

Općinsko takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Kantona Sarajevo

28. 2. 2024.

Z A D A C I

VI razred

- 1. zadatak**
- a) Odrediti količnik i ostatak pri dijeljenju broja 2024 sa 14.
- b) Odrediti prirodan broj koji pri dijeljenju sa 11 daje količnik 25 i ostatak 7.
- c) Pri dijeljenju broja 400 brojem x dobija se količnik 30 i ostatak 10. Odrediti broj x .
- Napomena:** Nije dovoljno samo napisati konačan rezultat, već je potrebno da se vidi postupak kako ste došli do tog rezultata.

- 2. zadatak**
- Dati su skupovi: $A = \{1,3,4,5,8\}$, $B = \{1,2,5,6,7\}$, $C = \{2,3,4,6,8\}$.

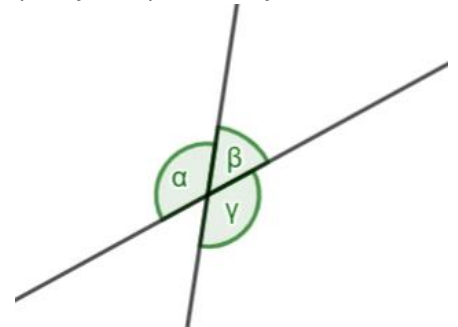
- a) Odrediti $(A \cap B) \cup (B \setminus C)$.
- b) Odrediti skup X tako da vrijedi $X \cup A = B \cup C$ i $X \cap A = C \setminus B$.

Napomena: Detaljno objasniti kako ste odredili koji elementi pripadaju skupu X , a koji ne.

- 3. zadatak**
- Dvije prave se sijeku, kao na slici, te su označeni uglovi α, β, γ .
Poznato je da je ugao α za 22° veći od dvostrukog ugla β .

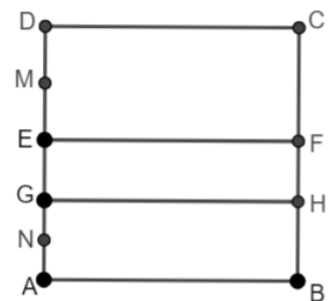
- a) Odrediti ugao β .
- b) Odrediti zbir uglova α i γ .

Napomena: Rezultate je potrebno napisati u stepenima i minutama, na primjer kao $24^\circ 35'$.



- 4. zadatak**
- a) Koje cifre treba ukloniti (izbaciti) iz broja 270230245 da bi se dobio najveći mogući broj djeljiv sa 6? Odgovor detaljno obrazložiti. Cifre koje nisu uklonjene ostaju u istom redoslijedu.
- b) Koje cifre treba ukloniti (izbaciti) iz broja 43464553 da bi se dobio najveći mogući broj djeljiv sa 45? Odgovor detaljno obrazložiti. Cifre koje nisu uklonjene ostaju u istom redoslijedu.

- 5. zadatak**
- Kvadrat $ABCD$ stranice 92 cm podijeljen je sa dvije paralelne prave na tri pravogaonika: $EFCD$, $GHFE$ i $ABHG$, kao na slici. Tačka M je sredina duži DE , a tačka N sredina duži AG . Ako je dužina duži MN jednaka 57 cm , odrediti površinu pravougaonika $GHFE$.



Vrijeme za izradu zadataka iznosi 150 minuta! Za izradu zadataka nije dozvoljeno koristiti kalkulator, već samo geometrijski pribor!

28. 2. 2024.

Z A D A C I

VII razred

1. zadatak Dati su izrazi

$$A = \frac{-\frac{2}{7} + 3}{-6\frac{1}{3}} - 4 \cdot \left(-\frac{3}{14} + 1\frac{1}{42}\right),$$

$$B = -2 \cdot \left[-1,1 : \left(-1\frac{5}{8} + \frac{15}{16}\right) + \frac{1}{10}\right].$$

- a) Izračunati vrijednost izraza A i B .
 b) Odrediti koji od datih izraza je veći i za koliko.

2. zadatak Merlin se nalazi na trkačkoj stazi i želi da pretrči 2024m. Najprije je pretrčao čitavu stazu i još $\frac{3}{5}$ staze, te napravio pauzu. Nakon pauze Merlin je pretrčao $\frac{13}{8}$ one dužine koju je pretrčao prije pauze. Na kraju, Merlin je zaključio da je pretrčao 55m više nego što je želio.

- a) Kolika je dužina trkačke staze?
 b) Koji dio staze Merlin treba pretrčati da bi pretrčao 300m? Rezultat predstaviti kao razlomak koji je maksimalno skraćen (tj. kojem su brojnik i nazivnik uzajamno prosti).

3. zadatak Dvije stranice trougla $\triangle ABC$ imaju dužine $a = 2\frac{1}{8}cm$ i $b = 7,125cm$.

- a) Može li treća stranica trougla $\triangle ABC$ imati dužinu $c = 4\frac{1}{2}cm$?
 b) Odrediti sve moguće vrijednosti dužine treće stranice c trougla $\triangle ABC$, ako ona zadovoljava uslove:
 i. Dužina stranice c je prirodan broj.
 ii. Za stranicu c vrijedi $|-c + 6,37| < \frac{3}{2}$.

4. zadatak Odrediti sve desetocifrene brojeve koji se pišu samo pomoću cifara 0 i 2, a djeljivi su s 36.
Napomena: Naravno, 0 ne može biti prva cifra broja.

5. zadatak U pravouglom trouglu $\triangle ABC$ ugao kod vrha A je prav. Tačka D je podnožje visine iz vrha A na stranicu BC (dakle, AD je visina ovog trougla). Simetrala unutrašnjeg ugla kod vrha B siječe duž AD u tački T , a duž AC u tački E . Poznato je da vrijedi $AT = BT = 18$.

- a) Odrediti veličine unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$.
 b) Odrediti dužinu duži CE .

Napomena: Za svaki izračunati ugao potrebno je opisati postupak njegovog računanja, nije dovoljno samo označiti vrijednost ugla na slici.

Vrijeme za izradu zadataka iznosi 150 minuta! Za izradu zadataka nije dozvoljeno koristiti kalkulator, već samo geometrijski pribor!

Općinsko takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Kantona Sarajevo

28. 2. 2024.

ZADACI

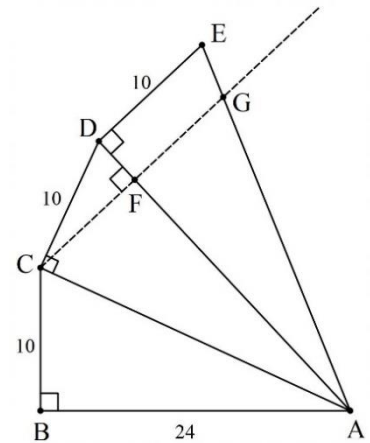
VIII razred

Napomena: Rezultate koje dobijete nije potrebno djelomično (parcijalno) korjenovati. Na primjer, ako u nekom koraku dobijete rezultat $\sqrt{45}$, ne morate ga pretvarati u $3\sqrt{5}$ (ali možete ako želite).

- 1. zadatak**
- a) Izračunati 3% od brojnog izraza A ako je $A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : 0.4$.
- b) Riješiti jednačinu u skupu realnih brojeva: $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{5x} + \frac{x}{400} = \frac{x}{10}$, $x \neq 0$.

- 2. zadatak**
- Dati su pravougli trouglovi ABC , ACD i ADE kao na slici. Također, na slici su date dužine stranica AB , BC , CD i DE . Visina CF trougla ACD je produžena do presjeka sa pravom AE , te je tačka presjeka označena sa G .

- a) Odrediti dužinu duži AE .
- b) Odrediti dužinu duži CF .
- c) Odrediti dužinu duži EG .



- 3. zadatak**
- Cijena ulaznice za prikazivanje filma „Oppenheimer“ u jednom kinu bila je 15 KM. Za prikazivanje filma „Barbie“ cijena ulaznice je bila niža. Zahvaljujući tome, broj gledatelja filma „Barbie“ bio je za 50% veći od broja gledatelja filma „Oppenheimer“, a ukupan novčani prihod od prikazivanja filma „Barbie“ bio je za 25% veći od ukupnog novčanog prihoda za prikazivanje filma „Oppenheimer“. Kolika je bila cijena ulaznice za „Barbie“? Odgovor obrazložiti!
- 4. zadatak**
- Odrediti najmanju vrijednost izraza $|x + 4| - |x| + |x - 3|$ u skupu realnih brojeva. Odgovor obrazložiti!
- 5. zadatak**
- Za unutrašnje uglove trougla ABC vrijedi $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 5 : 4$. Prava koja prolazi vrhom C i centrom O opisane kružnice trougla ABC siječe stranicu AB u tački D . Izračunati odnos $AD : DB$. Odgovor obrazložiti!

Vrijeme za izradu zadataka iznosi 150 minuta! Za izradu zadataka nije dozvoljeno koristiti kalkulator, već samo geometrijski pribor!

28. 2. 2024.

Z A D A C I

IX razred

1. zadatak

Dat je izraz

$$I = \frac{3x^2y - xy^2}{3x^3 - 3xy^2 - x^2y + y^3}, \text{ za } 3x^3 - 3xy^2 - x^2y + y^3 \neq 0.$$

a) Pojednostaviti izraz I što je više moguće.

b) Izračunati vrijednost izraza I za $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ i $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

2. zadatak

Jednakostranični trougao ABC i jednakokrako-pravougli trougao DEF imaju jednake obime. Površina trougla DEF iznosi 81 cm^2 . Izračunati površinu trougla ABC .

3. zadatak

Admir ima deset jednakih kuglica i deset jednakih kockica. Poznato je da dvije kuglice i tri kockice zajedno imaju masu $21,5$ grama, a da tri kuglice i dvije kockice zajedno imaju masu $19,5$ grama.

a) Odrediti koliku masu imaju svih deset kuglica i deset kockica zajedno.

b) Odrediti pojedinačnu masu kuglice i pojedinačnu masu kockice.

4. zadatak

Odrediti sve parove prirodnih brojeva (x, y) takve da vrijedi

$$x^3 + y^3 = 2024 + x^2y + xy^2.$$

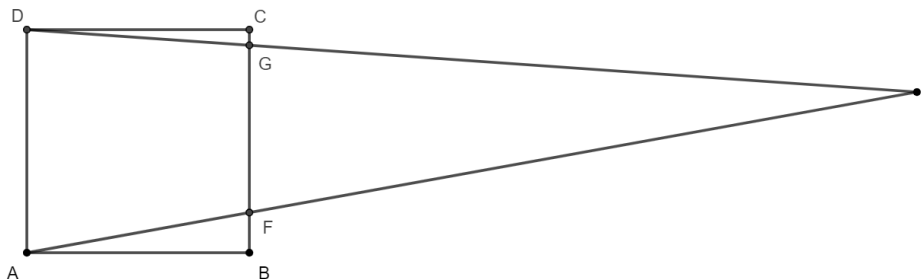
5. zadatak

Sara je nacrtala kvadrat $ABCD$ sa stranicom dužine a . Potom je Hana nacrtala trougao AED tako da su zadovoljeni sljedeći uslovi (vidi sliku):

- stranice $\overline{AE}$ i $\overline{DE}$ sijeku stranicu $\overline{BC}$ u tačkama F i G , redom;
- površina trougla AED je dva puta veća od površine kvadrata $ABCD$.

a) Odrediti površinu trougla FEG izraženu preko a .

b) Odrediti površinu četverougla $AFGD$ izraženu preko a .



