Kanton Sarajevo
OPĆINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
3. marta/ožujka 2022.

VII razred

Zadatak 1. Dat je izraz

$$A=\left(\frac{11}{5}-2\right)\cdot 10-1\frac{1}{5}:\left(8-\frac{3}{5}\right)+\left(2\frac{1}{4}-2\right):0{,}125.$$

a) Napisati broj 0,125 u obliku razlomka, te skratiti taj razlomak do kraja.
b) Izračunati vrijednost izraza A.
c) Odrediti stotu cifru poslije decimalnog zareza u broju A.

Zadatak 2. Dat je trougao ΔABC. Na stranici $\overline{AC}$ data je tačka D takva da je $\overline{BD}=\overline{BC}$. Neka unutrašnji ugao kod vrha C iznosi 65°, a vanjski ugao kod vrha A iznosi 130°.

a) Odrediti veličinu vanjskog ugla kod vrha B trougla ΔABC.
b) Odrediti veličinu ugla $\angle ABD$.

Napomena: Za svaki ugao koji izračunate potrebno je objašnjenje kako ste ga izračunali, nije dovoljno samo na slici napisati vrijednosti uglova.

Zadatak 3. Emil je Sari dugovao određenu sumu novca. Dug joj je vraćao na sljedeći način: prvo je vratio $\frac{1}{4}$ duga, zatim $\frac{4}{9}$ ostatka duga i onda još 640 KM. Poslije toga Emil je dugovao Sari još $\frac{3}{20}$ od ukupnog duga. Koliko je novca Emil dugovao Sari?

Zadatak 4. Odrediti sve parove cifara (a,b) takve da je broj $\overline{3bb3bab4a}$ djeljiv sa 36.

Zadatak 5. U oštrouglom jednakokrakom trouglu ΔABC $(\overline{AC}=\overline{BC})$ date su visine $\overline{AE}$ i $\overline{CD}$. Neka je F tačka presjeka visine $\overline{CD}$ i simetrale unutrašnjeg ugla kod vrha A u trouglu ΔCAE.

a) Izračunati ugao $\angle FAB$.
b) Ako je dužina stranice $\overline{AB}$ jednaka 2022 cm, izračunati dužinu duži $\overline{DF}$.

Vrijeme za izradu zadataka je 150 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
OPĆINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
3. marta/ožujka 2022.

VIII razred

Zadatak 1. Neka su x i y realni brojevi takvi da vrijedi:

$$(2x+y):(x-2y)=3:1.$$

Izračunati vrijednost razlomka:

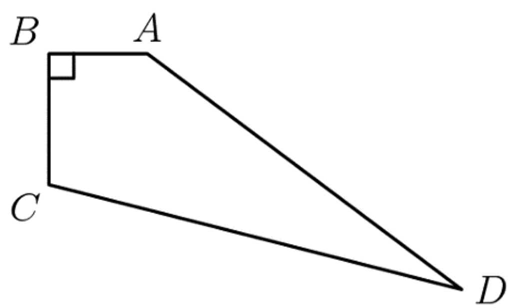
$$\frac{x+2y}{2x-y}.$$

Zadatak 2. U jednoj školi na matematičku sekciju išlo je 45 učenika, od kojih su 60% djevojčice. Na sekciju se učlanilo 5 novih učenika, te je nakon toga procenat djevojčica bio 62%. Koliko je od novih 5 učenika dječaka, a koliko djevojčica?

Zadatak 3. U četverouglu $ABCD$ sa slike vrijedi:

$$\overline{AB}=3, \overline{BC}=4, \overline{CD}=13, \overline{AD}=12, \angle ABC=90^{\circ}.$$

Izračunati površinu datog četverougla.



Zadatak 4. Odrediti najmanji prirodan broj n takav da je broj $\sqrt{5250\cdot n}$ prirodan, te izračunati vrijednost $\sqrt{5250\cdot n}$ u tom slučaju. Odgovor obrazložiti.

Zadatak 5. Dat je pravougaonik $ABCD$ u kome je $\overline{AD}=2$ i na stranici $\overline{AB}$ postoji tačka P takva da je $\angle ADP=\angle BDP=\angle BDC$. Na dijagonali $\overline{BD}$ je data tačka S takva da vrijedi $\overline{DS}=\overline{PS}$. Izračunati $\overline{BS}$.

