Kanton Sarajevo

OPĆINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

6. marta/ožujka 2023.

VI razred

Zadatak 1. a) Izračunati vrijednost broja A, gdje je

$$A = (7 \cdot 67 - 3 \cdot 19) \cdot 8 - (24 \cdot 38 - 5 \cdot 169) \cdot (6 \cdot 24 - 5 \cdot 25)$$

b) Odrediti ostatak koji broj A daje pri dijeljenju sa 13.

Zadatak 2. Dati su skupovi: $A = \{1,2,3,5,7,9\}, B = \{2,3,4,5,6,9\}, C = \{1,2,5,7\}$.

a) Odrediti $(A \cap C) \cup (A \setminus B)$.

b) Odrediti skup X tako da vrijedi:

$$X \cup A = \{1,2,3,5,7,8,9\}, \qquad X \cap B = \{2,5,9\}, \qquad C \setminus X = \{1\}.$$

Napomena: Obavezno objasniti kako ste odredili elemente skupa X.

Zadatak 3. Odrediti sve šestocifrene brojeve oblika $\overline{3a1a5b}$ koji su djeljivi sa 15.

Napomena: Cifre a i b ne moraju biti različite.

Zadatak 4. Emil je zamislio neki prirodan broj. Najprije je tom broju dodao 13, zatim je novodobijeni broj pomnožio sa 4, te je rezultat saopštio Nori. Ona je od rezultata najprije oduzela 11, nakon čega je tako dobijeni broj podijelila sa 7. Dobila je broj 123. Koji je broj Emil zamislio?

Zadatak 5. Tačka M je na stranici AB pravougaonika $ABCD$ takva da je duž AM dvostruko duža od stranice BC, dok je duž BM za 7 cm duža od duži AM. Ako je obim pravougaonika jednak 114 cm, odrediti površinu pravougaonika.

Vrijeme za izradu zadataka je 150 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
OPĆINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
6. marta/ožujka 2023.

VII razred

Zadatak 1. Izračunati vrijednost izraza

$$\frac{4051}{2}-\frac{0{,}25+\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}+1{,}4}:\left(\frac{2\frac{1}{3}}{5{,}25}-\frac{1}{3}\right)+2.$$

Zadatak 2. U trouglu ΔABC unutrašnji ugao kod vrha A iznosi $80°$. Simetrala ugla $\angle BAC$ siječe stranicu BC u tački D. Ako vrijedi $AD = AC$, odrediti vrijednosti unutrašnjih uglova trougla ΔABC. Odgovor detaljno obrazložiti!

Zadatak 3. Direktor škole je planirao da povede određeni broj učenika na izlet. Prijavilo ih se $\frac{1}{12}$ više nego što je planirano. Prije odlaska, $\frac{2}{13}$ prijavljenih učenika se razboljelo, pa nisu mogli otići na izlet. Na kraju je na izlet otišlo 6 učenika manje od planiranog. Koliko je ukupno učenika otišlo na izlet? Odgovor detaljno obrazložiti!

Zadatak 4. Cifre a, b, c su takve da su količnici $\overline{6a3b} : 36$ i $\overline{7a4c} : 45$ prirodni brojevi. Odrediti koji od ovih količnika je veći i za koliko. Odgovor detaljno obrazložiti!

Napomena: Cifre a, b, c ne moraju biti različite.

Zadatak 5. Dat je trougao ΔABC u kojem je $\angle BCA = 74°$. Na produžetku stranice CA preko tačke A data je tačka D, a na produžetku stranice CB preko tačke B data je tačka E tako da vrijedi $AD = BE$ i $CD + CE$ je jednako obimu trougla ΔABC. Ako je tačka M sredina stranice AB, odrediti vrijednost ugla $\angle DME$. Odgovor detaljno obrazložiti!

Vrijeme za izradu zadataka je 150 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
OPĆINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
6. marta/ožujka 2023.

VIII razred

Zadatak 1. U sali se nalazi 75 osoba, od kojih su 76% žene. U salu ulazi još 15 osoba, nakon čega se u sali nalazi 70% žena. Od 15 osoba koje su ušle u salu, koliko je muškaraca, a koliko žena?

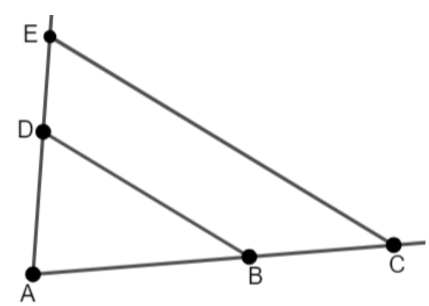
Zadatak 2. a) Neka je $d > 4$ realan broj. Odrediti sve moguće vrijednosti izraza

$$\sqrt{d^2 + d - |d|} + |d - 4| - 2d.$$

b) Neka je $c < 0$ realan broj. Odrediti sve moguće vrijednosti izraza

$$\sqrt{c^2 + c + |c|} + |c - 4| + 2c.$$

Zadatak 3. Date su tačke A, B, C, D, E kao na slici, pri čemu su prave BD i CE paralelne. Poznato je da vrijedi $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}$, $AD \cdot DE = 96, CE = 35$.



a) Odrediti dužinu duži AE.

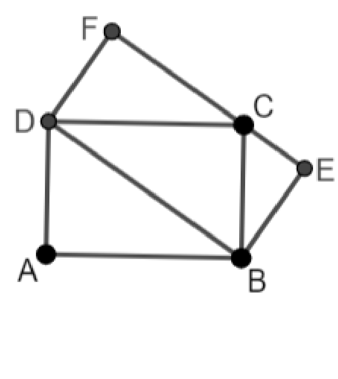
b) Odrediti dužinu duži BD.

Zadatak 4. Odrediti sve četverocifrene brojeve $\overline{abcd}$ takve da vrijedi:

$$a + \overline{ab} + \overline{abc} + \overline{abcd} = 2023.$$

Napomena: Cifre a, b, c, d ne moraju biti različite.

Zadatak 5. U pravougaoniku $ABCD$ dužina dijagonale BD je 8, a dužina stranice BC je 5. Konstruisan je pravougaonik $DBEF$ tako da njegova stranica EF prolazi kroz vrh C (kao na slici). Odrediti površinu petougla $ABEFD$.



Vrijeme za izradu zadataka je 150 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
OPĆINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
6. marta/ožujka 2023.

IX razred

Zadatak 1. Dat je izraz

$$A = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}} : \frac{a^2b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \cdot \frac{ab}{a^2 - b^2}, \qquad (ab \neq 0, a \neq \pm b).$$

a) Maksimalno pojednostaviti izraz A.
b) Odrediti znak izraza A u ovisnosti od znaka parametara a i b.

Zadatak 2. U rombu $ABCD$ tačka P je na stranici AD takva da je $BP \perp AD$ i vrijedi $AP = 3$ i $PD = 2$.
a) Odrediti površinu romba $ABCD$.
b) Odrediti dužine dijagonala romba $ABCD$.

Zadatak 3. Odrediti sve parove prirodnih brojeva (x, y) takve da vrijedi

$$x^2 + 2x = y^2 - 28.$$

Zadatak 4. U pravouglom trouglu ΔABC sa pravim uglom u vrhu C kateta AC je dva puta duža od katete BC. Kvadrat $CDEF$ je upisan u trougao ΔABC tako da tačka D leži na stranici AC, tačka E na stranici AB i tačka F na stranici BC. Odrediti omjer površine kvadrata $CDEF$ i površine trougla ΔABC.

Zadatak 5. Neka su a i b realni brojevi takvi da vrijedi $-3 \leq a \leq 2$ i $2b = a - 4$. Odrediti vrijednost izraza

$$\sqrt{2a^2 + 10b^2 - 8a + 20b + 18} + 3\sqrt{10b^2 - 2a^2 + 80b - 16a + 128}.$$

Vrijeme za izradu zadataka je 150 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
22. marta/ožujka 2023.

Rješenja zadataka i šema bodovanja za VI razred

Zadatak 1. Odrediti skup X takav da vrijede sljedeći uslovi:

- $X \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
- $X \cap \{1,3,4,6,7,9,10\} = \{1,4,10\}$
- Zbir elemenata skupa X je djeljiv sa 5
- Skup X sadrži tačno 5 elemenata

Obavezno obrazložiti kako ste došli do skupa X.

Rješenje: Iz prvog uslova imamo da elementi skupa X mogu biti samo brojevi $1,2, \dots ,10$. Iz drugog uslova zaključujemo da elementi $1,4,10$ pripadaju skupu X, dok elementi $3,6,7,9$ ne pripadaju skupu X.

Dakle, jedino još treba ispitati da li elementi $2,5,8$ pripadaju skupu X. Kako već imamo tri elementa u skupu X, a on sadrži pet elemenata, to će tačno dva od brojeva $2,5,8$ pripadaju skupu X.

Zbir tri elementa u skupu X je $1+4+10=15$, što je djeljivo sa 5, tako da i zbir dva preostala elementa mora biti djeljiv sa 5. Primijetimo da $2+5=7$ nije djeljivo sa 5, te ni $5+8=13$ nije djeljivo sa 5, dok $2+8=10$ jeste djeljivo sa 5.
Dakle, zaključujemo da brojevi 2 i 8 moraju pripadati skupu X, pa je $X=\{1,2,4,8,10\}$.

Šema bodovanja:

- zaključak da elementi $1,4,10$ pripadaju skupu X: **4 boda**
- zakključak da elementi $3,6,7,9$ ne pripadaju skupu X: **5 bodova**
- zaključak da tačno dva od elemenata $2,5,8$ pripadaju skupu X: **4 boda**
- zaključak da je jedina mogućnost da brojevi 2 i 8 pripadaju skupu X: **6 bodova**
- zapis konačnog skupa X: **1 bod**

Zadatak 2. Odrediti sve šestocifrene brojeve oblika $\overline{1baa8b}$ koji su djeljivi sa 36.

Rješenje: Da bi broj bio djeljiv sa 36, potrebno je da bude djeljiv sa 4 i 9.

S obzirom da broj $\overline{1baa8b}$ mora biti djeljiv sa 4, to njegov dvocifreni završetak mora biti djeljiv sa 4. Kako su $80,84,88$ jedini dvocifreni brojevi koji počinju sa 8, a djeljivi su sa 4, to zaključujemo $b \in \{0,4,8\}$.

Da bi broj bio djeljiv sa 9, zbir njegovih cifara mora biti djeljiv sa 9, pa u našem slučaju broj $1 + b + a + a + 8 + b = 9 + 2a + 2b$ mora biti djeljiv sa 9.