Napomena: Ova slika služi samo u ilustrativne svrhe, nije za mjerenje.

Vrijeme za izradu zadataka iznosi 150 minuta! Za izradu zadataka nije dozvoljeno koristiti kalkulator, već samo geometrijski pribor!

Općinsko takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Kantona Sarajevo

28. 2. 2024.

Rješenja zadataka sa šemom bodovanja

VI razred

- 1. zadatak**
- a) Odrediti količnik i ostatak pri dijeljenju broja 2024 sa 14.
- b) Odrediti prirodan broj koji pri dijeljenju sa 11 daje količnik 25 i ostatak 7.
- c) Pri dijeljenju broja 400 brojem x dobija se količnik 30 i ostatak 10. Odrediti broj x .

Napomena: Nije dovoljno samo napisati konačan rezultat, već je potrebno da se vidi postupak kako ste došli do tog rezultata.

Rješenje:

a) Dijeljenjem dobijamo

$$\begin{array}{r} 2024: 14 = 144 \\ -14 \\ \hline 62 \\ -56 \\ \hline 64 \\ -56 \\ \hline 8 \end{array}$$

Dakle, dijeljenjem broja 2024 sa 14 dobijamo količnik 144 i ostatak 8.

b) Traženi broj je jednak $11 \cdot 25 + 7 = 275 + 7 = 282$.

c) Vrijedi

$$400 = 30 \cdot x + 10$$

$$30 \cdot x = 400 - 10$$

$$30 \cdot x = 390$$

$$x = 390:30 = 13.$$

Šema bodovanja:

- Dio pod a) nosi **6 bodova**, pri čemu ako učenik ima samo tačan količnik dobija **3 boda**.
- Dio pod b) nosi također **6 bodova**. Ako učenik napiše da je traženi broj jednak $11 \cdot 25 + 7$, ali nakon toga pogriješi u računu, dobija **4 boda** od ovih 6.
- Dio pod c) nosi **8 bodova**. Učenik može odmah zaključiti $x = (400 - 10): 30 = 390: 30 = 13$, te u tom slučaju dobija sve bodove. Ukoliko učenik ipak radi kao u rješenju, za dobijanje relacije $400 = 30 \cdot x + 10$ dobija **4 boda**, za svođenje na $30 \cdot x = 390$ dobija još **2 boda**, te za tačan rezultat preostala **2 boda**.

2. zadatak Dati su skupovi: $A = \{1,3,4,5,8\}$, $B = \{1,2,5,6,7\}$, $C = \{2,3,4,6,8\}$.

a) Odrediti $(A \cap B) \cup (B \setminus C)$.

b) Odrediti skup X tako da vrijedi $X \cup A = B \cup C$ i $X \cap A = C \setminus B$.

Napomena: Detaljno objasniti kako ste odredili koji elementi pripadaju skupu X , a koji ne.

Rješenje: **a)** $(A \cap B) \cup (B \setminus C) =$

$$\begin{aligned} & (\{1,3,4,5,8\} \cap \{1,2,5,6,7\}) \cup (\{1,2,5,6,7\} \setminus \{2,3,4,6,8\}) = \\ & = \{1,5\} \cup \{1,5,7\} = \{1,5,7\} \end{aligned}$$

b) Iz prvog uslova imamo

$$X \cup A = B \cup C$$

$$X \cup \{1,3,4,5,8\} = \{1,2,5,6,7\} \cup \{2,3,4,6,8\}$$

$$X \cup \{1,3,4,5,8\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

Odavde zaključujemo da elementi 2,6,7 moraju pripadati skupu X (jer ih nema u skupu $\{1,3,4,5,8\}$, a ima ih u skupu $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$). Također, zaključujemo da skup X ne može imati elemente koji nisu u skupu $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, pa je još potrebno ispitati da li elementi 1,3,4,5,8 pripadaju skupu X .

Iz drugog uslova imamo

$$X \cap A = C \setminus B$$

$$X \cap \{1,3,4,5,8\} = \{2,3,4,6,8\} \setminus \{1,2,5,6,7\}$$

$$X \cap \{1,3,4,5,8\} = \{3,4,8\}.$$

Kako je presjek dva skupa ustvari skup svih zajedničkih elemenata tih skupova, to elementi 3,4,8 moraju pripadati skupu X . S druge strane, kako elementi 1 i 5 pripadaju skupu $\{1,3,4,5,8\}$, ali ne pripadaju presjeku tog skupa i skupa X , to zaključujemo da oni ne pripadaju skupu X .

Sada konačno zaključujemo da je $X = \{2,3,4,6,7,8\}$.

Šema bodovanja:

- Dio pod a) nosi **9 = 3 × 3 bodova** (po 3 boda za presjek, razliku i uniju skupova).
- Dio pod b) nosi **11 bodova**, i to:
 - **1 bod** za relaciju $X \cup \{1,3,4,5,8\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (ili $X \cup A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$)
 - **3 boda** za zaključak da elementi 2,6,7 sigurno pripadaju skupu X
 - **1 bod** za relaciju $X \cap \{1,3,4,5,8\} = \{3,4,8\}$ (ili $X \cap A = \{3,4,8\}$)
 - **2 boda** za zaključak da elementi 3,4,8 pripadaju skupu X
 - **3 boda** za zaključak da elementi 1 i 5 ne pripadaju skupu X
 - **1 bod** za konačan zapis skupa X

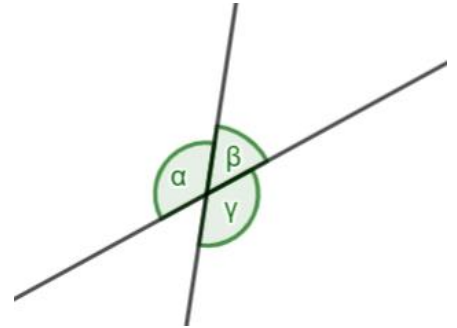
3. zadatak

Dvije prave se sijeku, kao na slici, te su označeni uglovi α , β , γ .
Poznato je da je ugao α za 22° veći od dvostrukog ugla β .

a) Odrediti ugao β .

b) Odrediti zbir uglova α i γ .

Napomena: Rezultate je potrebno napisati u stepenima i minutama, na primjer kao $24^\circ 35'$.

**Rješenje:**

a) Uglovi α i β su naporedni (suplementni), pa je $\alpha + \beta = 180^\circ$. **(2 boda)**

Na osnovu uslova zadatka je $\alpha = 2 \cdot \beta + 22^\circ$ **(3 boda)**, pa je:

$$2 \cdot \beta + 22^\circ + \beta = 180^\circ \quad \textbf{(2 boda)}$$

$$3 \cdot \beta = 180^\circ - 22^\circ$$

$$3 \cdot \beta = 158^\circ \quad \textbf{(2 boda)}$$

$$\beta = 158^\circ : 3$$

$$\beta = 52^\circ 40' \quad \textbf{(3 boda)}$$

Napomena: Ukoliko učenik ne napiše eksplicitno relaciju $\alpha = 2 \cdot \beta + 22^\circ$, već iz relacije $\alpha + \beta = 180^\circ$ odmah napiše $2 \cdot \beta + 22^\circ + \beta = 180^\circ$, dobija i bodove predviđene za relaciju $\alpha = 2 \cdot \beta + 22^\circ$ (jer ustvari implicitno koristi tu relaciju). Generalno, na koji god način učenik dođe do relacije $2 \cdot \beta + 22^\circ + \beta = 180^\circ$, dobija svih 7 bodova predviđenih do tog dijela (npr. nije neophodno da eksplicitno napiše $\alpha + \beta = 180^\circ$).

b) Kako je $\alpha + \beta = 180^\circ$, to je

$$\alpha = 180^\circ - 52^\circ 40'$$

$$\alpha = 127^\circ 20' \quad \textbf{(3 boda)}$$

Uglovi α i γ su unakrsni, zbog čega je $\alpha = \gamma = 127^\circ 20'$ **(2 boda)**

Konačno, imamo

$$\alpha + \gamma = 2\alpha = 2 \cdot 127^\circ 20' = 254^\circ 40' \quad \textbf{(3 boda)}$$

Napomena: Učenik ne mora iz relacije $\alpha + \beta = 180^\circ$ odrediti ugao α , to može uraditi i iz relacije $\alpha = 2 \cdot \beta + 22^\circ$, ali svejedno određivanje ugla α nosi 3 boda. Učenik ne mora nigdje eksplicitno napisati koliki je ugao γ , za ta 2 boda je dovoljno da napiše da su uglovi α i γ jednaki. Učenik čak ne mora izračunati ni ugao α ni ugao γ , već može zaključiti da je zbir $\alpha + \gamma$ jednak razlici punog ugla i dvostrukog ugla β (tj. zbira ugla β i njemu unakrsnog ugla), pa je $\alpha + \gamma = 360^\circ - 2 \cdot \beta = 360^\circ - 2 \cdot 52^\circ 40' = 360^\circ - 105^\circ 20' = 254^\circ 40'$. Ukoliko učenik pogriješi samo u sabiranju ili množenju brojeva, ali konceptualno ispravno uradi zadatak pod b) (u smislu da su tačne jednačine koje postavlja i dobio bi tačan rezultat da nema te računске greške), dobija 5 od 8 bodova za dio pod b). Ovo pravilo se primjenjuje i ako je učenik dobio pogrešan rezultat pod a), ali je konceptualno tačno uradio zadatak pod b) (u smislu da bi dobio tačan rezultat pod b) da je tačno izračunao ugao β).

- 4. zadatak**
- a)** Koje cifre treba ukloniti (izbaciti) iz broja 270230245 da bi se dobio najveći mogući broj djeljiv sa 6? Odgovor detaljno obrazložiti. Cifre koje nisu uklonjene ostaju u istom redoslijedu.
- b)** Koje cifre treba ukloniti (izbaciti) iz broja 43464553 da bi se dobio najveći mogući broj djeljiv sa 45? Odgovor detaljno obrazložiti. Cifre koje nisu uklonjene ostaju u istom redoslijedu.