Vrijeme za izradu zadataka je 150 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
OPĆINSKO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
3. marta/ožujka 2022.

IX razred

Zadatak 1. Dat je izraz

$$A = \frac{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}{x^2y + xy^2}, \qquad (x^2y + xy^2 \neq 0)$$

a) Pojednostaviti izraz A.
b) Izračunati vrijednost izraza A za

$$x = \sqrt{7} - 2 \text{ i } y = \sqrt{7} + 2.$$

Zadatak 2. U rombu $ABCD$ dužine dijagonala se odnose kao $3:4$. Ako je zbir dužina dijagonala romba 56, izračunati obim datog romba.

Zadatak 3. Zbir broja stranica i broja dijagonala pravilnog mnogougla iznosi 105. Neka je α veličina jednog unutrašnjeg ugla, a β veličina jednog vanjskog ugla tog mnogougla. Odrediti

$$\frac{\alpha}{\beta}.$$

Zadatak 4. Ako su x, y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $xy = 16$, $xz = 32$ i $yz = 98$, izračunati vrijednost izraza:

$$x + y + z.$$

Zadatak 5. Dato je osam prirodnih brojeva: $a_1, a_2, \dots, a_8$. Poznato je da je drugi broj manji od prvog (tj. $a_2 < a_1$). Također, svaki sljedeći broj, počevši od trećeg, jednak je zbiru prethodna dva broja (dakle, vrijedi $a_3 = a_1 + a_2$, $a_4 = a_2 + a_3, \dots, a_8 = a_6 + a_7$). Ako je $a_7 = 120$, odrediti a_8. Odgovor obrazložiti.

Vrijeme za izradu zadataka je 150 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Rješenja zadataka za VII razred

Zadatak 1. Dat je izraz

$$A=\left(\frac{11}{5}-2\right)\cdot 10-1\frac{1}{5}:\left(8-\frac{3}{5}\right)+\left(2\frac{1}{4}-2\right):0{,}125.$$

a) Napisati broj 0,125 u obliku razlomka, te skratiti taj razlomak do kraja.
b) Izračunati vrijednost izraza A.
c) Odrediti stotu cifru poslije decimalnog zareza u broju A.

Rješenje:

a) $0{,}125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}\,(4\ boda)$

Napomena: Učenik dobiva 2 boda ako dođe samo do oblika $\frac{125}{1000}$.

b) Imamo

$$A=\left(\frac{11}{5}-\frac{10}{5}\right)\cdot 10-\frac{6}{5}:\left(\frac{40}{5}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{9}{4}-\frac{8}{4}\right):\frac{1}{8}=$$

$$\frac{1}{5}\cdot 10-\frac{6}{5}:\frac{37}{5}+\frac{1}{4}:\frac{1}{8}=$$

$$=2-\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{37}+\frac{1}{4}\cdot 8=$$

$$=2-\frac{6}{37}+2=\frac{142}{37}\quad(8\ bodova)$$

Napomena: Tačan izračun svakoga od izraza $\left(\frac{11}{5}-\frac{10}{5}\right)\cdot 10, \frac{6}{5}:\left(\frac{40}{5}-\frac{3}{5}\right), \left(\frac{9}{4}-\frac{8}{4}\right):\frac{1}{8}$ nosi po 2 boda. Krajnji rezultat nosi preostala 2 boda.

c) Dijeljenjem dobivamo

$$A=\frac{142}{37}=3{,}837837837\ldots\ (2\ bod)$$

Primijetimo da se ponavlja blok cifri 837. Treća, šesta, deveta… tj. svaka treća cifra poslije decimalnog zareza, je cifra 7. Kako je broj 99 djeljiv sa 3, zaključujemo da je devedeset i deveta cifra jednaka 7, pa je stota cifra poslije zareza jednaka 8. $(6\ bodova)$

Napomena: Ako učenik napiše da se cifre 837 ponavljaju, dobiva 3 od 6 bodova, a ako pravilno zaključi koja je cifra na datom mjestu dobiva preostala 3 boda. U slučaju da učenik napiše bez ikakvog objašnjenja da je stota cifra jednaka 8, dobiva 2 boda.