Prvi slučaj: Ako je $b = 0$, broj $9 + 2a + 2 \cdot 0 = 9 + 2a$ mora biti djeljiv sa 9. Kako je a cifra, to je $9 \leq 9 + 2a \leq 9 + 18 = 27$, pa $9 + 2a \in \{9,18,27\}$. Za $9 + 2a = 9$ dobijamo $a = 0$, za $9 + 2a = 18$ dobijamo $2a = 9$, što je nemoguće, a za $9 + 2a = 27$ dobijamo $a = 9$. Dakle, jedini brojevi u ovom slučaju su: 100080 i 109980.

Drugi slučaj: Ako je $b = 4$, broj $9 + 2a + 2 \cdot 4 = 17 + 2a$ mora biti djeljiv sa 9. Kako je a cifra, to je $17 \leq 17 + 2a \leq 17 + 18 = 35$, pa $17 + 2a \in \{18,27\}$. Za $17 + 2a = 18$ dobijamo $2a = 1$, što je nemoguće, a za $17 + 2a = 27$ dobijamo $a = 5$. Dakle, jedini broj u ovom slučaju je: 145584.

Treći slučaj: Ako je $b = 8$, broj $9 + 2a + 2 \cdot 8 = 25 + 2a$ mora biti djeljiv sa 9. Kako je a cifra, to je $25 \leq 25 + 2a \leq 25 + 18 = 43$, pa $25 + 2a \in \{27,36\}$. Za $25 + 2a = 27$ dobijamo $a = 1$, a za $25 + 2a = 36$ dobijamo $2a = 11$, što je nemoguće. Dakle, jedini broj u ovom slučaju je: 181188.

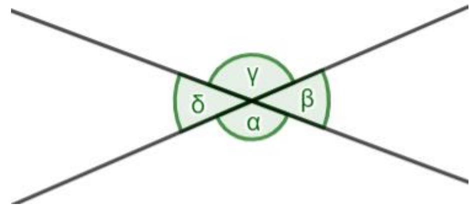
Dakle, brojevi koji zadovoljavaju uslove zadatka su $100080,109980,145584,181188$.

Šema bodovanja:

- zaključak da je potrebno da broj bude djeljiv sa 4 i 9: **2 boda**
- zaključak da dvocifreni završetak mora biti djeljiv sa 4: **2 boda**
- zaključak da $b \in \{0,4,8\}$: **3 boda**
- rješavanje slučaja $b = 0$: **5 bodova**, i to:
    - **1 bod** za zaključak da zbir cifara mora biti djeljiv sa 9
    - **1 bod** za računanje zbira cifara u ovom slučaju
    - **3 boda** za određivanje mogućih vrijednosti za a
- rješavanje slučaja $b = 4$: **4 boda**, i to:
    - **1 bod** za zaključak da zbir cifara mora biti djeljiv sa 9
    - **1 bod** za računanje zbira cifara u ovom slučaju
    - **2 boda** za određivanje mogućih vrijednosti za a
- rješavanje slučaja $b = 8$: **4 boda** (ista šema kao za slučaj $b = 4$)

Napomena: Ukoliko učenik ne zaključi da $b \in \{0,4,8\}$, ali ipak navede kriterij djeljivosti sa 9, dobija **2 boda**. Ako pri tome izračuna zbir cifara, dobija još **2 boda**. Konačno, ako zaključi da broj $a + b$ mora biti djeljiv sa 9, dobija još **3 boda**.

Zadatak 3. Dvije prave se sijeku te obrazuju četiri ugla: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (kao na slici). Ako je ugao α za $47°$ veći od zbira uglova β i δ, odrediti vrijednost ugla γ. Odgovor obrazložiti!



Rješenje: Kako su unakrsni uglovi jednaki, to je $\alpha = \gamma$ i $\beta = \delta$. Iz uslova zadatka je

$$\beta + \delta + 47° = \alpha,$$

odakle zbog $\beta = \delta$ dobijamo

$$2\beta + 47° = \alpha. \quad (*)$$

Međutim, kako su α i β uporedni uglovi, to su oni suplementni, pa vrijedi $\alpha + \beta = 180°$, tj. $\alpha = 180° - \beta$. Uvrštavanjem posljednje relacije u $(*)$ dobijamo

$$2\beta + 47° = 180° - \beta,$$

odakle nakon sređivanja dobijamo

$$3\beta = 180° - 47° = 133°.$$

Sada je $\beta = \frac{133°}{3} = 44°\,20'$, pa je $\gamma = \alpha = 180° - 44°\,20' = 135°\,40'$.

Šema bodovanja:

- zaključak da je bilo koji par unakrsnih uglova jednak: **2 boda**
- dobijanje relacije $\beta + \delta + 47° = \alpha$: **2 boda**
- dobijanje relacije $2\beta + 47° = \alpha$: **3 boda**
- zaključak da vrijedi $\alpha + \beta = 180°$: **2 boda**
- dobijanje relacije $2\beta + 47° = 180° - \beta$: **4 boda** (alternativno, učenik može uvrstiti $\beta = 180° - \alpha$ u $(*)$ te dobiti $2(180° - \alpha) + 47° = \alpha$)
- rješavanje jednačine i dobijanje vrijednosti $\gamma = 135°\,40'$: **7 bodova**

Zadatak 4. **a)** Poredati razlomke $\frac{8}{23}, \frac{32}{91}, \frac{10}{29}$ od najmanjeg do najvećeg. Odgovor obrazložiti!

b) Odrediti sve razlomke veće od $\frac{1}{8}$ i manje od $\frac{2}{9}$ čiji je zbir brojnika i nazivnika jednak 99.

Rješenje: **a)** Kako je $32 = 8 \cdot 4$, to ćemo razlomak $\frac{8}{23}$ proširiti sa 4. Imamo da je $\frac{8}{23} = \frac{8 \cdot 4}{23 \cdot 4} = \frac{32}{92}$. Razlomci $\frac{32}{92}$ i $\frac{32}{91}$ imaju isti brojnik, pa kako prvi razlomak ima veći nazivnik, to je $\frac{32}{92} < \frac{32}{91}$, tj. $\frac{8}{23} < \frac{32}{91}$.

Razlomke $\frac{8}{23}$ i $\frac{10}{29}$ ćemo svesti na isti brojnik. Kako je najmanji zajednički sadržalac brojeva 8 i 10 jednak 40, imamo $\frac{8}{23} = \frac{8 \cdot 5}{23 \cdot 5} = \frac{40}{115}$, kao i $\frac{10}{29} = \frac{10 \cdot 4}{29 \cdot 4} = \frac{40}{116}$. Kako razlomci $\frac{40}{115}$ i $\frac{40}{116}$ imaju isti brojnik, a prvi razlomak ima manji nazivnik, to je $\frac{40}{115} > \frac{40}{116}$, tj. $\frac{8}{23} > \frac{10}{29}$.

Dakle, vrijedi $\frac{10}{29} < \frac{8}{23} < \frac{32}{91}$.

b) Neka je naš razlomak jednak $\frac{a}{b}$. Proširujući razlomak $\frac{1}{8}$ sa 11, a razlomak $\frac{2}{9}$ sa 9, dobijamo $\frac{11}{88} < \frac{a}{b} < \frac{18}{81}$. Primijetimo da i razlomci $\frac{11}{88}$ i $\frac{18}{81}$ imaju zbir brojnika i nazivnika jednak 99 (kao i naš razlomak $\frac{a}{b}$). Traženi razlomak $\frac{a}{b}$ će biti veći od razlomka $\frac{11}{88}$ samo ako ima veći brojnik (samim tim će imati i manji nazivnik). Slično, razlomak $\frac{a}{b}$ će biti manji od razlomka $\frac{18}{81}$ samo ako ima manji brojnik (samim tim će imati veći nazivnik). Na taj način zaključujemo da su traženi razlomci $\frac{12}{87}, \frac{13}{86}, \frac{14}{85}, \frac{15}{84}, \frac{16}{83}$ i $\frac{17}{82}$.

Šema bodovanja:

- dio pod a) nosi **6 bodova**, i to:
  - ispravno upoređivanje razlomaka $\frac{8}{23}$ i $\frac{32}{91}$: **2 boda**
  - ispravno upoređivanje razlomaka $\frac{8}{23}$ i $\frac{10}{29}$: **3 boda**
  - ispravno redanje razlomaka: **1 bod**
- dio pod b) nosi **14 bodova**, i to:
  - zapisivanje razlomaka $\frac{1}{8}$ i $\frac{2}{9}$ kao $\frac{11}{88}$ i $\frac{18}{81}$: **6 bodova**
  - objašnjenje zašto su jedina rješenja $\frac{12}{87}, \frac{13}{86}, \frac{14}{85}, \frac{15}{84}, \frac{16}{83}$ i $\frac{17}{82}$: **8 bodova**

Napomena: U dijelu pod a), učenik naravno može uporediti razlomke na neki drugi način (na primjer, svođenjem na zajednički nazivnik). U dijelu pod b), učenik može na neki drugi način pronaći tražene razlomke, ali je važno da objasni zašto su to jedini razlomci koji zadovoljavaju tvrdnju zadatka.

Zadatak 5. Emil ima 12 štapova: dva štapa dužine 2 cm, tri štapa dužine 3 cm, četiri štapa dužine 4 cm, jedan štap dužine 5 cm, jedan štap dužine 6 cm, te jedan štap dužine 12 cm.

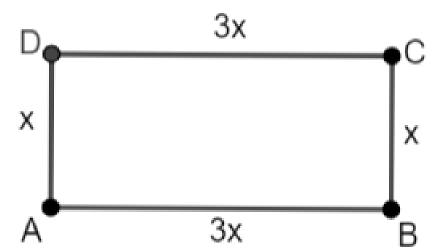
a) Može li Emil koristeći svih 12 štapova napraviti pravougaonik kojem je jedna stranica tri puta duža od druge? Odgovor obrazložiti!

b) Emil je štap dužine y ostavio sa strane, a od preostalih 11 štapova je napravio pravougaonik kojem je jedna stranica tri puta duža od druge. Odrediti sve moguće vrijednosti za y. Odgovor obrazložiti! Za svaku od mogućih vrijednosti za y nacrtati jednu sliku koja pokazuje kako Emil može napraviti traženi pravougaonik za to y.

c) Može li Emil koristeći svih 12 štapova napraviti pravouganik čija je površina jednaka $126\ \mathrm{cm}^2$? Odgovor obrazložiti!

d) Emil je sada štap dužine z ostavio sa strane, a od preostalih 11 štapova je napravio pravougaonik čija je površina jednaka $126\ \mathrm{cm}^2$. Odrediti sve moguće vrijednosti za z. Odgovor obrazložiti! Za svaku od mogućih vrijednosti za z nacrtati jednu sliku koja pokazuje kako Emil može napraviti pravougaonik površine $126\ \mathrm{cm}^2$ za to z.

