD i BCD) (***3 boda***)
- Postavljena proporcija $b : x = c : b$ u kojoj je jedina nepoznata c (ili $b : x = a : 5$ u kojoj je jedina nepoznata a) (***5 bodova***)
- Izračunavanje $c = \frac{125}{12}$ (ili $a = \frac{25}{3}$, u slučaju druge sličnosti) (***2 boda***)
- Izračunavanje preostale stranice trougla iz Pitagorine teoreme (ili na neki drugi način, npr. također iz sličnosti) (***3 boda***)

Zadatak 5. Dati su realni brojevi $\boldsymbol{a, b, c}$, različiti od nule, takvi da je $\boldsymbol{a+b+c=0}$. Izračunati $\boldsymbol{\frac{a^2}{a^2-(b-c)^2}+\frac{b^2}{b^2-(a-c)^2}+\frac{c^2}{c^2-(a-b)^2}}$.

Rješenje: Uočimo da se, koristeći razliku kvadrata, prvi nazivnik može napisati kao:

$$a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$$

Pošto je po uslovu zadatka $a+b=-c$ i $a+c=-b$, dobijamo:

$a^2-(b-c)^2=(-c-c)(-b-b)=4bc.$

Analogno dobijemo za drugi i treći nazivnik da je $b^2-(a-c)^2=4ac$ i $c^2-(a-b)^2=4ab$. Dati izraz sad postaje:

$$\frac{a^2}{a^2-(b-c)^2}+\frac{b^2}{b^2-(a-c)^2}+\frac{c^2}{c^2-(a-b)^2}=\frac{a^2}{4bc}+\frac{b^2}{4ac}+\frac{c^2}{4ab}=$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3}{4abc} \qquad (*)$$

Iz uslova $a+b+c=0$ imamo $a+b=-c$, odakle kubiranjem dobijamo:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=-c^3$$

$$a^3+3ab(a+b)+b^3=-c^3$$

$$a^3+3ab(-c)+b^3=-c^3$$

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

Uvrštavajući posljednju jednakost u $(*)$, dobijamo:

$$\frac{a^2}{a^2-(b-c)^2}+\frac{b^2}{b^2-(a-c)^2}+\frac{c^2}{c^2-(a-b)^2}=\frac{3abc}{4abc}=\frac{3}{4}$$

Shema bodovanja

- Dobijeno $a^2-(b-c)^2=4bc$ (***5 bodova***)
- Dobijeno $\frac{a^2}{a^2-(b-c)^2}+\frac{b^2}{b^2-(a-c)^2}+\frac{c^2}{c^2-(a-b)^2}=\frac{a^3+b^3+c^3}{4abc}$ (***4 boda***)
- Dokaz $\frac{a^3+b^3+c^3}{4abc}=\frac{3}{4}$ (***11 bodova***)

  Napomena: 2 od ovih 11 bodova se dobija ako se u izrazu $\frac{a^3+b^3+c^3}{4abc}$ jedan broj izrazi preko druga dva (npr. $c=-a-b$). Ako se uz to izvrši (pravilno) kubiranje, dobija se još 2 boda.

Napomena: Ako učenik samo za neke specifične vrijednosti (npr. $a=b=1, c=-2$) dobije vrijednost $\frac{3}{4}$, to ne nosi bodove.