Zadatak 2. Dat je trougao ΔABC. Na stranici $\overline{AC}$ data je tačka D takva da je $\overline{BD} = \overline{BC}$. Neka unutrašnji ugao kod vrha C iznosi 65°, a vanjski ugao kod vrha A iznosi 130°.

a) Odrediti veličinu vanjskog ugla kod vrha B trougla ΔABC.
b) Odrediti veličinu ugla $\angle ABD$.

Napomena: Za svaki ugao koji izračunate potrebno je objašnjenje kako ste ga izračunali, nije dovoljno samo na slici napisati vrijednosti uglova.

Rješenje:

a) <u>1. način</u>

S obzirom da je vanjski ugao kod vrha A jednak 130°, unutrašnji ugao kod vrha A jednak je $180^{\circ} - 130^{\circ} = 50^{\circ} (2\ boda)$. Zbir svih unutrašnjih uglova trougla jednak je 180°, pa je unutrašnji ugao kod vrha B jednak

$$180^{\circ} - 50^{\circ} - 65^{\circ} = 65^{\circ}. (3\ boda)$$

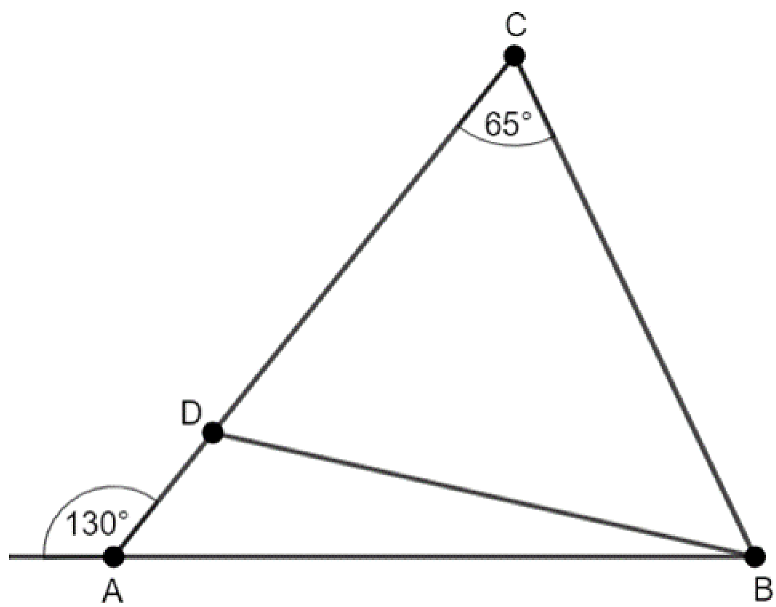
Iz tog slijedi da je vanjski ugao kod vrha B jednak

$$180^{\circ} - 65^{\circ} = 115^{\circ}. (2\ boda)$$

<u>2. način</u>

S obzirom da je unutrašnji ugao kod vrha C jednak 65°, vanjski ugao kod vrha C jednak je $180^{\circ} - 65^{\circ} = 115^{\circ}$. $(2\ boda)$ Zbir vanjskih uglova trougla jednak je $360^{\circ} (2\ boda)$, pa je vanjski ugao kod vrha B jednak

$$360^{\circ} - 130^{\circ} - 115^{\circ} = 115^{\circ}. (3\ boda)$$



b) <u>1. način</u>

S obzirom da je $\overline{BD} = \overline{BC}$, trougao ΔBCD je jednakokraki. Stoga je $\angle CDB = \angle BCD = 65^{\circ}. (5\ bodova)$ Dalje je

$$\angle DBC = 180^{\circ} - 65^{\circ} - 65^{\circ} = 50^{\circ}, (3\ boda)$$

i

$$\angle ADB = 180^{\circ} - 65^{\circ} = 115^{\circ}, (2\ boda)$$

pa je

$$\angle ABD = 180^{\circ} - 115^{\circ} - 50^{\circ} = 15^{\circ}. (3\ boda)$$

<u>2. način</u>

S obzirom da je $\overline{BD} = \overline{BC}$, trougao ΔBCD je jednakokraki. Stoga je $\angle CDB = \angle BCD = 65^{\circ}. (5\ bodova)$ Dalje je

$$\angle DBC = 180^{\circ} - 65^{\circ} - 65^{\circ} = 50^{\circ}, (3\ boda)$$

pa je

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC, (3\ boda)$$

$$= 65^{\circ} - 50^{\circ} = 15^{\circ}. (2\ boda)$$

Zadatak 3. Emil je Sari dugovao određenu sumu novca. Dug joj je vraćao na sljedeći način: prvo je vratio $\frac{1}{4}$ duga, zatim $\frac{4}{9}$ ostatka duga i onda još 640 KM. Poslije toga Emil je dugovao Sari još $\frac{3}{20}$ od ukupnog duga. Koliko je novca Emil dugovao Sari?