Rješenje:

a) Broj je djeljiv sa 6 ako je djeljiv sa 2 i sa 3. Da bi broj bio djeljiv sa 2, zadnja cifra mora biti parna, pa je zbog toga neophodno ukloniti cifru 5. Preostali broj 27023024 je paran, ali nije djeljiv sa 3, jer je zbir njegovih cifara $2 + 7 + 0 + 2 + 3 + 0 + 2 + 4 = 20$, što nije djeljivo sa 3. Sada primijetimo da možemo dobiti broj djeljiv sa 3 jedino ako izbacimo cifru 2 (jer će onda zbir cifara biti 18). Ako ne izbacimo cifru 2 na početku, ostat će nam sedmocifreni broj koji počinje sa 2, a ako izbacimo cifru 2 sa početka, ostat će nam sedmocifreni broj koji počinje sa 7. Zbog toga treba ukloniti cifru 2 sa početka. Dakle, treba ukloniti prvu i posljednju cifru, te dobijamo broj 7023024 koji je djeljiv sa 6.

b) Broj je djeljiv sa 45 ako je djeljiv sa 9 i sa 5. Da bi broj bio djeljiv sa 5, zadnja cifra mora biti 0 ili 5, pa je zbog toga neophodno ukloniti cifru 3. Preostali broj 4346455 je djeljiv sa 5, ali nije djeljiv sa 9, jer je zbir njegovih cifara $4 + 3 + 4 + 6 + 4 + 5 + 5 = 31$, što nije djeljivo sa 9. Sada primijetimo da možemo dobiti broj djeljiv sa 9 jedino ako izbacimo cifru 4 (jer će onda zbir cifara biti 27). Ako izbacimo cifru 4 sa početka, ostat će nam šestocifreni broj koji počinje sa 3, a ako izbacimo neku od preostale dvije cifre 4, ostat će nam šestocifreni broj koji počinje sa 4. Zbog toga ne treba ukloniti cifru 4 sa početka. Kako je $436455 > 434655$, treba izbaciti drugu (od tri) četvorke. Dakle, treba izbaciti posljednju cifru 3, te drugu četvorku, i tako dobijamo najveći mogući broj 436455.

Šema bodovanja:

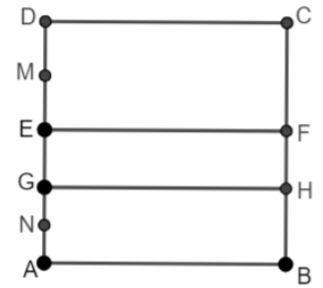
Dijelovi pod a) i b) nose po **10 bodova**, a za oba dijela je ista šema:

- Zaključak da je potrebno ukloniti posljednju cifru (**3 boda**)
- Zaključak da preostali broj (nakon uklanjanja posljednje cifre) nije djeljiv sa 3 (tj. sa 9 za dio pod b) (**1 bod**), te da je potrebno ukloniti cifru 2 (4) da bi bio djeljiv sa 3 (9) (**3 boda**)
- Ispravan zaključak koju cifru 2 (4) ukloniti da bi se dobio najveći mogući broj (**3 boda**)

Napomena: Naravno, učenik ne mora na ovaj način donositi zaključke. Na primjer, sasvim je validno da nakon što izbací posljednju cifru učenik provjeri sve mogućnosti. Na primjer, u dijelu pod a) to bi zapravo bilo provjeravanje koji od brojeva 2702302, 2702304, 2702324, 2702024, 2703024, 2723024, 2023024, 7023024 su djeljivi sa 6, te odabir najvećeg od njih.

5. zadatak

Kvadrat $ABCD$ stranice 92 cm podijeljen je sa dvije paralelne prave na tri pravogaonika: $EFCD$, $GHFE$ i $ABHG$, kao na slici. Tačka M je sredina duži DE , a tačka N sredina duži AG . Ako je dužina duži MN jednaka 57 cm , odrediti površinu pravougaonika $GHFE$.

**Rješenje:**

Neka je $DM = ME = x$, a $GN = NA = y$. Kako je $DA = DM + MN + NA$, to imamo $92 = x + 57 + y$, pa je $x + y = 92 - 57 = 35$. **(5 bodova)**

Napomena: Učenik ne mora uvoditi nikakve oznake, za ovih 5 bodova dovoljno je da dobije $DM + NA = 35$.

Sada ćemo odrediti dužinu duži EG (ovaj dio zadatka vrijedi 10 bodova, te ćemo pokazati dva načina kako se to može uraditi):

I način:

Kako je $MN = 57\text{ cm}$ i $ME + EG + GN = MN$, to je $x + EG + y = 57$. **(3 boda)**

Međutim, iz $x + y = 35$ imamo $35 + EG = 57$, pa je $EG = 57 - 35 = 22\text{ cm}$. **(7 bodova)**

II način:

Kako je $x + y = 35$, množenjem te relacije sa 2 dobijamo $2x + 2y = 70$. Međutim, kako je $DE = 2x$ i $GA = 2y$, to je $DE + GA = 70\text{ cm}$. **(5 bodova)**

S druge strane, kako je $AD = DE + EG + GA$, to je $92 = DE + EG + GA$, pa zbog $DE + GA = 70$, dobijamo $92 = 70 + EG$, odakle je $EG = 92 - 70 = 22\text{ cm}$. **(5 bodova)**

Sada lako završavamo zadatak. Kako je $ABHG$ pravougaonik, to je $GH = AB = 92\text{ cm}$. Tražena površina je

$$P_{GHFE} = GE \cdot GH = 22 \cdot 92 = 2024\text{ cm}^2. \text{ (5 bodova)}$$

Napomene:

- Učenik ne gubi bodove ako ne objasni zašto je dužina duži GH (ili EF) jednaka 92 cm .
- Učenik ne gubi bodove ako ne piše mjerne jedinice (cm ili cm^2).
- Učenik 3 boda za pisanje relacije $MN = ME + EG + GN$ (ili $57 = ME + EG + GN$) može osvojiti i ako nije osvojio prvih 5 bodova.

Općinsko takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Kantona Sarajevo

28. 2. 2024.

Rješenja zadataka sa šemom bodovanja

VII razred

1. Dati su izrazi

$$A = \frac{-\frac{2}{7} + 3}{-6\frac{1}{3}} - 4 \cdot \left(-\frac{3}{14} + 1\frac{1}{42}\right),$$

$$B = -2 \cdot \left[-1,1 : \left(-1\frac{5}{8} + \frac{15}{16}\right) + \frac{1}{10}\right].$$

a) Izračunati vrijednost izraza A i B .

b) Odrediti koji od datih izraza je veći i za koliko.

Rješenje:

a) Najprije izračunajmo vrijednost izraza A . Imamo,

$$\begin{aligned} A &= \frac{-\frac{2}{7} + 3}{-6\frac{1}{3}} - 4 \cdot \left(-\frac{3}{14} + 1\frac{1}{42}\right) = \frac{-\frac{2}{7} + \frac{21}{7}}{-\frac{19}{3}} - 4 \cdot \left(-\frac{9}{42} + \frac{43}{42}\right) = \\ &= \frac{\frac{19}{7}}{-\frac{19}{3}} - 4 \cdot \frac{34}{42} = -\frac{3}{7} - \frac{68}{21} = -\frac{9}{21} - \frac{68}{21} = -\frac{77}{21} = -\frac{11}{3} = -3\frac{2}{3}. \quad (8 \text{ bodova}) \end{aligned}$$

Sada izračunajmo vrijednost izraza B . Imamo,

$$\begin{aligned} B &= -2 \cdot \left[-1,1 : \left(-1\frac{5}{8} + \frac{15}{16}\right) + \frac{1}{10}\right] = -2 \cdot \left[-\frac{11}{10} : \left(-\frac{13}{8} + \frac{15}{16}\right) + \frac{1}{10}\right] = \\ &= -2 \cdot \left[-\frac{11}{10} : \left(-\frac{26}{16} + \frac{15}{16}\right) + \frac{1}{10}\right] = -2 \cdot \left[-\frac{11}{10} : \left(-\frac{11}{16}\right) + \frac{1}{10}\right] = \\ &= -2 \cdot \left[-\frac{11}{10} \cdot \left(-\frac{16}{11}\right) + \frac{1}{10}\right] = -2 \cdot \left[\frac{16}{10} + \frac{1}{10}\right] = -2 \cdot \frac{17}{10} = -\frac{17}{5} = -3\frac{2}{5}. \quad (8 \text{ bodova}) \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da je $A = -3\frac{1}{3}$ i $B = -3\frac{2}{5}$.

b) Svedimo najprije dobivene razlomke na zajednički nazivnik. Kako je $NZS(3,5) = 15$, imamo

$$\begin{aligned} A &= -3\frac{2}{3} = -\frac{11}{3} = -\frac{11 \cdot 5}{3 \cdot 5} = -\frac{55}{15} = \frac{-55}{15}, \quad (1 \text{ bod}) \\ B &= -3\frac{2}{5} = -\frac{17}{5} = -\frac{17 \cdot 3}{5 \cdot 3} = -\frac{51}{15} = \frac{-51}{15}. \quad (1 \text{ bod}) \end{aligned}$$

Kako je $-51 > -55$ možemo zaključiti da je $\frac{-51}{15} > \frac{-55}{15}$. Dakle, zaključujemo da je izraz B veći od izraza A . **(1 bod)**

Kako je $-\frac{51}{15} - \left(-\frac{55}{15}\right) = -\frac{51}{15} + \frac{55}{15} = \frac{4}{15}$, izraz B je za $\frac{4}{15}$ veći od izraza A . **(1 bod)**

Ukoliko učenik nije dobio tačne rezultate u dijelu pod a), bodovi se dodjeljuju prema sljedećoj šemi:

- Ispravno dobijena vrijednost brojnika $-\frac{2}{7} + 3 = \frac{19}{7}$ vrijedi 1 bod.

- Ispravno dobijena vrijednost izraza u zagradi $-\frac{3}{14} + 1\frac{1}{42} = \frac{34}{42}$ vrijedi 2 boda. Ako je učenik samo pretvorio $1\frac{1}{42} = \frac{43}{42}$, a nije tačno sabrao, dobija 1 bod.
- Ispravno dobijena vrijednost dvojnog razlomka $\frac{\frac{19}{7}}{-\frac{19}{3}} = -\frac{3}{7}$ vrijedi 2 boda. Ukoliko je učenik dobio nazivnik $-\frac{19}{3}$ ali nije dobro izračunao dvojni razlomak dobija 1 bod. Ukoliko učenik nije skratio dvojni razlomak i dobio rezultat $-\frac{57}{133}$ učenik dobija 2 boda.
- Ispravno dobijena vrijednost izraza $4 \cdot \frac{34}{42} = \frac{68}{21}$ vrijedi 1 bod. Ukoliko učenik ne skрати dobijeni razlomak, već ostavi u obliku $\frac{136}{42}$, i dalje dobija 1 bod.
- Ispravno dobijena vrijednost izraza $-\frac{3}{7} - \frac{68}{21} = -3\frac{2}{3}$ vrijedi 2 boda. Ukoliko učenik dobije vrijednost $-\frac{77}{21}$, ali ne skрати razlomak dobija 1 bod. Ukoliko učenik dobije vrijednost $-\frac{11}{3}$, ali ne pretvori rezultat u mješoviti broj, i dalje dobija 2 boda.
- Ispravno dobijena vrijednost izraza u zagradi $-1\frac{5}{8} + \frac{15}{16} = -\frac{11}{16}$ vrijedi 2 boda. Ukoliko je učenik pravilno pretvorio mješoviti broj $-1\frac{5}{8}$ u razlomak $-\frac{13}{8}$, ali je pogrešno sabrao, dobija 1 bod.
- Ispravno dobijena vrijednost dijeljenja $-\frac{11}{10} : \left(-\frac{11}{16}\right) = \frac{16}{10}$ vrijedi 2 boda. Ukoliko učenik ispravno prijeđe sa dijeljenja na množenje, ali dobije pogrešan rezultat množenja, dobija 1 bod. Ukoliko učenik skрати razlomak $\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$, i dalje dobija 2 boda.
- Ispravno izvršeno zbrajanje $\frac{8}{5} + \frac{1}{10} = \frac{16}{10} + \frac{1}{10} = \frac{17}{10}$ vrijedi 1 bod.
- Ispravno izvršeno množenje $-2 \cdot \frac{17}{10} = -3\frac{2}{5}$ vrijedi 2 boda. Ukoliko učenik dobije rezultat $-\frac{34}{10}$ ali ne skрати razlomak dobija 1 bod. Ukoliko učenik dobije rezultat $-\frac{17}{5}$, ali ne pretvori u mješoviti broj učenik dobija 2 boda.