Rješenje: **a)** Neka jedna stranica (na primjer AD) ima dužinu x, a stranica AB dužinu $3x$. Tada je i $BC = x, CD = 3x$, pa je obim pravougaonika jednak $3x + x + 3x + x = 8x$.
S druge strane, obim pravougaonika je jednak zbiru dužina svih štapova, što je jednako

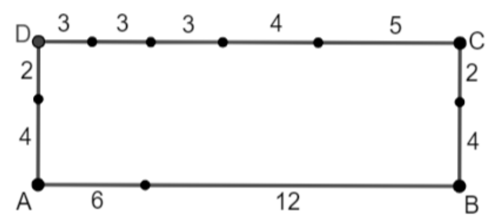


$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 12 = 52.$$

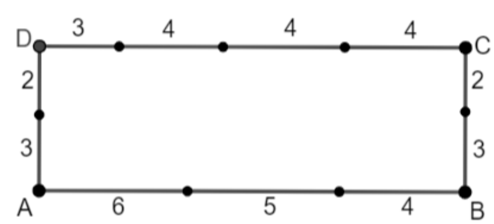
Međutim, kako broj 52 nije djeljiv sa 8, to jednačina $8x = 52$ nema rješenje u skupu prirodnih brojeva, te Emil ne može napraviti pravougaonik koristeći svih 12 štapova.

b) Kako obim traženog pravougaonika mora biti djeljiv sa 8, to broj $52 - y$ mora biti djeljiv sa 8, pa je $y = 4$ ili $y = 12$.

Za $y = 4$, dobijamo $8x = 52 - 4 = 48$, pa je $x = 6$, tj. $AD = 6\ cm$ i $AB = 3 \cdot 6 = 18\ cm$. Traženi pravougaonik možemo napraviti kao na slici desno.



Za $y = 12$, dobijamo $8x = 52 - 12 = 40$, pa je $x = 5$, tj. $AD = 5\ cm$ i $AB = 3 \cdot 5 = 15\ cm$. Traženi pravougaonik možemo napraviti kao na slici desno.



c) Neka je $AB = a$ i $AD = b$. Tada je površina pravougaonika jednaka $a \cdot b$, a obim pravougaonika je jednak $2a + 2b$. Dakle, mora vrijediti $a \cdot b = 126$ i $2a + 2b = 52$. Broj 126 možemo na sljedeće načine zapisati kao proizvod dva prirodna broja:

$$126 = 1 \cdot 126 = 2 \cdot 63 = 3 \cdot 42 = 6 \cdot 21 = 7 \cdot 18 = 9 \cdot 14.$$

Dakle, uz pretpostavku $a \leq b$ (što možemo pretpostaviti bez gubitka opštosti), imamo

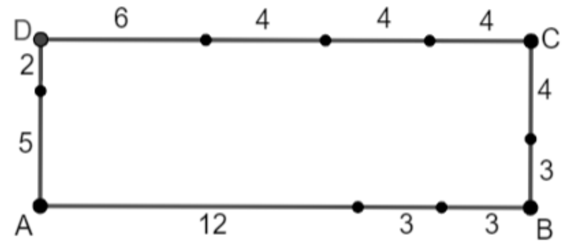
$$(a, b) \in \{(1,126), (2,63), (3,42), (6,21), (7,18), (9,14)\},$$

pa $2a + 2b \in \{254,130,90,54,50,46\}$.

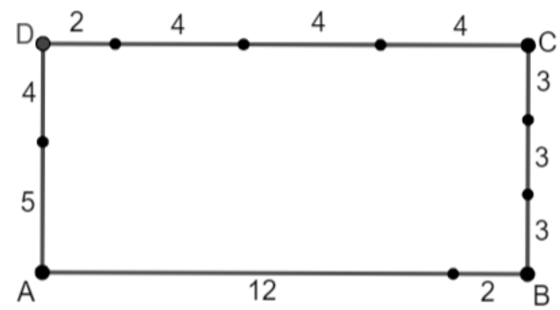
Kako ni u jednom slučaju obim nije jednak 52, Emil ne može napraviti pravougaonik.

d) Primijetimo da je obim manji od 52 samo u slučajevima $(a, b) \in \{(7,18), (9,14)\}$, te da je redom jednak 50 i 46 u tim slučajevima. Dakle, $z = 2$ ili $z = 6$.

U prvom slučaju, Emil će sa strane ostaviti štap dužine $2\ cm$, te može napraviti traženi pravougaonik kao na slici desno. Površina je jednaka $18 \cdot 7 = 126\ cm^2$.



U drugom slučaju, Emil će sa strane ostaviti štap dužine $6\ cm$, te može napraviti traženi pravougaonik kao na slici desno. Površina je jednaka $14 \cdot 9 = 126\ cm^2$.



Šema bodovanja:

- dio pod a) nosi **4 boda**, i to:
  - zaključak da je obim pravougaonika kod kojeg je jedna stranica tri puta duža od druge oblika $8 \cdot x$: **1 bod**
  - zaključak da je obim pravougaonika kojeg će Emil napraviti od 12 štapova jednak $52\ cm$: **1 bod**
  - zaključak da vrijedi $8x = 52$, te da zbog toga nema rješenja: **2 boda**
- dio pod b) nosi **5 bodova**, i to:
  - zaključak da su jedine opcije $y = 4$ i $y = 12$: **3 boda**
  - primjer za $y = 4$: **1 bod**
  - primjer za $y = 12$: **1 bod**
- dio pod c) nosi **6 bodova**, i to:
  - zaključivanje $(a, b) \in \{(1,126), (2,63), (3,42), (6,21), (7,18), (9,14)\}$: **3 boda**
  - određivanje vrijednosti obima u svakom od tih slučajeva: **2 boda**
  - zaključak da zbog toga Emil ne može napraviti pravougaonik: **1 bod**
- dio pod d) nosi **5 bodova**, i to:
  - zaključak da su jedine opcije $z = 2$ i $z = 6$: **3 boda**
  - primjer za $z = 2$: **1 bod**
  - primjer za $z = 6$: **1 bod**

Kanton Sarajevo
OPĆINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
6. marta/ožujka 2023.

VII razred
Rješenja zadataka

1. Izračunati vrijednost izraza

$$\frac{4051}{2}-\frac{0{,}25+\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}+1{,}4}:\left(\frac{2\frac{1}{3}}{5{,}25}-\frac{1}{3}\right)+2.$$

Rješenje.
Imamo,

$$\frac{4051}{2}-\frac{0{,}25+\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}+1{,}4}:\left(\frac{2\frac{1}{3}}{5{,}25}-\frac{1}{3}\right)+2=\frac{4051}{2}-\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}+\frac{14}{10}}:\left(\frac{\frac{7}{3}}{5\frac{1}{4}}-\frac{1}{3}\right)+2=$$
$$=\frac{4051}{2}-\frac{\frac{4}{4}}{\frac{3}{5}+\frac{7}{5}}:\left(\frac{\frac{7}{3}}{\frac{21}{4}}-\frac{1}{3}\right)+2=\frac{4051}{2}-\frac{1}{\frac{10}{5}}:\left(\frac{28}{63}-\frac{1}{3}\right)+2=$$
$$=\frac{4051}{2}-\frac{1}{2}:\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right)+2=\frac{4051}{2}-\frac{1}{2}:\frac{4-3}{9}+2=$$
$$=\frac{4051}{2}-\frac{1}{2}:\frac{1}{9}+2=\frac{4051}{2}-\frac{1}{2}\cdot 9+2=\frac{4051}{2}-\frac{9}{2}+2=$$
$$=\frac{4042}{2}+2=2021+2=2023.$$

Vrijednost traženog izraza iznosi 2023.
Ukoliko učenik nije dobio tačan rezultat, bodovi se dodjeljuju prema sljedećoj šemi.

Šema bodovanja.

- ispravno dobijena vrijednost brojnika $0{,}25+\frac{3}{4}=1$ vrijedi **3 boda**. Ako je učenik samo pretvorio $0{,}25=\frac{25}{100}$ ili $0{,}25=\frac{1}{4}$, a nije tačno izračunao vrijednost brojnika, dobija **1 bod**.
- ispravno dobijena vrijednost nazivnika $\frac{3}{5}+1{,}4=2$ vrijedi **3 boda**. Ako je učenik samo pretvorio $1{,}4=\frac{14}{10}$ ili $1{,}4=\frac{7}{5}$, a nije tačno izračunao vrijednost nazivnika, dobija **1 bod**.
- ispravno dobijena vrijednost izraza u zagradi $\frac{2\frac{1}{3}}{5{,}25}-\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ vrijedi **6 bodova**. Tih 6 bodova se dijeli na **1 bod** za $2\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$, **2 boda** za $5{,}25=5\frac{1}{4}=\frac{21}{4}$, **2 boda** za $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{21}{4}}=\frac{28}{63}=\frac{4}{9}$ i **1 bod** za tačan izračun $\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.
- ispravno pretvaranje dijeljenja u množenje, tj. izračun $\frac{1}{2}:\frac{1}{9}=\frac{9}{2}$ vrijedi **4 boda**.
- ako konačan rezultat nije tačan, bez obzira na vrstu (prirodu) greške koju je napravio, učenik ne može dobiti posljednja 4 boda. Ukoliko je konačno rješenje ostavljeno u obliku $\frac{4046}{2}$ učeniku se priznaju svi bodovi.

2. U trouglu ΔABC unutrašnji ugao kod vrha A iznosi $80°$. Simetrala ugla $\angle BAC$ siječe stranicu BC u tački D. Ako vrijedi $AD = AC$, odrediti vrijednosti unutrašnjih uglova trougla ΔABC. Odgovor detaljno obrazložiti!

Rješenje.