Rješenje:

Označimo sa x ukupan iznos novca koji je Emil dugovao Sari. Iz uslova zadatka imamo sljedeću jednačinu:

$$\frac{1}{4}x + \frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{4}x\right) + 640 + \frac{3}{20}x = x. \ (10\ bodova)$$

Napomena: Od ovih 10 bodova učenik dobiva 4 boda ako je tačno napisao koliko iznose $\frac{4}{9}$ ostatka duga, tj. ako je naglasio da je to: $\frac{4}{9}\left(x - \frac{1}{4}x\right)$.

Rješavanjem jednačine dobivamo:

$$\frac{1}{4}x + \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}x + \frac{3}{20}x - x = -640,$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + \frac{3}{20}x - x = -640,$$

$$\frac{11}{15}x - x = -640,$$

$$\frac{4}{15}x = 640,$$

$$x = \frac{640 \cdot 15}{4},$$

$$x = 2400. (10\ bodova)$$

Zadatak 4. Odrediti sve parove cifara (a, b) takve da je broj $\overline{3bb3bab4a}$ djeljiv sa 36.

Rješenje:

Da bi broj bio djeljiv sa 36 mora biti djeljiv sa 4 i sa 9. $(2\ boda)$ Broj je djeljiv sa 4 ako mu je dvocifreni završetak djeljiv sa 4 $(1\ bod)$, a sa 9 ako mu je zbir cifara djeljiv sa 9. $(1\ bod)$

Dvocifreni završetak je $\overline{4a}$, pa $a \in \{0,4,8\}$. $(2\ boda)$

Ispitajmo djeljivost sa 9. Zbir cifara broja $\overline{3bb3bab4a} = 10 + 2a + 4b$. $(1\ bod)$
$1°\ a = 0$

Sada je zbir cifara jednak $10 + 4b$. Kako je b cifra, broj $10 + 4b$ se nalazi između brojeva $10 + 4 \cdot 0 = 10$ i $10 + 4 \cdot 9 = 46$. Kako uz to taj broj mora biti djeljiv sa 9, vrijedi $10 + 4b \in \{18, 27, 36, 45\}$. Jedino u slučaju $10 + 4b = 18$ dobivamo rješenje $b = 2$. U ostalim slučajevima, b nije cijeli broj. *(4 boda)*

$2°\ a = 4$

Sada je zbir cifara jednak $18 + 4b$. Kako je b cifra, broj $18 + 4b$ se nalazi između brojeva $18 + 4 \cdot 0 = 18$ i $18 + 4 \cdot 9 = 54$. Kako uz to taj broj mora biti djeljiv sa 9, vrijedi $18 + 4b \in \{18, 27, 36, 45, 54\}$. U slučaju $18 + 4b = 18$ dobivamo rješenje $b = 0$, a u slučaju $18 + 4b = 54$ dobivamo rješenje $b = 9$. U ostalim slučajevima, b nije cijeli broj. *(5 bodova)*

$3°\ a = 8$

Sada je zbir cifara jednak $26 + 4b$. Kako je b cifra, broj $26 + 4b$ se nalazi između brojeva $26 + 4 \cdot 0 = 26$ i $26 + 4 \cdot 9 = 62$. Kako uz to taj broj mora biti djeljiv sa 9, vrijedi $26 + 4b \in \{27, 36, 45, 54\}$. U slučaju $26 + 4b = 54$ dobivamo rješenje $b = 7$. U ostalim slučajevima, b nije cijeli broj. *(4 boda)*

Dakle, traženi parovi (a, b) su: $(0,2), (4,0), (4,9)$ i $(8,7)$.