Napomene

- Ukoliko je učenik uporedio dobivene razlomke tako što je uporedio samo brojeve $-\frac{2}{3}$ i $-\frac{2}{5}$, šema bodovanja ostaje ista.
- Ukoliko je učenik uporedio dobivene razlomke tako što ih je pretvorio u decimalne brojeve a zatim izvršio upoređivanje, onda ispravno pretvaranje svakog od dobijenih razlomaka nosi 1 bod, a ispravno upoređivanje nosi 2 boda.
- Ukoliko je učenik dobio pogrešnu vrijednost bar jednog od izraza A ili B , ali je upoređivanje tako dobijenih rezultata izvršio pravilno dobija 1 bod na dio zadataka pod b).

2. Merlin se nalazi na trkačkoj stazi i želi da pretrči $2024m$. Najprije je pretrčao čitavu stazu i još $\frac{3}{5}$ staze, te napravio pauzu. Nakon pauze Merlin je pretrčao $\frac{13}{8}$ one dužine koju je pretrčao prije pauze. Na kraju, Merlin je zaključio da je pretrčao $55m$ više nego što je želio.
- a) Kolika je dužina trkače staze?
- b) Koji dio staze Merlin treba pretrčati da bi pretrčao $300m$? Rezultat predstaviti kao razlomak koji je maksimalno skraćen (tj. kojem su brojnik i nazivnik uzajamno prosti).

Rješenje:

a) Označimo sa x dužinu trkačke staze na kojoj se Merlin nalazi. Prije pauze Merlin je pretrčao $x + \frac{3}{5}x = \frac{8}{5}x$ metara **(3 boda)**. Nakon pauze Merlin je pretrčao $\frac{13}{8} \cdot \frac{8}{5}x = \frac{13}{5}x$ metara **(3 boda)**. Kako je pretrčao $55m$ više nego što je želio, možemo zaključiti da je pretrčao ukupno $2024m + 55m = 2079m$ **(1 bod)**. Sada možemo formirati jednačinu

$$\frac{8}{5}x + \frac{13}{5}x = 2079, \text{ (3 boda)}$$

tj.

$$\frac{21}{5}x = 2079. \text{ (2 boda)}$$

Odavde se dobija da je

$$x = 495. \text{ (3 boda)}$$

Dakle zaključujemo da dužina staze na kojoj Merlin trči iznosi $495m$.

b) Da bi Merlin pretrčao $300m$, on treba pretrčati $\frac{300}{495}$ —ti dio staze **(3 boda)**. Nakon skraćivanja sa 15 dobijamo da Merlin treba pretrčati $\frac{20}{33}$ —ti dio staze **(2 boda)**.

Napomene:

- Ukoliko učenik pogrešno sabere $2024m + 55m$, te zbog toga postavi pogrešnu jednačinu, i dalje dobija bodove za postavljanje jednačine (jer se pravilno sabiranje boduje odvojeno, i to jednim bodom).
- Ukoliko učenik dobije pogrešan rezultat u dijelu a), ali ima ispravan postupak za rješavanje dijela b) (jasno, neće dobiti tačan rezultat jer je u dijelu a) dobio pogrešan rezultat), dobija 3 od 5 bodova za dio b).
- Učenik može reći da je Merlin pretrčao $x + \frac{3}{5}x$ metara (bez izračunavanja da je to $\frac{8}{5}x$), a nakon pauze $\frac{13}{8} \cdot \left(x + \frac{3}{5}x\right)$ (bez izračunavanja da je to $\frac{13}{5}x$). Na taj način za ove korake dobija 2 od 3 moguća boda, a taj preostali bod dobija kasnije ako u jednačini pravilno izračuna da je to $\frac{8}{5}x + \frac{13}{5}x$ (tj. dva boda ukupno, za oba koraka po jedan).

3. Dvije stranice trougla $\triangle ABC$ imaju dužine $a = 2\frac{1}{8}cm$ i $b = 7,125cm$.
- Može li treća stranica trougla $\triangle ABC$ imati dužinu $c = 4\frac{1}{2}cm$?
 - Odrediti sve moguće vrijednosti dužine treće stranice c trougla $\triangle ABC$, ako ona zadovoljava uslove:
 - Dužina stranice c je prirodan broj.
 - Za stranicu c vrijedi $|-c + 6.37| < \frac{3}{2}$.

Rješenje:

a) Da bi postojao trougao sa stranicama $a = 2\frac{1}{8}cm$, $b = 7,125cm$ i $c = 4\frac{1}{2}cm$, mora biti zadovoljena nejednakost trougla, odnosno zbir dužina svake dvije stranice trougla mora biti veći od dužine treće stranice trougla (**1 bod**). Kako je

$$2\frac{1}{8} + 4\frac{1}{2} = 2,125 + 4,5 = 6,625 < 7,125,$$

nejednakost trougla nije zadovoljena. Dakle, stranica c ne može imati dužinu $4\frac{1}{2}cm$ (**4 boda**).

b) Iz nejednakosti trougla slijedi da dužina stranice c mora biti manja od zbira dužina stranica a i b , odakle zaključujemo da vrijedi

$$c < a + b = 2\frac{1}{8} + 7,125 = 9,25. \text{ (3 boda)}$$

Dalje, dužina stranice a mora biti manja od zbira dužina stranica b i c , odnosno

$$a < b + c \Leftrightarrow 2,125 < 7,125 + c,$$

što vrijedi za svaku pozitivnu vrijednost broja c (**1 bod**).

Konačno, dužina stranice b mora biti manja od zbira dužina stranica a i c , odnosno

$$b < a + c \Leftrightarrow c > b - a = 7,125 - 2,125 = 5. \text{ (4 boda)}$$

Kako je dužina stranice c prirodan broj, i kako vrijedi $5 < c < 9,25$, zaključujemo

$$c \in \{6, 7, 8, 9\}. \text{ (3 boda)}$$

Ako je $c = 6$, onda uvrštavanjem u $|-c + 6.37| < \frac{3}{2}$ dobijamo

$$|-6 + 6.37| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow |0,37| < 1,5 \Leftrightarrow 0,37 < 1,5.$$

Posljednja nejednakost je tačna, pa $c = 6$ zadovoljava uslove zadatka (**1 bod**).

Slično, za $c = 7$ dobijamo $0.63 < 1.5$, pa je i to rješenje zadatka (**1 bod**). Međutim, za $c = 8$ dobijamo $1.63 < 1.5$, što nije tačno (**1 bod**), kao ni za $c = 9$ (dobijamo $2.63 < 1.5$) (**1 bod**).

Dakle, jedine mogućnosti za c su $c = 6$ i $c = 7$.

Napomena:

- Moguće je da neki učenici znaju da je $|-c + 6.37| = \begin{cases} -c + 6.37 & \text{za } c \leq 6.37 \\ c - 6.37 & \text{za } c > 6.37 \end{cases}$. Na taj način se u slučaju $c \leq 6.37$ dobija $c > 6.37 - 1.5 = 4.87$, pa $c \in \{5, 6\}$. U slučaju $c > 6.37$ dobijamo $c < 6.37 + 1.5 = 7.87$, odakle je $c = 7$. Ako učenik radi na ovaj način, **1 bod** dobija za $|-c + 6.37| = \begin{cases} -c + 6.37 & \text{za } c \leq 6.37 \\ c - 6.37 & \text{za } c > 6.37 \end{cases}$, **2 boda** za dobijanje $c > 4.87$ u prvom slučaju i još **2 boda** za zaključak $c \in \{5, 6\}$, **2 boda** za dobijanje $c < 7.87$ u drugom slučaju, te **2 boda** za zaključak $c = 7$. Ostaje još ispitati ove slučajeve. Za $c = 5$ nemamo trougao jer je $5 + 2.125 = 7.125$ (a da bi bio trougao treba da bude $5 + 2.125 > 7.125$) (**2 boda**). Za $c = 6$ imamo trougao jer je $6 + 2.125 > 7.125$ (**2 boda**), kao i za $c = 7$ jer je $7 + 2.125 > 7.125$ (**2 boda**) (dovoljno je provjeriti da je najveća stranica manja od zbira preostale dvije).

4. Odrediti sve desetocifrene brojeve koji se pišu samo pomoću cifara 0 i 2, a djeljivi su s 36.

Napomena: Naravno, 0 ne može biti prva cifra broja.

Rješenje:

Broj je djeljiv s 36 ako je djeljiv i sa 4 i sa 9 (**2 boda**).

Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbir cifara djeljiv s 9 (**2 boda**). Neka je k cifara desetocifrenog broja jednako 2 (**1 bod**). Tada je preostalih $10 - k$ cifara jednako 0, i vrijedi $1 \leq k \leq 10$ (ne može biti $k = 0$ jer ne mogu sve cifre biti jednake 0) (**1 bod**). Zbir cifara ovog broja je $2 \cdot k + 0 \cdot (10 - k) = 2k$, pa broj $2k$ mora biti djeljiv s 9 (**2 boda**). Zbog $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ imamo $2k \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. Jedini od ovih brojeva koji je djeljiv s 9 je 18, a to se postiže za $k = 9$. Dakle, jedini način da traženi broj bude djeljiv s 9 je da sadrži 9 cifara 2 i jednu cifru 0 (**5 bodova**).

Broj je djeljiv s 4 ako i samo ako mu je dvocifreni završetak djeljiv sa 4 (**2 boda**). Kako traženi broj ima samo jednu cifru 0, mogućnosti za njegov dvocifreni završetak su 22, 20 i 02 (**2 boda**).

Jedini od ovih brojeva koji je djeljiv sa 4 je 20. To znači da 0 mora biti cifra jedinica (**2 boda**).