Kako je AD simetrala ugla $\angle BAC$, to je $\angle BAD = \angle CAD = \frac{\angle BAC}{2} = 40°$. **(2 boda)**

Kako je $AD = AC$, to je trougao ΔADC jednakokraki sa osnovicom CD, pa su uglovi na osnovici jednaki, tj. $\angle ADC = \angle ACD$. **(8 bodova)**

Zbir uglova u trouglu ΔADC je $180°$, pa je $\angle CAD + \angle ADC + \angle ACD = 180°$, odnosno

$$40° + 2 \cdot \angle ACD = 180°,$$

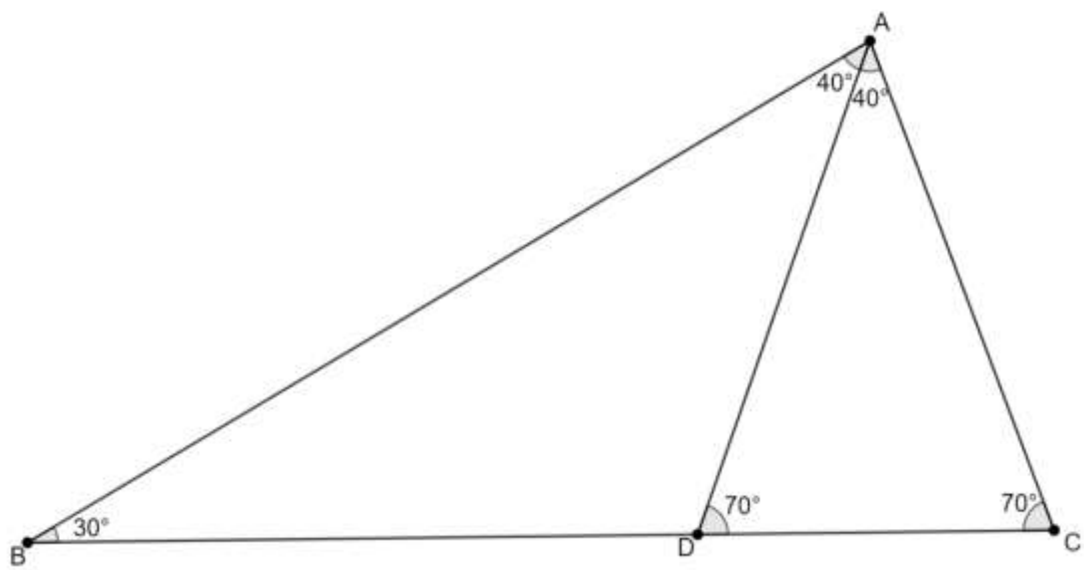
odakle dobijamo

$$\angle ACD = \frac{180° - 40°}{2} = \frac{140°}{2} = 70°.$$

Dakle, $\angle ACB = 70°$. **(5 bodova)**

Zbir uglova u trouglu ΔABC je $180°$, pa je $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$. Sada imamo $\angle ABC = 180° - \angle ACB - \angle BAC = 180° - 70° - 80° = 30°$. **(5 bodova)**

Ukoliko učenik izračuna vrijednost $\angle ABC$ iz trougla ΔABD koristeći vanjski ugao $\angle ADC = 70°$, ili unutrašnji ugao $\angle ADB = 180° - \angle ADC = 110°$, također dobija 5 bodova.



Napomena.

Nacrtana skica ne nosi bodove. Također, za svaki izračunati ugao potrebno je obrazloženje kako je on izračunat. Dakle, ukoliko su vrijednosti uglova označene samo na skici, ne dodijeljuju se bodovi.

3. Direktor škole je planirao da povede određeni broj učenika na izlet. Prijavilo ih se $\frac{1}{12}$ više nego što je planirano. Prije odlaska, $\frac{2}{13}$ prijavljenih učenika se razboljelo, pa nisu mogli otići na izlet. Na kraju je na izlet otišlo 6 učenika manje od planiranog. Koliko je ukupno učenika otišlo na izlet? Odgovor detaljno obrazložiti!

Rješenje.
Označimo sa x planirani broj učenika **(2 boda)**. Tada se za izlet prijavilo $x+\frac{x}{12}$ učenika **(3 boda)**. Ukupno se razboljelo $\frac{2}{13}\left(x+\frac{x}{12}\right)$ učenika **(3 boda)**, tako da je na izlet otišlo $x+\frac{x}{12}-\frac{2}{13}\left(x+\frac{x}{12}\right)$ učenika **(3 boda)**, što je jednako $x-6$. Dakle, možemo tekst zadatka pretvoriti u jednačinu

$$x+\frac{x}{12}-\frac{2}{13}\left(x+\frac{x}{12}\right)=x-6 \textbf{ (3 boda)}$$

ili njoj ekvivalentnu jednačinu

$$\frac{11}{13}\left(x+\frac{x}{12}\right)=x-6.$$

Rješavanjem polazne ili njoj ekvivalentne jednačine dobijemo

$$\frac{11}{13}\cdot\frac{13x}{12}=x-6$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{11x}{12}=x-6.$$

Odavde je

$$\frac{x}{12}=6,$$

odakle slijedi da je

$$x=72 \textbf{ (4 boda)}.$$

Dakle, direktor je planirao na izlet povesti 72 učenika, pa je na izlet otišlo ukupno $72-6=66$ učenika **(2 boda).**

Napomena.

- Ukoliko učenik označi sa x planirani broj učenika i odmah zapiše jednačinu u obliku

$$x+\frac{x}{12}-\frac{2}{13}\left(x+\frac{x}{12}\right)=x-6$$

  ili njoj ekvivalentnom obliku

$$\frac{11}{13}\left(x+\frac{x}{12}\right)=x-6$$

  dobija svih 14=2+12 bodova.
- Za rješavanje jednačine nisu mogući parcijalni bodovi, tj. učenik dobija 0 bodova ako mu rješenje jednačine nije tačno, bez obzira na vrstu (prirodu) greške koju napravi.
- Ako učenik sa x (ili nekim drugim slovom) označi broj učenika koji su otišli na izlet, ali pri tome ne formira smislenu jednačinu iz koje se može dobiti rješenje, i pri tome ne uvede varijablu broj planiranih učenika (bilo kao $x+6$ ili novu varijablu y), učenik ne dobija bodove.

4. Cifre a, b, c su takve da su količnici $\overline{6a3b} : 36$ i $\overline{7a4c} : 45$ prirodni brojevi. Odrediti koji od ovih količnika je veći i za koliko. Odgovor detaljno obrazložiti!
Napomena: Cifre a, b, c ne moraju biti različite.

Rješenje.
Broj $\overline{6a3b}$ je djeljiv sa 36, pa je djeljiv s 4 **(1 bod)** i sa 9 **(1 bod)**.
Broj $\overline{7a4c}$ je djeljliv s 45, pa je djeljiv s 5 **(1 bod)** i sa 9 **(1 bod).**

Učenik ne dobija bodove ukoliko je konstatovao djeljivost s 2 umjesto 4, odnosno s 3 umjesto 9.

Kako su ovi brojevi djeljivi s 9, njihovi zbirovi cifara su djeljivi s 9 **(1 bod)**. Dakle, brojevi $6 + a + 3 + b = a + b + 9$ i $7 + a + 4 + c = a + c + 11$ su djeljivi s 9.
Broj je djeljiv s 4 ako mu je dvocifreni završetak djeljiv s 4 **(1 bod)**, pa je $\overline{3b}$ djeljivo s 4, odakle je $b = 2$ ili $b = 6$ **(3 boda)**.
Ako je $b = 2$, tada je $a + b + 9 = a + 11$ djeljivo s 9, a $a = 7$ je jedina cifra za koju to vrijedi.
Ako je $b = 6$, tada je $a + b + 9 = a + 15$ djeljivo s 9, a $a = 3$ je jedina cifra za koju to vrijedi.
Dakle, da bi prvi količnik bio cijeli broj, mora biti $(a, b) = (7, 2)$ ili $(a, b) = (3, 6)$ **(1 bod)**

Učenik dobija ovaj bod i ako ne napiše eksplicitno posljednju rečenicu, ali zaključi da su to jedine dvije mogućnosti.

Broj je djeljiv s 5 ako mu je posljednja cifra djeljiva s 5 **(1 bod)**, pa je $c = 0$ ili $c = 5$ **(2 boda)**.
Ako je $c = 0$, tada je $a + c + 11 = a + 11$ djeljivo s 9, a $a = 7$ je jedina cifra za koju to vrijedi.
Ako je $c = 5$, tada je $a + c + 11 = a + 16$ djeljivo s 9, a $a = 2$ je jedina cifra za koju to vrijedi.
Dakle, da bi drugi količnik bio cijeli broj, mora biti $(a, c) = (7, 0)$ ili $(a, c) = (2, 5)$ **(1 bod)**

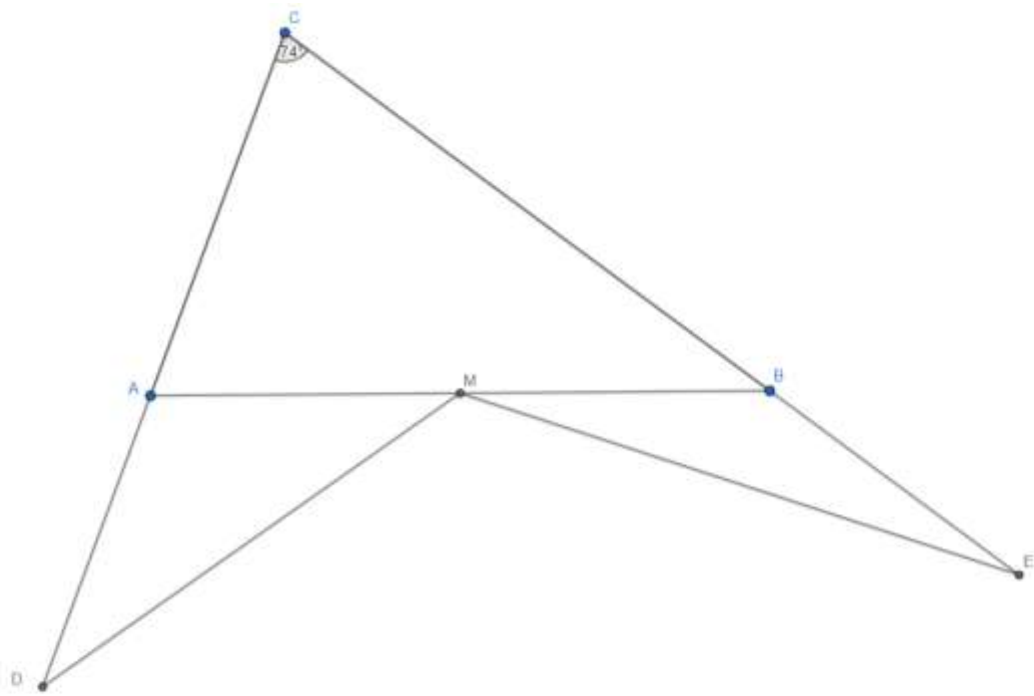
Učenik dobija ovaj bod i ako ne napiše eksplicitno posljednju rečenicu, ali zaključi da su to jedine dvije mogućnosti.