Napomena: Ako je učenik prethodno sve izračunao, a nije eksplicitno naveo zadnju rečenicu, ne oduzimaju mu se bodovi.

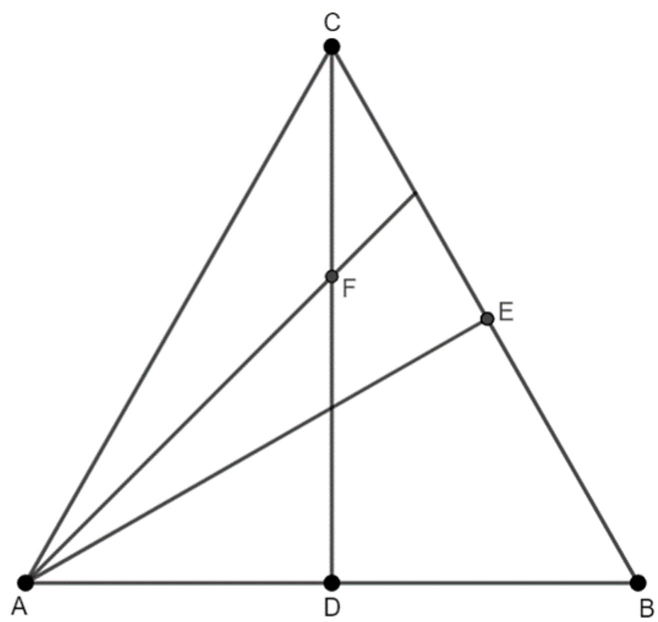
Zadatak 5. U oštrouglom jednakokrakom trouglu $\Delta ABC\ (\overline{AC} = \overline{BC})$ date su visine $\overline{AE}$ i $\overline{CD}$. Neka je F tačka presjeka visine $\overline{CD}$ i simetrale unutrašnjeg ugla kod vrha A u trouglu ΔCAE.

a) Izračunati ugao $\angle FAB$.
b) Ako je dužina stranice $\overline{AB}$ jednaka 2022 cm, izračunati dužinu duži $\overline{DF}$.

Rješenje:

a) Imamo da je

$$\angle CAB = \angle ABC,$$
$$\angle CAF = \angle FAE,$$
$$\angle BEA = 90^{\circ},$$
$$\angle FAB = \angle FAE + \angle EAB. (2\ boda)$$



Dalje je

$$\angle CAF + \angle FAE + \angle EAB = \angle CAB,$$

Kako je $\angle CAB = \angle ABC$ slijedi da je

$$\angle CAF + \angle FAE + \angle EAB = \angle ABC. (*)\ (3\ boda)$$

$$\angle ABC = 90^{\circ} - \angle EAB, (1\ bod)$$

Uvrštavanjem $\angle CAF = \angle FAE$ i $\angle ABC = 90^{\circ} - \angle EAB$ u $(*)$ imamo

$$\angle FAE + \angle FAE + \angle EAB = 90^\circ - \angle EAB,$$

$$2 \cdot \angle FAE + 2 \cdot \angle EAB = 90^\circ, (2\ boda)$$

Dijeljenjem date jednačine sa 2 imamo

$$\angle FAE + \angle EAB = 45^\circ,$$

tj.

$$\angle FAB = 45^\circ. (2\ boda)$$

b) S obzirom da je trougao ΔABC jednakokraki ($\overline{AC} = \overline{BC}$), podnožje D visine $\overline{CD}$ na stranicu $\overline{AB}$ polovi stranicu $\overline{AB}$, pa je $\overline{AD} = 1011$ cm. $(5\ bodova)$
Posmatrajmo ΔFAD. S obzirom da je $\angle FAB = \angle FAD = 45^\circ$, a ugao $\angle ADF = 90^\circ$, zaključujemo da je $\angle DFA = 45^\circ$, tj. trougao ΔFAD je jednakokraki, pa je $\overline{DF} = \overline{AD} = 1011$ cm. $(5\ bodova)$

Rješenja zadataka za VIII razred

Zadatak 1. Neka su x i y realni brojevi takvi da vrijedi:

$$(2x+y):(x-2y)=3:1.$$

Izračunati vrijednost razlomka:

$$\frac{x+2y}{2x-y}.$$

Rješenje:

Iz proporcije $(2x+y):(x-2y)=3:1$ slijedi

$$2x+y=3(x-2y), (5\ bodova)$$

$$2x+y=3x-6y,$$

$$y+6y=3x-2x,$$

odakle se dobiva

$$x=7y. (5\ bodova)$$

Uvrštavanjem $x=7y$ u dati razlomak imamo

$$\frac{x+2y}{2x-y}=\frac{7y+2y}{14y-y}= (5\ bodova)$$

$$=\frac{9y}{13y}= (2\ boda)$$

$$=\frac{9}{13}. (3\ boda)$$

Zadatak 2. U jednoj školi na matematičku sekciju išlo je 45 učenika, od kojih su 60% djevojčice. Na sekciju se učlanilo 5 novih učenika, te je nakon toga procenat djevojčica bio 62%. Koliko je od novih 5 učenika dječaka, a koliko djevojčica?

Rješenje:

Od 45 učenika koji su išli na sekciju, njih

$$\frac{60}{100} \cdot 45 = 27 \ (7\ bodova)$$

bile su djevojčice. Nakon što je na sekciju došlo 5 novih učenika, ukupan broj učenika je 50 $(2\ boda)$, pa je ukupan broj djevojčica

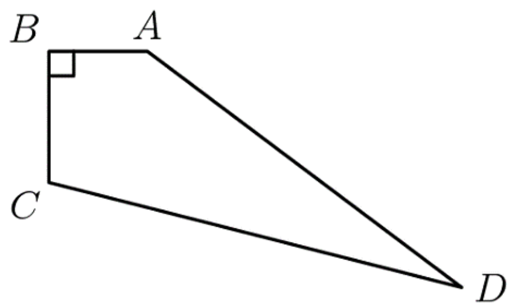
$$\frac{62}{100} \cdot 50 = 31. \ (7\ bodova)$$

Dakle, od 5 novih učenika, njih $31 - 27 = 4$ su djevojčice, pa je 1 učenik dječak. $(4\ boda)$

Zadatak 3. U četverouglu $ABCD$ sa slike vrijedi:

$$\overline{AB} = 3, \overline{BC} = 4, \overline{CD} = 13, \overline{AD} = 12,\ \angle ABC = 90^{\circ}.$$

Izračunati površinu datog četverougla.



Rješenje:

Podijelimo četverougao $ABCD$ na dva trougla: ΔABC i ΔCAD.

Trougao ΔABC je pravougli, pa je njegova površina jednaka

$$P_{\Delta ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4}{2} = 6. (3\ boda)$$

Na osnovu Pitagorine teoreme imamo da je

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2, (2\ boda)$$

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 4^2,$$

$$\overline{AC}^2 = 25,$$

$$\overline{AC} = 5. (3\ boda)$$

Posmatrajmo sada trougao ΔCAD. Primijetimo da je

$$5^2 + 12^2 = 13^2,$$

tj.

$$\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{CD}^2.$$

Dakle, $(5,12,13)$ je Pitagorina trojka, pa je trougao ΔCAD pravougli. $(7\ bodova)$

Njegova površina je

$$P_{\Delta CAD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AD}}{2} = 30. (3\ boda)$$

Dakle, površina četverougla sa slike je

$$P_{ABCD} = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta CAD} = 36. (2\ boda)$$

Napomena 1: U slučaju da učenik ne dokaže da je trougao ΔCAD pravougli, a koristi formulu za površinu pravouglog trougla dobiva 0 bodova na taj dio zadatka.

Napomena 2: Ako učenik ne primijeti da je trougao ΔCAD pravougli, već površinu trougla ΔCAD izračuna na neki drugi način, koristeći Heronovu formulu ili računajući visinu trougla ΔCAD, dobiva 10 bodova.

Zadatak 4. Odrediti najmanji prirodan broj n takav da je broj $\sqrt{5250 \cdot n}$ prirodan, te izračunati vrijednost $\sqrt{5250 \cdot n}$ u tom slučaju. Odgovor obrazložiti.