Zaključujemo, jedini broj s traženom osobinom je 2222222220. (**1 bod**)

Napomene:

- Generalno, navođenje kada je broj djeljiv sa 36 nosi 2 boda, dokaz da broj mora sadržavati 9 dvica i jedna nulu nosi 11 bodova, dokaz da cifra 0 mora biti na kraju nosi 6 bodova, te zapis konačnog broja 1 bod. Sasvim je moguće da učenik prvo pokaže da je posljednja cifra 0 (za šta treba dobiti 6 bodova za taj dio čak i ako nema ništa urađeno u drugom dijelu).
- Naravno, moguće je da učenik ručno ispita sve mogućnosti za broj dvica, tj. da kaže "ako imamo jednu dvicu, zbir cifara je 2, što nije djeljivo sa 9, ako imamo dvije dvice, zbir cifara je 4, što opet nije djeljivo sa 9, ...", te tako zaključi da je jedina mogućnost da broj ima 9 dvica. To je sasvim validno, te učenik dobija sve bodove predviđene za taj dio zadatka.
- Ukoliko učenik bez obrazloženja navede da je broj $2k$ djeljiv s 9 samo za $k = 9$, dobija 3 od 5 bodova za ovaj korak. Da bi dobio svih 5 bodova potrebno je da obrazloži zašto je $k = 9$ jedina mogućnost ili da se negdje u radu vidi da je provjerio sve mogućnosti za k .

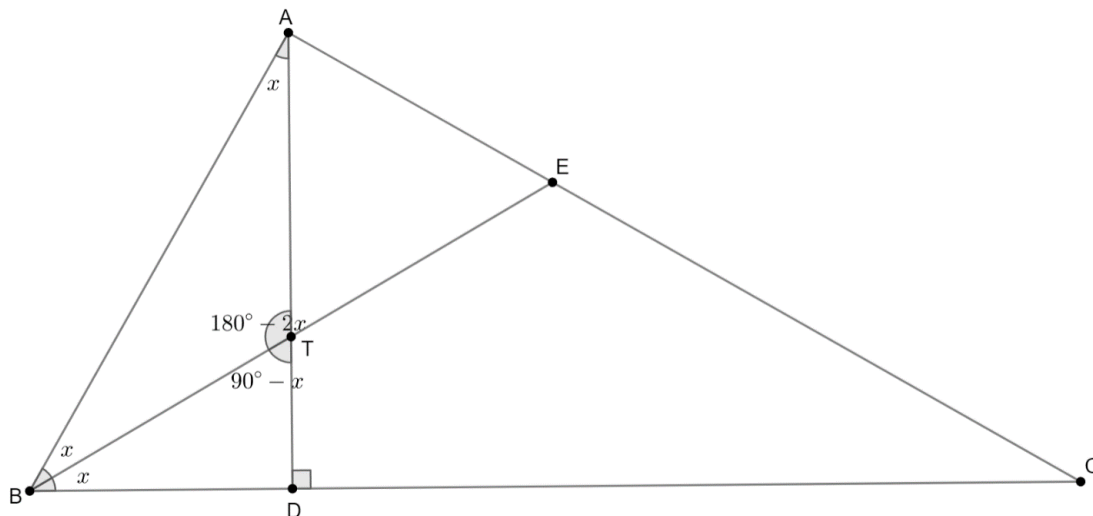
5. U pravouglom trouglu $\triangle ABC$ ugao kod vrha A je prav. Tačka D je podnožje visine iz vrha A na stranicu BC (dakle, AD je visina ovog trougla). Simetrala unutrašnjeg ugla kod vrha B siječe duž AD u tački T , a duž AC u tački E . Poznato je da vrijedi $AT = BT = 18$.

a) Odrediti veličine unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$.

b) Odrediti dužinu duži CE .

Napomena: Za svaki izračunati ugao potrebno je opisati postupak njegovog računanja, nije dovoljno samo označiti vrijednost ugla na slici.

Rješenje:



- a) Označimo $\angle ABE = x$. Kako je BE simetrala ugla $\angle ABC$, to je $\angle CBE = \angle ABE = x$ **(1 bod)**. Kako je $AT = BT$, trougao $\triangle ABT$ je jednakokraki, pa vrijedi $\angle BAT = \angle ABT = x$ **(2 boda)**.

I način za određivanje ugla x :

Zbir uglova u trouglu je 180° , pa iz trougla $\triangle ABD$ imamo

$$180^\circ = \angle DAB + \angle DBA + \angle ADB = x + 2x + 90^\circ,$$

odakle dobijamo $3x = 90^\circ$, tj. $x = 30^\circ$. **(5 bodova)**

II način za određivanje ugla x :

Zbir uglova u trouglu je 180° , pa iz trougla $\triangle BTD$ imamo

$$\angle BTD = 180^\circ - \angle DBT - \angle BDT = 180^\circ - x - 90^\circ = 90^\circ - x.$$

S druge strane, iz trougla $\triangle ABT$ imamo

$$\angle BTA = 180^\circ - \angle ABT - \angle BAT = 180^\circ - x - x = 180^\circ - 2x.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \angle BTA + \angle BTD &= 180^\circ \Leftrightarrow \\ 180^\circ - 2x + 90^\circ - x &= 180^\circ \Leftrightarrow \\ 270^\circ - 3x &= 180^\circ \Leftrightarrow \\ 3x &= 270^\circ - 180^\circ \Leftrightarrow \\ x &= 30^\circ. \end{aligned}$$

(5 bodova)

Izračunajmo sada unutrašnje uglove trougla ABC . Imamo $\angle ABC = 2x = 60^\circ$ (**1 bod**), a $\angle BCA = 180^\circ - \angle CAB - \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (**1 bod**). Dakle, uglovi kod vrhova A, B i C iznose redom $90^\circ, 60^\circ$ i 30° .

- b)** Dalje, imamo $\angle TAE = \angle CAB - \angle BAT = 90^\circ - x = 60^\circ$, i $\angle ATE = \angle BTD = 90^\circ - x = 60^\circ$ (uglovi $\angle ATE$ i $\angle BTD$ su jednaki kao unakrsni). Dakle, u trouglu $\triangle ATE$ vrijedi $\angle TAE = \angle ATE = 60^\circ$, pa je $\angle TEA = 180^\circ - \angle ATE - \angle TAE = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, što znači da je ovaj trougao jednakostranični (**2 boda**). Zato je $TE = AT = 18$ (**2 boda**), pa je $BE = BT + TE = 18 + 18 = 36$ (**1 bod**).

U trouglu $\triangle EBC$ je $\angle EBC = \angle ECB = 30^\circ$, pa je on jednakokraki (**2 boda**). To znači da je $CE = BE = 36$ (**3 boda**).

Napomene:

- Ukoliko učenik označi neki drugi ugao, te preko njega korektnim računom uglova dobije tačne vrijednosti unutrašnjih uglova, dobija sve bodove za taj dio zadatka.
- Ukoliko učenik tačno izračuna uglove, ali su oni samo označeni na slici bez obrazloženja postupka njihovog računanja, dobija 4 od 10 bodova za prvi dio zadatka.

Općinsko takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Kantona Sarajevo

28. 2. 2024.

Rješenja zadataka sa šemom bodovanja

VIII razred

1. zadatak (Dio pod a) nosi 7 bodova, a dio pod b) nosi 13 bodova.)

a) Izračunati 3% od brojnog izraza A ako je $A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : 0.4$.

Rješenje. $A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : 0.4 =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{4} = [2 \text{ boda}]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{5}{12} =$$

$$= \frac{1}{3} [2 \text{ boda}]$$

$$3\% \text{ od } \frac{1}{3} = \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{100} = 0.01 [3 \text{ boda}]$$

Napomena: Ako učenik rezultat ostavi u obliku $\frac{1}{100}$, i dalje dobija sve bodove.

b) Riješiti jednačinu u skupu realnih brojeva: $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{5x} + \frac{x}{400} = \frac{x}{10}$, $x \neq 0$.

Rješenje.

1. način: $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{5x} + \frac{x}{400} = \frac{x}{10}$

$$\frac{400 + 200 + 100 + 80 + x^2}{400x} = \frac{x}{10} [3 \text{ boda}]$$

$$\frac{780 + x^2}{400x} = \frac{x}{10}$$

$$10(780 + x^2) = 400x^2 [3 \text{ boda}]$$

$$7800 + 10x^2 = 400x^2$$

$$400x^2 - 10x^2 = 7800$$

$$390x^2 = 7800 [2 \text{ boda}]$$

$$x^2 = 20 [1 \text{ bod}]$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5} [2 \text{ boda} + 2 \text{ boda}]$$

2. način:

$$\frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{x}{10} - \frac{x}{400} \quad [3 \text{ boda}]$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{39}{20} = \frac{39x}{400} \quad [3 \text{ boda}]$$

$$x^2 = 20 \quad [3 \text{ boda}]$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5} \quad [2 \text{ boda} + 2 \text{ boda}]$$

3. način:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{5x} + \frac{x}{400} = \frac{x}{10} \quad / \cdot 400x$$

$$400 + 200 + 100 + 80 + x^2 = 40x^2 \quad [6 \text{ bodova}]$$

$$390x^2 = 7800 \quad [2 \text{ boda}]$$

$$x^2 = 20 \quad [1 \text{ bod}]$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5} \quad [2 \text{ boda} + 2 \text{ boda}]$$

Napomene:

- Ako učenik dobije samo rješenje $2\sqrt{5}$ (ali ne i $-2\sqrt{5}$), gubi 2 boda.
- U skladu s napomenom koja je učenicima data uz tekstove zadataka, učenik zaslužuje sve bodove ako i ne izvrši djelomično (parcijalno) korjenovanje, tj. ako ostavi rezultat u obliku $\pm\sqrt{20}$.

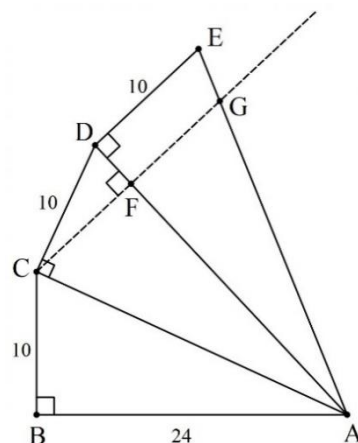
2. zadatak

Dati su pravougli trouglovi ABC , ACD i ADE kao na slici. Također, na slici su date dužine stranica AB , BC , CD i DE . Visina CF trougla ACD je produžena do presjeka sa pravom AE , te je tačka presjeka označena sa G .

a) Odrediti dužinu duži AE .

b) Odrediti dužinu duži CF .

c) Odrediti dužinu duži EG .