Da bi oba količnika bili cijeli brojevi, mora biti $a = 7$ (to je jedina zajednička mogućnost), pa vrijedi $a = 7, b = 2, c = 0$. **(4 boda)**
Sada je $\overline{6a3b} : 36 = 6732 : 36 = 187$ i $\overline{7a4c} : 45 = 7740 : 45 = 172$. Dakle, veći je prvi količnik, i to za $187 - 172 = 15$. **(2 boda)**

Napomena.
Ukoliko učenik bez argumenta, ili uz neispravan argument, konstatuje da je prvi količnik veći, ne dobija bodove.

5. Dat je trougao ΔABC u kojem je $\angle BCA = 74°$. Na produžetku stranice CA preko tačke A data je tačka D, a na produžetku stranice CB preko tačke B data je tačka E tako da vrijedi $AD = BE$ i $CD + CE$ je jednako obimu trougla ΔABC. Ako je tačka M sredina stranice AB, odrediti vrijednost ugla $\angle DME$. Odgovor detaljno obrazložiti!

Rješenje.
Uvedimo oznake $\angle CAB = \alpha$ i $\angle CBA = \beta$. Pošto je zbir uglova u trouglu jednak $180°$, imamo da je $\alpha + \beta = 180° - 74° = 106°$. Po uslovu zadatka vrijedi $CD + CE = CA + CB + AB$. S druge strane, primijetimo da je $CD + CE = (CA + AD) + (CB + BE) = CA + CB + 2AD$, pa izjednačavanjem ova dva izraza dobijamo da je $CA + CB + AB = CA + CB + 2AD$, tj. $AD = \frac{AB}{2} = AM = BM$, jer je M sredina stranice AB. Dakle, vrijedi $AD = BE = AM = BM$.



Ovo nam govori da su trouglovi ΔADM i ΔBEM jednakokraki, tj. vrijedi $\angle AMD = \angle ADM$ i $\angle BME = \angle BEM$. Kako je $\angle DAM = 180° - \alpha$, to je $\angle AMD = \angle ADM = \frac{\alpha}{2}$. Slično, kako je $\angle EBM = 180° - \beta$, to je $\angle BME = \angle BEM = \frac{\beta}{2}$. Sada je $\angle DME = 180° - \angle AMD - \angle BME = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} = 180° - \frac{106°}{2} = 180° - 53° = 127°$.

Šema bodovanja.

- zaključak da je $\alpha + \beta = 106°$: **1 bod**
- dokaz da je $AD = BE = \frac{AB}{2}$: **5 bodova**
- zaključak da iz druge stavke slijedi da je trougao AMD jednakokraki (ili ako učenik napiše samo $\angle AMD = \angle ADM$ ili $AM = AE$): **2 boda**
- zaključak da iz druge stavke slijedi da je trougao BME jednakokraki (ili ako učenik napiše samo $\angle BME = \angle BEM$ ili $BM = BE$): **2 boda**

- zaključak da je $\angle AMD = \angle ADM = \frac{\alpha}{2}$: **3 boda**
- zaključak da je $\angle BME = \angle BEM = \frac{\beta}{2}$: **3 boda**
- zaključak da je $\angle AMD + \angle BME = \frac{\alpha+\beta}{2} = 53°$: **3 boda**
- na kraju, zaključak da je $\angle DME = 127°$: **1 bod**

Napomena.
Samo nacrtana skica vrijedi 0 bodova.

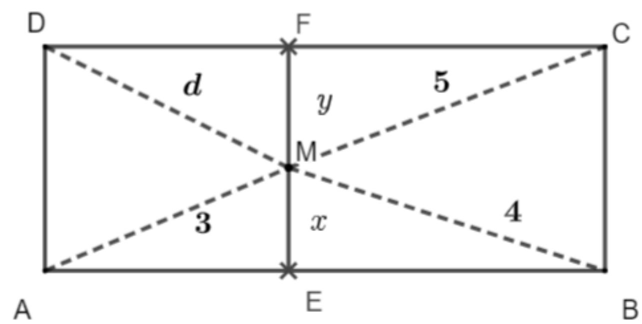
Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
22. marta/ožujka 2023.

Rješenja zadataka i šema bodovanja za VIII razred

Zadatak 1. U unutrašnjosti pravougaonika $ABCD$ nalazi se tačka M takva da je $AM = 3$cm, $BM = 4$cm i $CM = 5$cm. Kolika je udaljenost tačke M od vrha D?

Rješenje. Označimo nepoznatu udaljenost tačke M od vrha D sa d. Pošto je d udaljenost tačke M od vrha D (i tačke M i D su različite), mora biti $d > 0$.

Ako povučemo normalu kroz tačku M na stranice AB i CD datog pravougaonika i označimo presječne tačke normale i stranica AB i CD redom sa E i F, dobit ćemo četiri pravougla trougla: AEM, BME, MCF i FDM.Označimo dužinu duži ME sa x, a dužinu duži MF sa y, te uočimo da je $AE = DF$ i $EB = FC$ (jer su $AEFD$ i $EBCF$ također pravougaonici).



Primjenom Pitagorine teoreme na trougao AEM dobijamo:

$$AE^2 + x^2 = 3^2 \quad (1),$$

a primjenom Pitagorine teoreme na trougao BME dobijamo:

$$EB^2 + x^2 = 4^2 \quad (2).$$

Ako iz (1) i (2) izrazimo x^2 kao $x^2 = 9 - AE^2$ i $x^2 = 16 - EB^2$ redom, te izjednačimo, dobijamo:

$$9 - AE^2 = 16 - EB^2,$$

$$\text{tj. } EB^2 - AE^2 = 7 \quad (3).$$

Primjenom Pitagorine teoreme na trougao MCF dobijamo $FC^2 + y^2 = 5^2$, tj. (sjetimo se da je $FC = EB$):

$$y^2 = 25 - EB^2 \quad (4),$$

a primjenom Pitagorine teoreme na trougao FDM dobijamo $DF^2 + y^2 = d^2$, tj. pošto je $DF = AE$:

$$y^2 = d^2 - AE^2 \quad (5).$$

Iz (4) i (5) sad slijedi $25 - EB^2 = d^2 - AE^2$, tj. $25 - d^2 = EB^2 - AE^2$ (6). Iz (3) i (6) sad slijedi:

$$7 = 25 - d^2$$

$$d^2 = 18$$

Pošto je $d > 0$ to je rješenje ove jednačine $d = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$cm.

Šema bodovanja:

- Povlačenje normale kroz tačku M na stranice AB i CD (ili analogno, na stranice BC i AD): 1 bod
- Uočavanje 4 pravougla trougla: 2 boda
- Uočavanje da je $AE = DF$ i $EB = FC$: 3 boda
- Primjena Pitagorine teoreme na dobijene pravougle trouglove i dobijanje jednačina $AE^2 + x^2 = 3^2$, $EB^2 + x^2 = 4^2$, $EB^2 + y^2 = 5^2$, $AE^2 + y^2 = d^2$ (ovih ili analognih jednačina, ako je učenik povukao normalu na stranice BC i AD): 8 bodova
- Svođenje problema na dvije jednačine $EB^2 - AE^2 = 7$ i $25 - d^2 = EB^2 - AE^2$: 3 boda
- Dobijanje jednačine $d^2 = 18$: 2 boda
- Dobijanje rješenja $d = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$cm: 1 bod

Zadatak 2. Na tabli je napisano 100 različitih proizvoljnih prirodnih brojeva. Emin je svaki napisani broj zaokružio jednom od tri boje: plavom, žutom ili bijelom. Dokazati da postoji barem 12 brojeva zaokruženih istom bojom, koji pri dijeljenju sa 3 daju isti ostatak.

Rješenje. Pošto je napisano 100 brojeva i zaokruženi su sa tri boje, te pošto je $100 = 3 \cdot 33 + 1$, po **Dirichletovom principu** slijedi da su barem 34 broja zaokružena istom bojom (dakle, 34 ili više brojeva je zaokruženo istom bojom). Označimo sa S skup tih brojeva.

Brojevi u skupu S su ili djeljivi sa 3 (pa pri dijeljenju sa 3 daju ostatak 0), ili pri dijeljenju sa 3 daju ostatak 1 ili daju ostatak 2. Postoje samo ove 3 opcije za ostatak. Skup S ima minimalno 34 elementa, te pošto je $34 = 3 \cdot 11 + 1$, to po **Dirichletovom principu** postoji barem 12 brojeva u skupu S koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3. Ti brojevi su svakako zaokruženi sa istom bojom (jer su svi iz skupa S), što znači da u početnom skupu od 100 brojeva postoji barem 12 brojeva koji su zaokruženi istom bojom i daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3.

Napomena: Moglo se na analogan način prvo zaključiti da postoje barem 34 broja na tabli koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3, a zatim da među tim brojevima postoji barem 12 brojeva koji su zaokruženi istom bojom.

Šema bodovanja:

- Zaključak da su po Dirichletovom principu barem 34 broja zaokružena istom bojom: 9 bodova
- Zaključak da postoje samo 3 opcije za ostatak pri dijeljenju sa 3: ostatak 0, ostatak 1 i ostatak 2: 2 boda
- Zaključak da je po Dirichletovom principu onda barem 12 brojeva zaokruženo istom bojom i daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3: 9 bodova

Analogno bodovanje je u slučaju ako učenik prvo zaključi da postoje barem 34 broja na tabli koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3 (to je 2 boda + 9 bodova), a zatim da je barem 12 tih brojeva zaokruženo istom bojom (9 bodova).

Zadatak 3. Ako je $x^2 + y^2 + xy = 32$ i $6x - 14y + xy = 90$, izračunati $5x + 2y$ (x, y su realni brojevi).