Rješenje:

Rastavljanjem (faktorizacijom) broja 5250 na proste faktore imamo da je

$$5250 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7. (3\ boda)$$

Da bi broj $\sqrt{5250 \cdot n}$ bio prirodan, broj $5250 \cdot n$ mora biti kvadrat nekog prirodnog broja. $(2\ boda)$

Primijetimo, da bi broj $5250 \cdot n$ bio kvadrat, broj n treba biti djeljiv sa 2, 3, 5 i 7. *(7 bodova)*

Najmanji takav broj je

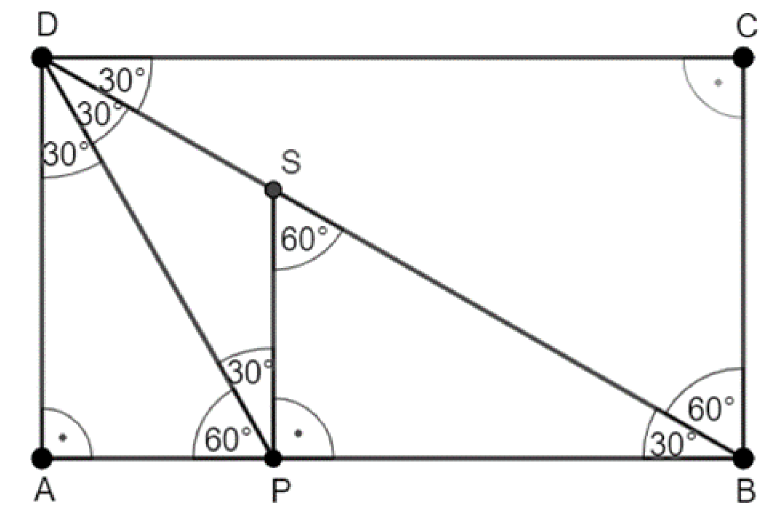
$$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210. (5\ bodova)$$

Tada je $\sqrt{5250 \cdot n} = \sqrt{5250 \cdot 210} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^2} = 1050$ *(3 boda)*

Zadatak 5. Dat je pravougaonik $ABCD$ u kome je $\overline{AD} = 2$ i na stranici $\overline{AB}$ postoji tačka P takva da je $\angle ADP = \angle BDP = \angle BDC$. Na dijagonali $\overline{BD}$ je data tačka S takva da vrijedi $\overline{DS} = \overline{PS}$. Izračunati $\overline{BS}$.

Rješenje:

<u>*1. način*</u>



Jednostavno se zaključuje da je $\angle ADP = \angle BDP = \angle BDC = 30^{\circ} (1\ boda)$, pa je $\angle APD = 90^{\circ} - 30^{\circ} = 60^{\circ} (1\ bod)$ i $\angle ABD = 90° - 30° - 30° = 30°\ (1\ bod)$.

Napomena: Dovoljno je da ove uglove učenik izračuna samo na slici.

Kako je $\angle PDB = \angle PBD = 30°$, to je trougao ΔPBD jednakokraki, tj.

$$\overline{PB} = \overline{PD}. (2\ boda)$$

Promatrajmo trougao ΔDAP. Uglovi u datom trouglu su $30^{\circ}, 60^{\circ}$ i 90°, pa je dati trougao polovina jednakostraničnog trougla, tj. $\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{1}{2}$ $(2\ boda)$, pa je zbog $\overline{PB} = \overline{PD}$ i $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{2}$ $(1\ bod)$. S druge strane, kako je $\overline{DS} = \overline{PS}$, to je $\angle DPS = 30°\ (1\ bod)$. Sada je $\angle APS = 60° + 30° = 90°\ (2\ boda)$. Kako su i $\overline{AD}$ i $\overline{PS}$ okomite na $\overline{AB}$, to je $\overline{AD} || \overline{PS}$ $(1\ bod)$. Zbog toga je iz Talesove teoreme $\frac{\overline{DS}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{1}{2}$ $(4\ boda)$. Kako je i trougao ΔABD polovina jednakostraničnog trougla, to je $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{AD} = 4\ (2\ boda)$.

Kako je $\overline{DS} = \overline{BD} - \overline{BS} = 4 - \overline{BS}$, to dobivamo $\frac{4-\overline{BS}}{\overline{BS}} = \frac{1}{2}$, odakle dobivamo $\overline{BS} = \frac{8}{3}$ $(2\ boda)$.