**Rješenje.**

a) Na osnovu Pitagorine teoreme primijenjene na trougao ABC , vrijedi

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 24^2 + 10^2 = 676,$$

tj.

$$AC = 26. \text{ [2 boda]}$$

Na osnovu Pitagorine teoreme primijenjene na trougao ACD , vrijedi

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 676 + 100 = 776,$$

tj.

$$AD = \sqrt{776} = 2\sqrt{194}. \text{ [2 boda]}$$

Na osnovu Pitagorine teoreme primijenjene na trougao ADE , vrijedi

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 = 776 + 100 = 876,$$

tj.

$$AE = \sqrt{876} = 2\sqrt{219}. \text{ [2 boda]}$$

b) Površinu P trougla ACD možemo izraziti na dva načina:

$$P = \frac{AC \cdot CD}{2} = \frac{AD \cdot CF}{2}, \text{ [3 boda]}$$

pa uvrštavanjem već izračunatih vrijednosti dobivamo jednačbu:

$$\frac{26 \cdot 10}{2} = \frac{2\sqrt{194} \cdot CF}{2},$$

odakle je

$$CF = \frac{130}{\sqrt{194}} = \frac{130\sqrt{194}}{194} = \frac{65\sqrt{194}}{97}. \text{ [3 boda]}$$

c) Na osnovu Pitagorine teoreme primijenjene na trougao CFD , vrijedi

$$DF^2 = CD^2 - CF^2 = 10^2 - \frac{130^2}{194} = 100 - \frac{16900}{194} = \frac{1250}{97},$$

tj.

$$DF = \frac{\sqrt{1250}}{\sqrt{97}} = \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{97}} = \frac{25\sqrt{194}}{97}. \text{ [1 bod]}$$

Prave DE i CG su okomite na pravu AD , pa su prave DE i CG paralelne. [1 bod] Sada na osnovu Talesove teoreme imamo:

$$\frac{AD}{DF} = \frac{AE}{EG}, \text{ [4 boda]}$$

odakle je

$$EG = \frac{AE \cdot DF}{AD} = \frac{2\sqrt{219} \cdot \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{97}}}{2\sqrt{194}} = \frac{25\sqrt{2} \cdot \sqrt{219}}{\sqrt{97} \cdot \sqrt{194}} = \frac{25\sqrt{219}}{97} \text{ [2 boda]}$$

Napomene:

- U skladu s napomenom koja je učenicima data uz tekstove zadataka, učenik zaslužuje sve bodove ako i ne bude vršio djelomično (parcijalno) korjenovanje.
- Bod koji se dobija za računanje duži DF može se osvojiti i ako učenik izračuna duž AF (jer kasnije može primijeniti Talesovu teoremu s drugim omjerom u kojem se pojavljuje AF). Naravno, ako učenik izračuna obje duži (i DF i AF), i dalje dobija 1 bod.
- 4 boda koja se dobijaju za primjenu Talesove teoreme učenik može osvojiti i ako umjesto omjera koji je korišten u ovom rješenju napiše neki od sljedeća dva omjera:

$$\frac{AF}{DF} = \frac{AG}{EG} \text{ ili } \frac{AF}{AD} = \frac{AG}{AE}.$$

3. zadatak Cijena ulaznice za prikazivanje filma „Oppenheimer“ u jednom kinu bila je 15 KM. Za prikazivanje filma „Barbie“ cijena ulaznice je bila niža. Zahvaljujući tome, broj gledatelja filma „Barbie“ bio je za 50% veći od broja gledatelja filma „Oppenheimer“, a ukupan novčani prihod od prikazivanja filma „Barbie“ bio je za 25% veći od ukupnog novčanog prihoda za prikazivanje filma „Oppenheimer“. Kolika je bila cijena ulaznice za „Barbie“? Odgovor obrazložiti!

Rješenje. Neka je y broj gledatelja filma „Oppenheimer“.

Ukupni novčani prihod od filma „Oppenheimer“ je $15y$ KM. **[4 boda]**

S obzirom da je broj gledalaca filma „Barbie“ 50% veći od broja gledalaca filma „Oppenheimer“, imamo da je broj gledalaca filma „Barbie“ jednak

$$y + 50\% \text{ od } y = y + 0.5y = 1.5y. \text{ [3 boda]}$$

Neka je x cijena ulaznice za film „Barbie“.

Ukupan novčani prihod od filma „Barbie“ iznosi $1.5y \cdot x$. **[3 boda]**

S obzirom da je ukupan novčani prihod od filma „Barbie“ za 25% veći od ukupnog novčanog prihoda od filma „Oppenheimer“, vrijedi:

$$1.25 \cdot 15y = 1.5y \cdot x \text{ [5 bodova]}$$

Nakon dijeljenja sa y dobijamo

$$1.25 \cdot 15 = 1.5x, \text{ [3 boda]}$$

odakle je

$$x = 12.5 \text{ [2 boda]}$$

Dakle, cijena ulaznice za film „Barbie“ iznosi 12.5 KM.

Napomena: Ako učenik ne napiše eksplicitno da je prihod od filma „Barbie“ jednak $1.5y \cdot x$, ali dobije relaciju $1.25 \cdot 15y = 1.5y \cdot x$ (tj. ova dva koraka izvrši kao jedan), i u tom slučaju osvaja svih $3 + 5 = 8$ bodova za te korake.

4. zadatak Odrediti najmanju vrijednost izraza $|x + 4| - |x| + |x - 3|$ u skupu realnih brojeva. Odgovor obrazložiti!

Rješenje. Vrijedi:

$$|x + 4| = \begin{cases} x + 4, & \text{za } x \geq -4 \\ -x - 4, & \text{za } x < -4 \end{cases} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{za } x \geq 0 \\ -x, & \text{za } x < 0 \end{cases} \quad [1 \text{ bod}]$$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{za } x \geq 3 \\ -x + 3, & \text{za } x < 3 \end{cases} \quad [1 \text{ bod}]$$

Posmatrajmo sljedeće slučajeve: **[2 boda]**

1. za $x < -4$ je

$$|x + 4| - |x| + |x - 3| = -x - 4 + x - x + 3 = -x - 1. \quad [1 \text{ bod}]$$

Izraz $-x - 1$ ima to manju vrijednost što je x veći broj. Kako je $x < -4$, to je $-x > 4$ pa je $-x - 1 > 3$. Dakle, na ovom intervalu vrijednost izraza je veća od 3. **[2 boda]**

2. za $-4 \leq x < 0$ je

$$|x + 4| - |x| + |x - 3| = x + 4 + x - x + 3 = x + 7. \quad [1 \text{ bod}]$$

Izraz $x + 7$ ima to veću vrijednost što je x veći broj. Dakle, najmanja vrijednost tog izraza postiže se kada je x jednako -4 , i ona iznosi 3. **[2 boda]**

3. za $0 \leq x \leq 3$ je

$$|x + 4| - |x| + |x - 3| = x + 4 - x - x + 3 = -x + 7. \quad [1 \text{ bod}]$$

Izraz $-x + 7$ ima to manju vrijednost što je x veći broj. Dakle, najmanja vrijednost tog izraza postiže se kada je x jednako 3, tj. i ona iznosi 4. **[2 boda]**

4. za $x > 3$ je

$$|x + 4| - |x| + |x - 3| = x + 4 - x + x - 3 = x + 1. \quad [1 \text{ bod}]$$

Izraz $x + 1$ ima to veću vrijednost što je x veći broj. Kako je $x > 3$, to je $x + 1 > 4$.

Dakle, na ovom intervalu vrijednost izraza je veća od 4. **[2 boda]**

Iz svega analiziranoga, zaključujemo da je najmanja vrijednost datog izraza jednaka 3. **[3 boda]**

Napomene:

- 2 boda nosi pravilno posmatranje mogućih intervala za x (ova napomena se odnosi na dio „Posmatrajmo sljedeće slučajeve“)
- Dopustit ćemo učenicima malu nepreciznost, s obzirom na njihov uzrast. Naime, ukoliko učenik u slučaju $x < -4$ kaže da je najmanja vrijednost izraza jednaka 3, treba mu priznati sve bodove predviđene za taj korak (iako izraz na tom intervalu nema minimum, jer x ne može biti jednako -4). Ova nepreciznost se dopušta i za ostale slučajeve.

- 5. zadatak** Za unutrašnje uglove trougla ABC vrijedi $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 5 : 4$. Prava koja prolazi vrhom C i centrom O opisane kružnice trougla ABC siječe stranicu AB u tački D . Izračunati odnos $AD : DB$. Odgovor obrazložiti!

Rješenje.

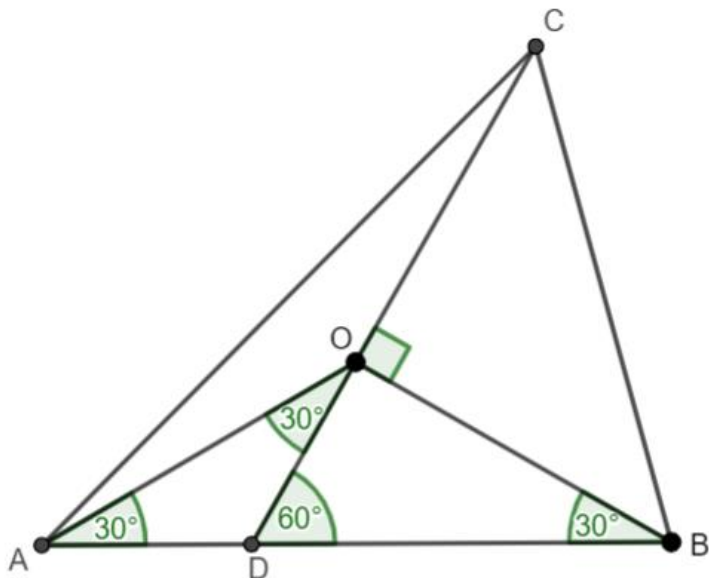
Iz $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 5 : 4$ slijedi
 $\alpha = 3k, \beta = 5k, \gamma = 4k$, pa iz
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ dobijamo
 $12k = 180^\circ$, tj. $k = 15$. Dakle,
 $\alpha = 45^\circ, \beta = 75^\circ, \gamma = 60^\circ$.

Na osnovu teoreme o centralnom i perifernom uglu,
 $\angle AOB = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$. Kako
je trougao $\triangle ABO$ jednakokraki
(jer je $OA = OB$), slijedi
 $\angle BAO = \angle ABO = 30^\circ$.

Dalje, $\angle OBC = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$. Kako je trougao $\triangle OBC$ jednakokraki, slijedi $\angle OBC = \angle BCO = 45^\circ$, pa je $\angle COB = 90^\circ$ (ovo smo mogli zaključiti i ovako: ugao $\angle COB$ je centralni ugao nad tetivom CB , pa je $\angle COB = 2\angle CAB$). Odatle je $\angle BOD = 90^\circ$, pa je $\angle ODB = 60^\circ$ i $\angle DOA = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. Dakle, trougao $\triangle ADO$ je jednakokraki s jednakim krakovima $AD = DO$.

U trouglu $\triangle DBO$, ugao $\angle BOD$ je pravi, $\angle ODB = 60^\circ$, $\angle DBO = 30^\circ$, pa je to karakteristični trougao (polovina jednakostraničnog trougla). Zbog toga je $DB = 2DO$.