Rješenje. Uočimo da se u obje date jednačine pojavljuje xy, pa ćemo izraziti xy iz obje:

$$xy = 32 - x^2 - y^2$$
$$xy = 90 - 6x + 14y$$

Lijeve strane u ovako zapisanim jednačinama su jednake, pa moraju biti jednake i desne strane, čime dobijamo sljedeću jednačinu:

$$32 - x^2 - y^2 = 90 - 6x + 14y$$

$$-x^2 - y^2 + 6x - 14y - 58 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 14y + 58 = 0$$

Uočimo da je izraz $x^2 - 6x$ dio kvadrata razlike $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$, a izraz $y^2 + 14y$ je dio kvadrata zbira $(y+7)^2 = y^2 + 14y + 49$. Sad lijevu stranu gornje jednačine možemo zapisati ovako:

$$x^2 + y^2 - 6x + 14y + 9 + 49 = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 14y + 49) = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+7)^2 = 0$$

Na lijevoj strani jednačine imamo zbir kvadrata realnih brojeva, i on je jednak nuli ako i samo ako je svaki od kvadrata jednak nuli, tj. ako je $(x-3)^2 = 0$ i $(y+7)^2 = 0$, a ovo vrijedi samo za $x = 3$ i $y = -7$.

Sad možemo izračunati traženu vrijednost: $5x + 2y = 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-7) = 15 - 14 = 1$.

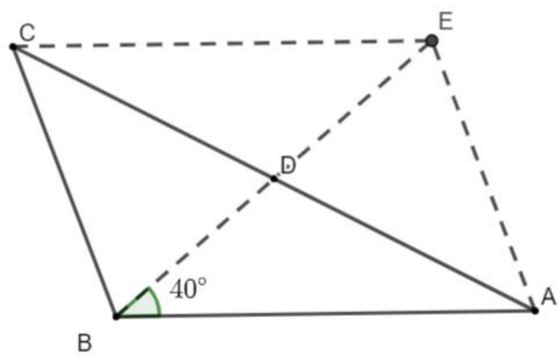
Šema bodovanja:

- Izraziti xy iz obje date jednačine te izjednačiti odgovarajuće strane (ili na neki drugi način dobiti novu jednačinu, sa eliminisanim xy): 3 boda
- Srediti dobijenu jednačinu: 1 bod
- Prepoznati i zapisati kvadrate binoma $(x-3)^2$ i $(y+7)^2$: 6 bodova (ako učenik uoči samo jedan kvadrat binoma, npr. prepozna $(x-3)^2$, ali ne i $(y+7)^2$, to su onda 3 boda od navedenih 6 bodova)
- Dobiti jednačinu $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 0$: 2 boda
- Zaključiti da je ovo moguće samo kada je $(x-3)^2 = 0$ i $(y+7)^2 = 0$: 4 boda
- Dobiti $x = 3$ i $y = -7$: 2 boda
- Tačno izračunati traženu vrijednost $5x + 2y = 1$: 2 boda

Zadatak 4. U trouglu ABC težišna duž BD je dva puta kraća od stranice AB. Ugao $\angle ABD$ iznosi $40°$. Odrediti veličinu ugla $\angle ABC$.

Rješenje. ***I način:***

Produžimo težišnu duž BD u smjeru poslije tačke D za njenu dužinu tj. dobivamo tačku E tako da je $BD = DE$ kao na narednoj slici.



Zbog $AD = CD$ i $BD = DE$, novodobiveni četverougao $ABCE$ je paralelogram (jer mu se dijagonale polove). Poznato svojstvo paralelograma je da su mu naspramne stranice paralelne i jednake dužine.

Trougao ABE je jednakokraki jer je $BE = 2 \cdot BD = 2 \cdot \frac{AB}{2} = AB$.

U tom jednakokrakom trouglu je: $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AEB = \frac{180^\circ - \sphericalangle ABE}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Zbog $BC \parallel AE$ (naspramne stranice paralelograma) i zajedničke duži BE (s tačkom D na njoj) je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle AEB = 70^\circ$ (uglovi sa paralelnim kracima).

Finalno, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = 40^\circ + 70^\circ = 110^\circ$.

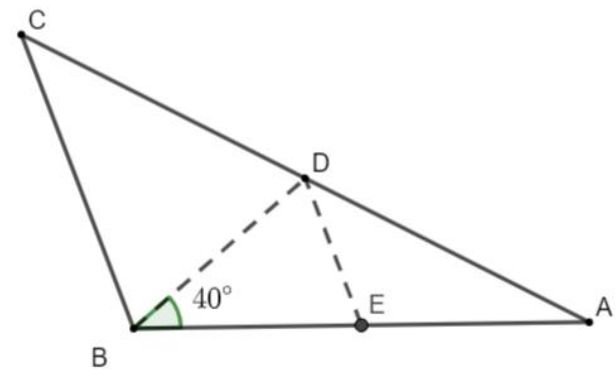
Napomena: Zaključak da je $\sphericalangle DBC = 70^\circ$ se može dobiti i iz podudarnosti trouglova BDC i ADE.

Šema bodovanja:

- Dodati tačku E na produžetku težišne duži BD tako da je $BD = DE$: 3 boda
- Zaključiti da je četverougao $ABCE$ paralelogram: 4 boda
- Zaključiti da je trougao ABE jednakokraki: 3 boda
- Izračunati $\sphericalangle AEB$: 3 boda
- Zaključiti da su $\sphericalangle DBC$ i $\sphericalangle AEB$ podudarni kao uglovi sa paralelnim kracima: 4 boda
- Izračunati veličinu traženog $\sphericalangle ABC$: 3 boda

II način:

Na stranici AB trougla ABC dodamo tačku E tako da je $AE = BE$ (tačka E je na sredini te stranice) kao na narednoj slici.



Trougao BED je jednakokraki jer je $BE = \frac{AB}{2} = BD$.

U tom jednakokrakom trouglu je: $\sphericalangle BED = \sphericalangle BDE = \frac{180^{\circ} - \sphericalangle ABD}{2} = \frac{180^{\circ} - 40^{\circ}}{2} = 70^{\circ}$.

Duž DE spaja središta dvije stranice trougla ABC (stranice AB i AC). Takva duž se naziva srednjom linijom trougla i njeno poznato svojstvo je da je ona paralelna s trećom stranicom istog trougla (stranicom BC).

Zbog $BC \parallel DE$ i zajedničke duži BD je $\sphericalangle BDE = \sphericalangle DBC = 70^{\circ}$ (uglovi sa paralelnim kracima).

Finalno, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = 40^{\circ} + 70^{\circ} = 110^{\circ}$.

Šema bodovanja:

- Dodati tačku E na stranici AB trougla ABC tako da je $AE = BE$: 3 boda
- Zaključiti da je trougao BED jednakokraki: 3 boda
- Izračunati $\sphericalangle BDE$: 3 boda
- Zaključiti da je DE srednja linija trougla ABC i konstatovati da je ona paralelna sa stranicom trougla BC: 4 boda
- Zaključiti da su $\sphericalangle DBC$ i $\sphericalangle BDE$ jednaki kao uglovi s paralelnim kracima: 4 boda
- Izračunati veličinu traženog $\sphericalangle ABC$: 3 boda

Zadatak 5. Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da je $a + b = ab - bc$ i $c + 1$ je kvadrat prostog broja. Dokazati da je barem jedan od brojeva ab ili $a + b$ potpun kvadrat.

Rješenje. Označimo $c + 1 = p^2$ (gdje je p prost broj) $\Rightarrow c = p^2 - 1$.

Uvrstimo navedeno u zadanu jednakost $a + b = ab - bc$, a zatim istu dodatno transformišemo kako slijedi:

$$a + b = ab - b(p^2 - 1)$$

$$a + b = ab - bp^2 + b$$

$$bp^2 = a(b - 1)$$

Primijetimo da je $b \neq 1$, jer bi onda desna strana bila 0, a lijeva strana prirodan broj.

Kako su očigledno brojevi $b - 1$ i b relativno prosti ($NZD(b - 1, b) = 1$), član $(b - 1)$ koji se nalazi s desne strane jednakosti mora biti djeljitelj lijeve strane bp^2, odnosno zbog $NZD(b - 1, b) = 1$, $b - 1$ mora biti djeljitelj od p^2. Kvadrat bilo kojeg prostog broja ima tri djeljitelja: $1, p$ i p^2.

Ukoliko je $b - 1 = 1 \;\Rightarrow\; 2p^2 = a \;\Rightarrow\; ab = 2p^2 \cdot 2 = 4p^2 = (2p)^2$.

Ukoliko je $b - 1 = p \;\Rightarrow (p + 1)p^2 = ap \;\Rightarrow a = p^2 + p$

$$\Rightarrow\; a + b = p^2 + p + p + 1 = p^2 + 2p + 1 = (p + 1)^2$$

Ukoliko je $b - 1 = p^2 \;\Rightarrow\; (p^2 + 1)p^2 = ap^2 \;\Rightarrow a = p^2 + 1$

$$\Rightarrow\; ab = (p^2 + 1)(p^2 + 1) = (p^2 + 1)^2$$

čime je dokazana tvrdnja i u ovome slučaju, te samim time sumarno dokazana i tvrdnja zadatka.

Šema bodovanja:

- Transformisati zadanu jednakost u oblik $bp^2 = a(b - 1)$: 3 boda
- Dokazati da slučaj $b = 1$ nema rješenja: 1 bod
- Objasniti da je $NZD(b - 1, b) = 1$ za $b > 2$, te da zbog toga $b - 1 | p^2$: 5 bodova (alternativno, učenik može jednačinu zapisati u obliku $p^2 + (b - 1)p^2 = a(b - 1)$, te odatle zaključiti da $b - 1 | p^2$, međutim, ukoliko učenik pogrešno zaključi da da $b - 1$ dijeli p^2 iz razloga što $b - 1$ ne dijeli b, ne dobija ovih 5 bodova, ali mu se priznaju dalji zaključci)
- Zaključiti da $b - 1$ može uzimati vrijednosti $1, p$ i p^2: 3 boda
- Dokazati da je ab potpun kvadrat za $b - 1 = 1$: 2 boda
- Dokazati da je $a + b$ potpun kvadrat za $b - 1 = p$: 3 boda
- Dokazati da je ab potpun kvadrat za $b - 1 = p^2$: 3 boda

Kanton Sarajevo

OPĆINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

6. marta/ožujka 2023.

IX razred

Rješenja zadataka

1. Dat je izraz

$$A=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}:\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\frac{ab}{a^2-b^2},\qquad (ab\neq 0, a\neq \pm b).$$

a) Maksimalno pojednostaviti izraz A.

b) Odrediti znak izraza A u ovisnosti od znaka brojeva a i b.