Konačno je $AD : DB = DO : 2DO = 1 : 2$.



Šema bodovanja:

- Određivanje uglova α, β, γ : **4 boda**
- Zaključak da je $\angle BAO = \angle ABO = 30^\circ$ (pomoću određivanja ugla $\angle AOB$ ili na neki drugi način):
4 boda
- Zaključak da je bilo koji od uglova $\angle BOC$ i $\angle BOD$ pravi: **3 boda**
- Zaključak da je trougao $\triangle ADO$ jednakokraki, tj. $AD = DO$: **3 boda**
- Zaključak da je $\triangle DBO$ polovina jednakostraničnog trougla, te zbog toga $DB = 2DO$: **4 boda**
- Zaključak da je $AD : DB = 1 : 2$: **2 boda**

Općinsko takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Kantona Sarajevo

28. 2. 2024.

Rješenja zadataka sa šemom bodovanja

IX razred

1. Dat je izraz

$$I = \frac{3x^2y - xy^2}{3x^3 - 3xy^2 - x^2y + y^3}, \text{ za } 3x^3 - 3xy^2 - x^2y + y^3 \neq 0.$$

- a) Pojednostaviti izraz I što je više moguće.
b) Izračunati vrijednost izraza I za $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ i $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Rješenje.

- a) U brojniku možemo izvući zajednički faktor xy , a u nazivniku grupirati prva dva i zadnja dva člana:

$$\begin{aligned} I &= \frac{3x^2y - xy^2}{3x^3 - 3xy^2 - x^2y + y^3} = \frac{xy(3x - y)}{(3x^3 - 3xy^2) - (x^2y - y^3)} = \frac{xy(3x - y)}{3x(x^2 - y^2) - y(x^2 - y^2)} \\ &= \frac{xy(3x - y)}{(x^2 - y^2)(3x - y)} = \frac{xy}{x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

- b) Uvrštavanjem $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ i $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, dobijamo:

$$\begin{aligned} I &= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \frac{3 - 2}{3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2 - (3 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2)} \\ &= \frac{1}{5 + 2\sqrt{6} - 5 + 2\sqrt{6}} = \frac{1}{4\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Napomena: Također, vrijednost izraza za $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ i $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ smo mogli izračunati uvrštavajući te vrijednosti u $\frac{xy}{(x-y)(x+y)}$:

$$I = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{[\sqrt{3} + \sqrt{2} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})][\sqrt{3} + \sqrt{2} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})]} = \frac{3 - 2}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{4\sqrt{6}}.$$

Šema bodovanja:

Dio pod a) vrijedi 10 bodova, i to:

- ako učenik rastavi brojnik kao $3x^2y - xy^2 = xy(3x - y)$: **2 boda**
- ako učenik grupira članove u nazivniku tako da se dobije zajednički faktor $(3x^3 - 3xy^2 - x^2y + y^3 = 3x(x^2 - y^2) - y(x^2 - y^2)$ ili kao $3x^3 - 3xy^2 - x^2y + y^3 = x^2(3x - y) - y^2(3x - y)$: **3 boda**
- nazivnik napisan kao $(x^2 - y^2)(3x - y)$: **3 boda**
- izraz pojednostavljen kao $I = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ ili kao $I = \frac{xy}{(x-y)(x+y)}$: **2 boda**

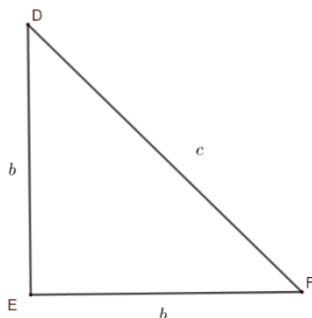
Dio pod b) vrijedi 10 bodova, i to:

- ako učenik uvrštavanjem $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ i $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ dobije $3 - 2$, tj. 1 u brojniku: **3 boda**
- ako učenik uvrštavanjem $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ i $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ u nazivniku dobije $3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2 - (3 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2)$, ili $[\sqrt{3} + \sqrt{2} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})][\sqrt{3} + \sqrt{2} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})]$ tj. $2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3}$: **4 boda**
- ako učenik dobije konačno rješenje $\frac{1}{4\sqrt{6}}$ ili $\frac{\sqrt{6}}{24}$: **3 boda**

2. Jednakostranični trougao ABC i jednakokrako-pravougli trougao DEF imaju jednake obime. Površina trougla DEF iznosi 81 cm^2 . Izračunati površinu trougla ABC .

Rješenje.

Uočimo da pravougli trougao može biti jednakokraki samo ako su mu katete jednakih dužina. Ako označimo dužine kateta sa b , a dužinu njegove hipotenuze sa c , njegov obim i površinu računamo po formulama:



$$O = 2b + c, P = \frac{b \cdot b}{2} = \frac{b^2}{2}.$$

Pošto je površina jednakokrako-pravouglog trougla DEF 81 cm^2 , slijedi:

$$\frac{b^2}{2} = 81$$

$$b^2 = 81 \cdot 2 = 162$$

i pošto je b dužina katete (dakle, mora biti pozitivna vrijednost): $b = \sqrt{162} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9\sqrt{2} \text{ cm}$.

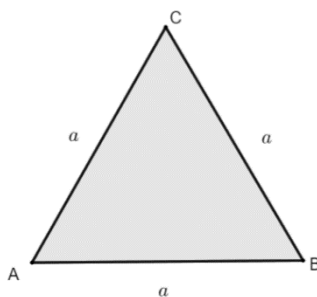
Primjenom Pitagorine teoreme na ovaj trougao dobijamo:

$$c^2 = b^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 2b^2 \Rightarrow c^2 = 2 \cdot 162 = 324 \Rightarrow c = \sqrt{324} = 18 \text{ cm}.$$

Sad možemo izračunati obim trougla DEF :

$$O = 2b + c = 2 \cdot 9\sqrt{2} + 18 = 18\sqrt{2} + 18 = 18(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}.$$

Ako označimo dužinu stranice jednakostraničnog trougla ABC sa a , njegov obim je jednak $O = 3a$, pa kako trougao ABC i trougao DEF imaju jednake obime, imamo:



$$3 \cdot a = 18(\sqrt{2} + 1) \Rightarrow a = 6(\sqrt{2} + 1) \text{ cm}.$$

Kako je površina jednakostraničnog trougla ABC data sa $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, imamo:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(6(\sqrt{2}+1))^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot (\sqrt{2}+1)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot (2+2\sqrt{2}+1) \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot (3+2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}}{4} = 9(3+2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Napomena: Rezultat možemo ostaviti u ovom obliku ili u nekom od ekvivalentnih, npr.

$$P = 9(3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}) \text{ cm}^2.$$

Šema bodovanja:

- izračunata dužina katete trougla DEF : **5 bodova (1 bod za navođenje formule za površinu jednakokrako-pravouglog trougla, te još 4 boda za pravilno izračunavanje katete)**
- izračunata dužina hipotenuze trougla DEF : **4 boda**
- izračunat obim trougla DEF : **2 boda**
- izračunata dužina stranice trougla ABC : **4 boda**
- izračunata površina trougla ABC : **5 bodova (1 bod za navođenje formule za površinu jednakostraničnog trougla, te još 4 boda za pravilno izračunavanje površine)**

3. Admir ima deset jednakih kuglica i deset jednakih kockica. Poznato je da dvije kuglice i tri kockice zajedno imaju masu 21,5 grama, a da tri kuglice i dvije kockice zajedno imaju masu 19,5 grama.
- Odrediti koliku masu imaju svih deset kuglica i deset kockica zajedno.
 - Odrediti pojedinačnu masu kuglice i pojedinačnu masu kockice.

Rješenje.

Označimo sa x masu kuglice, a sa y masu kockice. Prema uslovu zadatka imamo da vrijedi

$$2x + 3y = 21,5$$

$$3x + 2y = 19,5.$$

- a) Ako saberemo dvije gornje jednačbe imamo

$$5x + 5y = 41.$$

Množenjem sa 2 dobijemo da je

$$10x + 10y = 82.$$

Dakle, masa svih deset kuglica i deset kockica zajedno iznosi 82 grama.

- b) Rješimo sistem jednačbi

$$2x + 3y = 21,5$$

$$3x + 2y = 19,5.$$

Množenjem prve jednačbe sa 2, a druge sa -3 , dobijemo

$$4x + 6y = 43,$$

$$-9x - 6y = -58,5.$$

Zbrajanjem ove dvije jednačbe dobijemo

$$-5x = -15,5.$$

Odavde je $x = 3,1$. Sada iz npr. $2x + 3y = 21,5$ lako dobijemo da je $y = 5,1$.

Dakle, kuglica ima masu 3,1 gram, a kockica ima masu 5,1 gram.

Šema bodovanja

- ako učenik napiše uslov zadatka u vidu sistema **4 boda**
- ako učenik odredi tačan zbir svih 10 kuglica i kockica zajedno **6 bodova**
- rješavanje sistema i pronalazak tačnog rješenja $x = 3,1$ i $y = 5,1$ vrijedi **10 bodova**
(ukoliko učenik započne ispravno rješavanje sistema npr. metodom suprotnih koeficijenata, metodom smjene ili grafičkim metodom, ali pogriješi u računu i ne dobije ispravno rješenje, može osvojiti maksimalno 5 od ovih 10 bodova)

Napomena.

Učenik/ca može prvo riješiti zadatak pod b), pa onda pod a) i to ne utiče na njegove/ne bodove.

4. Odrediti sve parove prirodnih brojeva (x, y) takve da vrijedi
$$x^3 + y^3 = 2024 + x^2y + xy^2.$$

Rješenje.

Imamo sljedeći niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 &= 2024 + x^2y + xy^2 \Leftrightarrow \\(x + y)(x^2 - xy + y^2) &= 2024 + xy(x + y) \Leftrightarrow \\(x + y)(x^2 - xy + y^2 - xy) &= 2024 \Leftrightarrow \\(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) &= 2024 \Leftrightarrow \\(x + y)(x - y)^2 &= 2024.\end{aligned}$$

Kako je $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, primijetimo da su jedini kvadrati koji dijele 2024 brojevi 1 i 4. Zbog toga imamo sljedeće slučajeve:

- 1) $(x - y)^2 = 1$ i $x + y = 2024$

Međutim, zbog $x - y = \pm 1$, brojevi x i y su različite parnosti, pa im je zbir neparan, te ne može biti jednak 2024. Dakle, ovaj slučaj nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

- 2) $(x - y)^2 = 4$ i $x + y = 506$

Tada je $x - y = \pm 2$, pa imamo sljedeće podslučajeve:

- i) $x - y = 2$ i $x + y = 506$

Sabiranjem ovih jednačina dobijamo $2x = 508$, odakle je $x = 254$, pa je $y = x - 2 = 252$.

- ii) $x - y = -2$ i $x + y = 506$

Sabiranjem ovih jednačina dobijamo $2x = 504$, odakle je $x = 252$, pa je $y = x + 2 = 254$.