Rješenje.

a) Uz date uslove (ograničenja za a i b) imamo:

$$A=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}:\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{a^3+b^3}{a^3b^3}}:\frac{a^2b^2}{a^2+2ab+b^2-3ab}\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{(b-a)a^2b^2}{a^3+b^3}:\frac{a^2b^2}{a^2-ab+b^2}\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{(b-a)a^2b^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}:\frac{a^2b^2}{a^2-ab+b^2}\cdot\frac{ab}{(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{(b-a)a^2b^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^2}\cdot\frac{ab}{(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{(b-a)}{(a+b)}\cdot\frac{ab}{(a-b)(a+b)}=-\frac{ab}{(a+b)^2}.$$

Dakle, maksimalno pojednostavljen izraz A glasi:

$$A=-\frac{ab}{(a+b)^2}.$$

Tačan rezultat uz tačan postupak u dijelu a) se vrednuje sa 14 bodova.
Ukoliko učenik ne dobije tačno rješenje, ili pogriješi u postupku, mogući su parcijalni bodovi prema sljedećoj šemi.

Šema bodovanja za a).

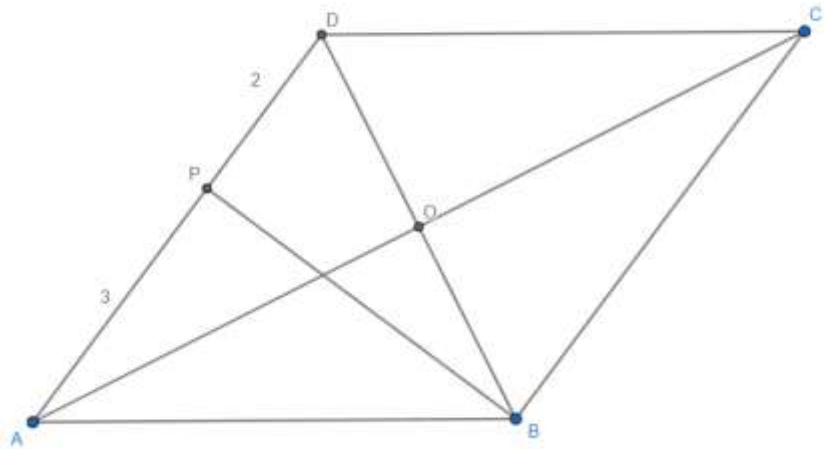
- ako napise prvi razlomak $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}$ kao $\frac{a^2b^2\cdot(b-a)}{a^3+b^3}$ **3 boda**
- ako faktorise a^3+b^3 kao $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ **3 boda**
- ako napise drugi razlomak $\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}$ kao $\frac{a^2b^2}{a^2-ab+b^2}$ **2 boda**
- ako faktoriše razliku kvadrata $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ **1 bod**
- ako pretvori dijeljenje razlomaka u množenje recipriočnim razlomkom **1 bod**
- ako ispravno skrati do oblika $-\frac{ab}{(a+b)^2}$ **4 boda**. Greška u minusu se kažnjava oduzimanjem 2 boda.

b) Primijetimo da je uz uslove koji su dati u zadatku u oblik koji smo dobili u a) nazivnik izraza uvijek pozitivan **(3 boda)**. Stoga, znak izraza A ovisi samo od brojnika. Zbog minusa, vidimo da je izraz A negativan ako su parametri a i b oba istovremeno pozitivni ili oba istovremeno negativni, a izraz A je negativan ako su parametri a i b različitog znaka **(3 boda)**.

Napomena.
Ukoliko učenik ne zaključi da je nazivnik uvijek pozitivan, ali konstatuje da znak izraza A ovisi samo od brojnika dobija sva 3 boda jer je očigledno da učenik razumije/podrazumijeva da je nazivnik pozitivan.

2. U rombu $ABCD$ tačka P je na stranici AD takva da je $BP \perp AD$ i vrijedi $AP = 3$ i $PD = 2$.
   a) Odrediti površinu romba $ABCD$.
   b) Odrediti dužine dijagonala romba $ABCD$.

Rješenje.



a) Kako je $ABCD$ romb, to su mu sve stranice jednake, pa vrijedi $AB = AD = AP + PD = 3 + 2 = 5$. Iz Pitagorine teoreme u pravouglom trouglu ABP imamo $AB^2 = PB^2 + PA^2$, tj. $5^2 = BP^2 + 3^2$, iz čega slijedi da je $BP = 4$. Kako je BP visina iz vrha B na stranicu AD romba $ABCD$, to je površina romba jednaka $AD \cdot BP = 5 \cdot 4 = 20$.

b) Iz Pitagorine teoreme u pravouglom trouglu BPD imamo $BD^2 = BP^2 + PD^2 = 4^2 + 2^2 = 20$, tj. $BD = \sqrt{20}$. Za izračunavanje druge dijagonale AC prikazat ćemo dva načina.

I način

Kako je površina romba jednaka $\frac{AC \cdot BD}{2}$, a u dijelu pod a) smo izračunali da je površina romba jednaka 20, to onda imamo da je $AC \cdot BD = 40$, tj. $AC = \frac{40}{BD} = \frac{40}{\sqrt{20}} = 2\sqrt{20}$.

II način

Označimo sa O presjek dijagonala romba. Poznato je da se dijagonale romba polove i sijeku pod pravim uglom. Sada primjenjujući Pitagorinu teoremu na trougao AOB imamo $AB^2 = AO^2 + OB^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2$, tj. $\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = AB^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = 5^2 - \left(\frac{\sqrt{20}}{2}\right)^2 = 25 - \frac{20}{4} = 20$, pa je $AC = 2\sqrt{20}$.

Šema bodovanja.

- zaključak da je $AB = 5$: **2 boda**
- dokazivanje da je $BP = 4$: **4 boda**

  Dio a)
- izračunavanje površine romba kao $AP \cdot BP = 20$: **3 boda**

  Dio b)
- izračunavanje dijagonale BD: **4 boda**

- izračunavanje dijagonale AC: **7 bodova** od čega:
  - 3 boda se mogu dodijeliti ukoliko učenik kao u načinu I napiše da vrijedi $AC = \frac{2P}{BD}$, gdje je P površina romba $ABCD$ **ILI**
  - 3 boda se mogu dodijeliti ukoliko učenik kao u načinu II napiše da vrijedi $\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = AB^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2$
    Učenik ne može dobiti 6 bodova ako napiše obje stavke, u tom slučaju i dalje dobija 3 boda. Ova tri boda se mogu dodijeliti i ako učenik nađe neku drugu formulu za izračun visine preko poznatih elemenata romba (npr. učenik može spustiti visine iz vrhova C i D na pravu AB i dalje pomoću Pitagorine teoreme računati AC). Ako učenik na ovaj ili neki drugi način izračuna dijagonalu AC, dodijeliti svih 7 bodova.

Napomena.

- prve dvije stavke iz šeme se mogu dodijeliti neovisno u kojem dijelu zadatka se zaključe

3. Odrediti sve parove prirodnih brojeva (x, y) takve da vrijedi

$$x^2 + 2x = y^2 - 28.$$

Rješenje.

Dodavanjem broja 1 lijevoj i desnoj strani **(1 bod)**, dobijemo

$$x^2 + 2x + 1 = y^2 - 27,$$

odakle koristeći formulu za kvadrat zbira dobijemo

$$(x+1)^2 = y^2 - 27.$$ **(3 boda)**

Posljednju jednačinu možemo napisati u obliku

$$y^2 - (x+1)^2 = 27,$$ **(1 bod)**

odakle koristeći formulu za razliku kvadrata dobijemo

$$(y - x - 1)(y + x + 1) = 2 \quad 7.$$ **(3 boda)**

Kako prema uslovu zadatka mora biti $y + x + 1$ prirodan broj, to broj 27 možemo napisati kao proizvod dva prirodna broja na sljedeće načine

$$27 = 1 \cdot 27 = 27 \cdot 1 = 3 \cdot 9 = 9 \cdot 3.$$

Također, kako su prema uslovu zadatka x i y prirodni brojevi, to je $y - x - 1 < y + x + 1$, pa je dovoljno posmatrati sljedeće slučajeve **(6 bodova)**:

1°

$$y - x - 1 = 1$$
$$y + x + 1 = 27$$

Rješenje ovog sistema jednačina je $(x, y) = (12,14)$. **(3 boda)**

2°

$$y - x - 1 = 3$$
$$y + x + 1 = 9$$

Rješenje ovog sistema jednačina je $(x, y) = (2,6)$. **(3 boda)**

Neposrednom provjerom se uvjeravamo da su $(x, y) \in \{(2,6), (12,14)\}$ rješenja koja zadovoljavaju uslove našeg zadatka.

Ukoliko učenik ne izvrši provjeru ovih rješenja, ne oduzimaju mu se bodovi.

Dakle, naš zadatak ima dva rješenja $(x, y) \in \{(2,6), (12,14)\}$.

Ukoliko učenik ne navede posljednju rečenicu eksplicitno, ne oduzimaju mu se bodovi.

Napomena.

Ukoliko učenik nije zaključio da je dovoljno posmatrati samo dva slučaja, onda se 6 bodova može dodijeliti samo za razmatranje svih mogućih slučajeva:

3°

$$y - x - 1 = 27$$
$$y + x + 1 = 1$$

Rješenje ovog sistema jednačina je $(x, y) = (-14,14)$, što je nemoguće jer x i y moraju biti prirodni brojevi.

4°

$$y - x - 1 = 9$$
$$y + x + 1 = 3$$

Rješenje ovog sistema jednačina je $(x, y) = (-4,6)$, što je nemoguće jer x i y moraju biti prirodni brojevi.

Slučajevi 5° - 8° su kada u slučajevima 1° – 4° brojeve na desnoj strani zamjenimo negativnim brojevima $-1, -27, -3, -9$ i opet pokažemo da ti slučajevi nisu mogući.

4. U pravouglom trouglu ΔABC sa pravim vrhom u uglu C kateta AC je dva puta duža od katete BC. Kvadrat $CDEF$ je upisan u trougao ΔABC tako da tačka D leži na stranici AC, tačka E na stranici AB i tačka F na stranici BC. Odrediti omjer površine kvadrata $CDEF$ i površine trougla ΔABC.

Rješenje.

Označimo dužinu duži BC sa a, a dužinu stranice kvadrata $CDEF$ sa x. Tada je $AC = 2 \cdot BC = 2a$, $BF = BC - FC = a - x$ i $AD = AC - CD = 2a - x$. **(2 boda)**

Ukoliko učenik ovakve oznake ne uvede u tekstu rješenja nego samo na skici, dobija ova 2 boda. Pri tome moraju biti jasno označene dužine duži BF i AD i dužina stranice kvadrata $ABCD$.