Dakle, jedina rješenja su $(x, y) \in \{(254, 252), (252, 254)\}$.

Šema bodovanja

- Svođenje jednačine na $(x + y)(x - y)^2 = 2024$ vrijedi **6 bodova**
(ukoliko učenik ne svede jednačinu na gornji oblik, nego na jedan od sljedećih oblika: $(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) = 2024$ ili $(x^2 - y^2)(x - y) = 2024$, dobija 4 boda od ovih 6)
- konstatacija da su jedini kvadrati koji dijele 2024 brojevi 1 i 4 vrijedi **5 bodova**
- Odbacivanje slučaja $(x - y)^2 = 1$ i $x + y = 2024$ vrijedi **4 boda**
(moguće je da učenik ovaj slučaj rješava kao slučaj $(x - y)^2 = 4$ i $x + y = 506$, te pritom dobije necjelobrojna rješenja sistema. Ako je taj postupak proveden ispravno, učenik dobija sva 4 boda. Međutim, ako izostavi jedan od podslučajeva, $x - y = 1$ i $x + y = 2024$ ili $x - y = -1$ i $x + y = 2024$, dobija 2 od ova 4 boda)
- Rješavanje slučaja $(x - y)^2 = 4$ i $x + y = 506$ vrijedi **5 bodova**
(ukoliko učenik izostavi jedan od podslučajeva, a drugi ispravno riješi, dobija 3 od ovih 5 bodova)

Napomena:

Broj 2024 se na 8 načina može napisati kao proizvod dva prirodna broja:

$$1 \cdot 2024 = 2 \cdot 1012 = 4 \cdot 506 = 8 \cdot 253 = 11 \cdot 184 = 22 \cdot 92 = 23 \cdot 88 = 44 \cdot 46.$$

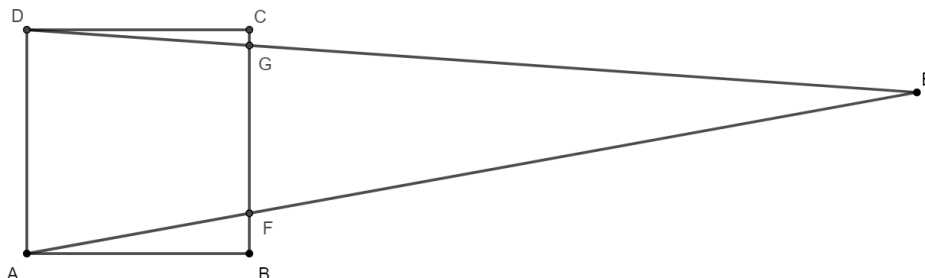
Zbog toga postoji 16 slučajeva za brojeve $x + y$ i $(x - y)^2$. Konstatacija da su jedini kvadrati koji dijele 2024 brojevi 1 i 4 nam odbacuje 14 od tih 16 slučajeva, te smo mi samo ispitali preostala dva slučaja. Međutim, učenik može redom krenuti ispitivati slučajeve, ali se slučajevi u kojima je $(x - y)^2$ jednak broju koji nije potpun kvadrat lako odbacuju (npr. $x + y = 92$, $(x - y)^2 = 22$). Kako u šemi bodovanja ovaj korak nosi 5 bodova, ovih 14 slučajeva zajedno nose 5 bodova.

Ako ipak učenik rješava jednačinu u obliku $(x^2 - y^2)(x - y) = 2024$, tada mora posmatrati i slučajeve kada su oba faktora negativna, te zbog toga ima 32 slučaja. Kako svođenje na oblik $(x^2 - y^2)(x - y) = 2024$ nosi 4 boda, to svaki od ta 32 slučaja nosi 0.5 bodova.

5. Sara je nacrtala kvadrat $ABCD$ sa stranicom dužine a . Potom je Hana nacrtala trougao AED tako da su zadovoljeni sljedeći uslovi (vidi sliku):

- stranice $\overline{AE}$ i $\overline{DE}$ sijeku stranicu $\overline{BC}$ u tačkama F i G , redom;
- površina trougla AED je dva puta veća od površine kvadrata $ABCD$.

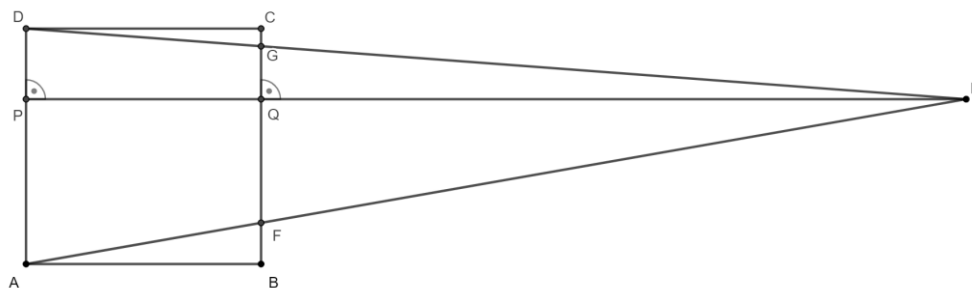
- Odrediti površinu trougla FEG izraženu preko a .
- Odrediti površinu četverougla $AFGD$ izraženu preko a .



Napomena: Gornja slika služi samo u ilustrativne svrhe, nije za mjerenje.

Rješenje.

Spustimo visinu trougla AED iz vrha E . Neka ona siječe $\overline{AD}$ u tački P , a $\overline{FG}$ u tački Q . Pošto je $ABCD$ kvadrat, to je stranica $\overline{AD}$ paralelna sa $\overline{BC}$, a kako je $\overline{EP}$ okomito na $\overline{AD}$, to je i $\overline{EQ}$ okomito na $\overline{FG}$. Dakle, $\overline{EQ}$ je visina trougla FEG (**2 boda**) (vidi sliku ispod).



Površina kvadrata $ABCD$ iznosi a^2 , pa je površina trougla AED jednaka $2a^2$. S druge strane,

$$P_{AED} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{EP}}{2} = \frac{a \cdot \overline{EP}}{2}.$$

Dakle,

$$\frac{a \cdot \overline{EP}}{2} = 2a^2,$$

odakle je

$$\overline{EP} = 4a. \text{ (3 boda)}$$

Kako je $\overline{PQ} = \overline{AB} = a$ i $\overline{EQ} = \overline{EP} - \overline{PQ}$, to je $\overline{EQ} = 3a$, (**2 bod**)

pa je površina trougla FEG jednaka

$$P_{FEG} = \frac{\overline{FG} \cdot \overline{EQ}}{2} = \frac{3a \cdot \overline{FG}}{2}. \text{ (1 bod)}$$

Uočimo da je četverougao $AFGD$ trapez (čije su osnovice duži $\overline{AD} = a$ i $\overline{FG}$, a visina $\overline{AB} = a$), i njegova površina je data sa

$$P_{AFGD} = \frac{\overline{AD} + \overline{FG}}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{a + \overline{FG}}{2} \cdot a. \text{ (1 bod)}$$

Dakle, da bismo našli površine figura koje se traže u zadatku izražene pomoću a , dovoljno je naći dužinu stranice $\overline{FG}$ izraženu pomoću a . Nalaženje dužine ove duži nosi 7 bodova:

I način za $\overline{FG}$:

Primijetimo da je površina trougla AED jednaka zbiru površine trougla FEG i površine trapeza $AFGD$ (**3 boda**), pa je

$$2a^2 = \frac{3a \cdot \overline{FG}}{2} + \frac{a + \overline{FG}}{2} \cdot a. \text{ (2 boda)}$$

Množenjem sa 2 i skraćivanjem sa a dobijemo $4a = 3\overline{FG} + a + \overline{FG}$.

Odavde je

$$\overline{FG} = \frac{3a}{4}. \text{ (2 boda)}$$

II način za $\overline{FG}$:

Koristit ćemo Talesov teorem.

Kako je $\overline{AP} \parallel \overline{FQ}$ i $\overline{DP} \parallel \overline{GQ}$, (jer leže na paralelnim stranicama $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$), to možemo primijeniti Talesovu teoremu (**1 bod**), pa imamo

$$\overline{AP} : \overline{FQ} = \overline{EP} : \overline{EQ} = 4 : 3, \text{ (1 bod)}$$

$$\overline{DP} : \overline{GQ} = \overline{EP} : \overline{EQ} = 4 : 3, \text{ (1 bod)}$$

Odavde imamo

$$\overline{FQ} = \frac{3}{4}\overline{AP}, \text{ (1 bod)}$$

$$\overline{GQ} = \frac{3}{4}\overline{DP}, \text{ (1 bod)}$$

Kako je $\overline{FG} = \overline{FQ} + \overline{GQ}$ i $\overline{AD} = \overline{AP} + \overline{DP}$, to je

$$\overline{FG} = \overline{FQ} + \overline{GQ} = \frac{3}{4}\overline{AP} + \frac{3}{4}\overline{DP} = \frac{3}{4}(\overline{AP} + \overline{DP}) = \frac{3}{4}\overline{AD} = \frac{3a}{4}. \text{ (2 boda)}$$

III način za $\overline{FG}$:

Primijetimo da su trouglovi AED i FEG slični (podudarni uglovi u vrhovima A i F i vrhovima D i G). (**2 boda**) Zbog toga se njihove visine odnose kao stranice, pa je

$$\overline{AD} : \overline{FG} = \overline{EP} : \overline{EQ} = 4 : 3, \text{ (3 boda)}$$

odakle je

$$\overline{FG} = \frac{3}{4}\overline{AD} = \frac{3a}{4}. \text{ (2 boda)}$$

Sada lako možemo izračunati površine traženih figura.

a) Površina trougla FEG jednaka je

$$P_{FEG} = \frac{3a \cdot \overline{FG}}{2} = \frac{3a \cdot \frac{3a}{4}}{2} = \frac{9a^2}{8}. \text{ (2 boda)}$$

b) Površina četverougla $AFGD$ jednaka je

$$P_{AFGD} = \frac{a + \overline{FG}}{2} \cdot a = \frac{a + \frac{3a}{4}}{2} \cdot a = \frac{7a^2}{8}. \text{ (2 boda)}$$

(Površina četverougla $AFGD$ se mogla izračunati i kao

$$P_{AFGD} = P_{AED} - P_{FEG} = 2a^2 - \frac{9a^2}{8} = \frac{7a^2}{8}.)$$

Napomene:

- Učenik može prvo riješiti zadatak pod b), pa onda pod a), to ne utiče na njegove bodove.
- Za određivanje duži $\overline{FG}$ učenik može dobiti bodove samo iz jednog od tri prezentirana načina. Na primjer, ako učenik zaključi da može primijeniti Talesov teorem na $\overline{AP} \parallel \overline{FQ}$ i $\overline{DP} \parallel \overline{GQ}$ (što vrijedi 1 bod) i sličnost trouglova AED i FEG (što vrijedi 3 boda), i ne napravi nikakav daljni progres, dobija 3 boda (a ne 3+1=4 boda). Dakle, bodovi za I, II i III način nisu aditivni.