Površina trougla ABC iznosi $\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{2a \cdot a}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2$. **(2 boda)**

I način

Kako je $CDEF$ kvadrat, to je $ED \perp AC$, a kako je trougao ABC pravougli, to je i $BC \perp AC$. Prave ED i BC su obje okomite sa AC, pa je $ED \parallel BC$. **(2 boda)**

Ukoliko učenik na analogan način zaključi $EF \parallel AC$, također dobija 2 boda. Međutim, ukoliko zaključi obje paralelnosti $ED \parallel BC$ i $EF \parallel BC$, ne dobija 4 nego 2 boda – bodovi za ove paralelnosti se ne sabiraju.

Sada iz Talesove teoreme zbog $ED \parallel BC$ imamo $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC}$. **(8 bodova)**

Ukoliko učenik iz $EF \parallel BC$ na osnovu Talesove teoreme dobije $\frac{EF}{AC} = \frac{BF}{BC}$, također dobija 8 bodova. Dalje, ukoliko učenik zaključi sličnost trouglova ΔADE i ΔEFB, te iz nje dobije $\frac{AD}{ED} = \frac{EF}{BF}$, dobija 10 bodova. Međutim, ukoliko učenik dobije dvije ili tri od relacija $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC}$, $\frac{EF}{AC} = \frac{BF}{BC}$, $\frac{AD}{ED} = \frac{EF}{BF}$, i dalje dobija 10 bodova – bodovi za ove relacije se ne sabiraju.

Uvrštavajući u dobivenu relaciju dužine duži izražene preko a i x dobijamo $\frac{x}{a} = \frac{2a-x}{2a}$.

Imamo

$$\frac{x}{a} = \frac{2a - x}{2a} \Leftrightarrow$$
$$2ax = 2a^2 - ax \Leftrightarrow$$
$$3ax = 2a^2 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{2a}{3}$$

(4 boda)

Učenik dobija ova 4 boda ukoliko dobije $x = \frac{2a}{3}$ iz bilo koje od relacija $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC}$, $\frac{EF}{AC} = \frac{BF}{BC}$, $\frac{AD}{ED} = \frac{EF}{BF}$.

Sada je površina kvadrata $CDEF$ jednaka $x^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$, pa je traženi odnos površina

$$\frac{P_{CDEF}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{4a^2}{9}}{a^2} = \frac{4}{9}$$

(2 boda)

Učenik dobija ova 2 boda i ako dobije $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{CDEF}} = \frac{9}{4}$.

II način

Vrijedi da je zbir površina trougla ΔADE, trougla ΔEFB i kvadrata $CDEF$ jednak površini trougla ΔABC. Imamo $P_{\Delta ADE} = \frac{AD \cdot DE}{2} = \frac{(2a-x)\cdot x}{2}$, $P_{\Delta EFB} = \frac{EF \cdot BF}{2} = \frac{x\cdot(a-x)}{2}$ i $P_{CDEF} = x^2$, pa je

$$\frac{(2a-x)\cdot x}{2} + \frac{x\cdot(a-x)}{2} + x^2 = a^2$$

(10 bodova)

Množenjem prethodne relacije sa 2 dobijamo

$$(2a-x)\cdot x + x\cdot(a-x) + 2x^2 = 2a^2 \Leftrightarrow$$
$$2ax - x^2 + ax - x^2 + 2x^2 = 2a^2 \Leftrightarrow$$
$$3ax = 2a^2 \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{2a}{3}$$

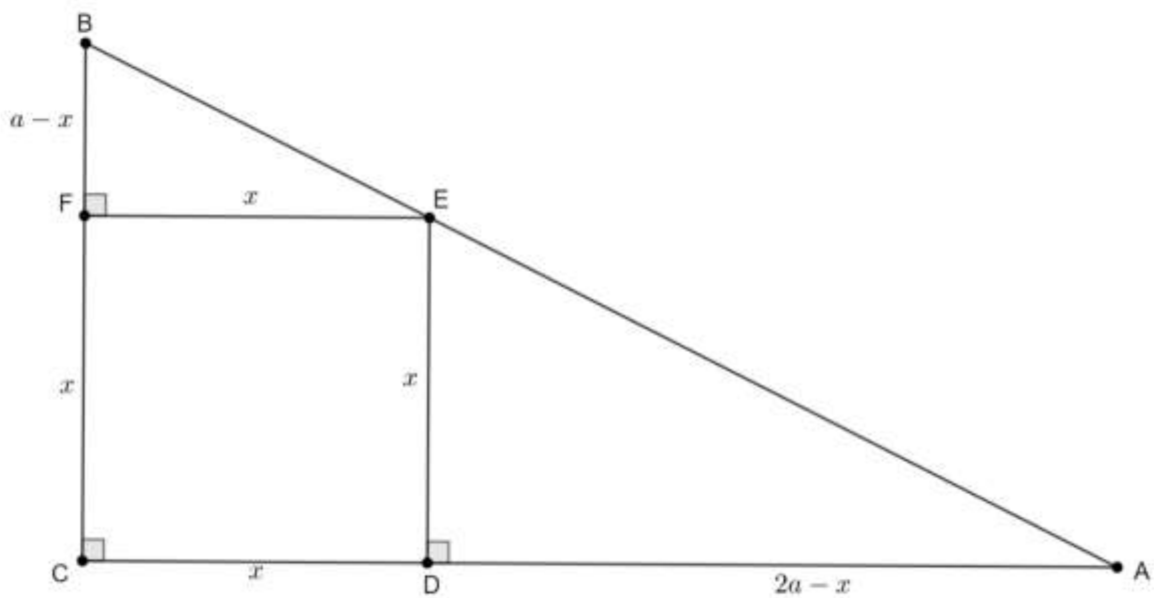
(4 boda)

Sada je traženi odnos površina

$$\frac{P_{CDEF}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{4a^2}{9}}{a^2} = \frac{4}{9}$$

(2 boda)

Učenik dobija ova 2 boda i ako dobije $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{CDEF}} = \frac{9}{4}$



5. Neka su a i b realni brojevi takvi da vrijedi $-3 \leq a \leq 2$ i $2b = a - 4$. Odrediti vrijednost izraza

$$\sqrt{2a^2 + 10b^2 - 8a + 20b + 18} + 3\sqrt{10b^2 - 2a^2 + 80b - 16a + 128}.$$

Rješenje:

Neka je $A = \sqrt{2a^2 + 10b^2 - 8a + 20b + 18}$ i $B = 3\sqrt{10b^2 - 2a^2 + 80b - 16a + 128}$. Iz uslova zadatka imamo da je $a = 2b + 4$.

Primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned} A = \sqrt{2a^2 + 10b^2 - 8a + 20b + 18} &= \sqrt{2(a^2 - 4a + 4) + 10(b^2 + 2b + 1)} \\ &= \sqrt{2(a-2)^2 + 10(b+1)^2} = \sqrt{2(2b+2)^2 + 10(b+1)^2} \\ &= \sqrt{8(b+1)^2 + 10(b+1)^2} = \sqrt{18(b+1)^2} = 3\sqrt{2}|b+1|. \end{aligned}$$

Kako je iz uslova zadatka $b = \frac{a-4}{2}$, a vrijedi $a \leq 2$, to je onda $b = \frac{a-4}{2} \leq \frac{2-4}{2} = -1$, tj. vrijedi da je $b + 1 \leq 0$. Ovo znači da je $|b+1| = -(b+1)$, odnosno imamo da je $A = -3\sqrt{2}(b+1)$.

Slično, primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned} B = 3\sqrt{10b^2 - 2a^2 + 80b - 16a + 128} &= 3\sqrt{10(b^2 + 8b + 16) - 2(a^2 + 8a + 16)} \\ &= 3\sqrt{10(b+4)^2 - 2(a+4)^2} = 3\sqrt{10(b+4)^2 - 2(2b+8)^2} \\ &= 3\sqrt{10(b+4)^2 - 8(b+4)^2} = 3\sqrt{2(b+4)^2} = 3\sqrt{2}|b+4|. \end{aligned}$$

Kako je iz uslova zadatka $b = \frac{a-4}{2}$, a vrijedi $a \geq -3$, to je onda $b = \frac{a-4}{2} \geq \frac{-7}{2}$, tj. vrijedi da je $b + 4 \geq -\frac{7}{2} + 4 = \frac{1}{2} > 0$. Ovo znači da je $|b+4| = b + 4$, odnosno imamo da je $B = 3\sqrt{2}(b+4)$.

Konačno, imamo da je $A + B = -3\sqrt{2}(b+1) + 3\sqrt{2}(b+4) = 9\sqrt{2}$.

Šema bodovanja.

- zapis dijela izraza A ispod korijena kao $2(a-2)^2$: **1 bod**
- zapis dijela izraza A ispod korijena kao $10(b+1)^2$: **1 bod**
- zapis dijela izraza B ispod korijena kao $2(a+4)^2$: **1 bod**
- zapis dijela izraza B ispod korijena kao $10(b+4)^2$: **1 bod**
- uvrštavanje $a = 2b + 4$ u izraz A i dobijanje da je $A = \sqrt{18(b+1)^2}$ (ili ekvivalentno uvrštavanje $b = \frac{a-4}{2}$ i dobijanje $A = \sqrt{\frac{9(a-2)^2}{2}}$): **3 boda**
- uvrštavanje $a = 2b + 4$ u izraz B i dobijanje da je $B = 3\sqrt{2(b+4)^2}$ (ili ekvivalentno uvrštavanje $b = \frac{a-4}{2}$ i dobijanje $B = \sqrt{\frac{(a+4)^2}{2}}$): **3 boda**
- pravilan zaključak da je $\sqrt{(b+1)^2} = -(b+1)$ (ili ekvivalentno da je $\sqrt{(a-2)^2} = -(a-2)$ uz obrazloženje zašto: **4 boda** (0 bodova se dodjeljuje ako učenik samo napiše navedenu jednakost bez obrazloženja zašto to vrijedi)
- pravilan zaključak da je $\sqrt{(b+4)^2} = b + 4$ (ili ekvivalentno da je $\sqrt{(a+4)^2} = a + 4$ uz obrazloženje zašto: **4 boda** (0 bodova se dodjeljuje ako učenik samo napiše navedenu jednakost bez obrazloženja zašto to vrijedi)

- tačan izračun $A - B = 9\sqrt{2}$: **2 boda**

Napomena.

- ako učenik samo skrati korijen i kvadrat, bez razmatranja da li je izraz unutar kvadrata pozitivan ili ne, ne priznaje mu se ostatak rješenja (i dalje može dobiti određen broj bodova do tog dijela)