Napomena: Učenik može izračunati da je $\overline{DP} = \overline{PB} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ i $\overline{AP} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, te na taj način dobiti $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{1}{2}$. Računanje ovog odnosa je bitno samo ako pokušava da primijeni Talesovu teoremu.

<u>2. način</u>

Jednostavno se zaključuje da je $\angle ADP = \angle BDP = \angle BDC = 30^{\circ}(1\ boda)$, pa je $\angle APD = 90^{\circ} - 30^{\circ} = 60^{\circ}(1\ bod)$ i $\angle ABD = 90° - 30° - 30° = 30°\ (1\ bod)$.

Napomena: Dovoljno je da ove uglove učenik izračuna samo na slici.

Promatrajmo trougao ΔDAP. Uglovi u datom trouglu su $30^{\circ}, 60^{\circ}$ i 90°, pa je dati trougao pola jednakostraničnog trougla, zbog čega je $\overline{AP} = \frac{\overline{DP}}{2}$ $(2\ boda)$. Primjenom Pitagorine teoreme na taj trougao imamo:

$$\overline{DP}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AP}^2$$

$$\overline{DP}^2 = 2^2 + \left(\frac{\overline{DP}}{2}\right)^2$$

$$\overline{DP}^2 - \left(\frac{\overline{DP}}{2}\right)^2 = 4$$

$$\frac{3\overline{DP}^2}{4} = 4$$

$$\overline{DP} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ (2\ boda)$$

Napomena: Dužina stranice $\overline{DP}$ se može izračunati i koristeći formulu:

$$\overline{AD} = \frac{\overline{DP} \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Kako je $\angle PDB = \angle PBD = 30°$, to je trougao ΔPBD jednakokraki, tj.

$$\overline{BP} = \overline{PD} = \frac{4\sqrt{3}}{3}. (1\ bod)$$

S druge strane, kako je $\overline{DS} = \overline{PS}$, to je $\angle DPS = 30°\ (1\ bod)$. Sada je

$$\angle APS = 60° + 30° = 90° = \angle BPS\ (2\ boda).$$

Posmatrajmo sada trougao ΔBPS. On je polovina jednakostraničnog trougla, pa je

$$\overline{PS} = \frac{\overline{BS}}{2}\ (4\ boda).$$

Iz Pitagorine teoreme za taj trougao je

$$\overline{BP}^2 + \overline{PS}^2 = \overline{BS}^2$$

$$\overline{BP}^2 = \overline{BS}^2 - \overline{PS}^2 = \overline{BS}^2 - \left(\frac{\overline{BS}^2}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\overline{BS}^2$$

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}\overline{BS}^2$$

$$\frac{16}{3} = \frac{3}{4}\overline{BS}^2$$

$$\overline{BS} = \frac{8}{3}\ (5\ bodova).$$

Napomena: Učenik može izračunati $\overline{BS} = 2 \cdot \overline{BS}$ bez da izračuna $\overline{BP}$, ali onda mora izračunati $\overline{PS}$. Tu dužinu može izračunati iz trougla ΔDPS (kada se spusti visina iz S dobiva se polovina jednakostraničnog trougla, pa se odatle može izračunati $\overline{PS}$).

Rješenja zadataka za IX razred

Zadatak 1. Dat je izraz

$$A = \frac{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}{x^2y + xy^2}, \qquad (x^2y + xy^2 \neq 0)$$

a) Pojednostaviti izraz A.
b) Izračunati vrijednost izraza A za

$$x = \sqrt{7} - 2 \text{ i } y = \sqrt{7} + 2.$$

Rješenje:

a) Imamo

$$A = \frac{x^2(x+y) + y^2(x+y)}{xy(x+y)} = (4\ boda)$$

$$\frac{(x+y)(x^2+y^2)}{xy(x+y)} = (\ 2\ boda)$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}(3\ boda)$$

b) Za date x i y je

$$A = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(\sqrt{7}-2)^2 + \left(\sqrt{7}+2\right)^2}{(\sqrt{7}-2)\left(\sqrt{7}+2\right)} =$$

$$= \frac{7 - 4\sqrt{7} + 4 + 7 + 4\sqrt{7} + 4}{7 - 4} = (8\ bodova)$$

$$= \frac{22}{3}.\,(3\ boda)$$

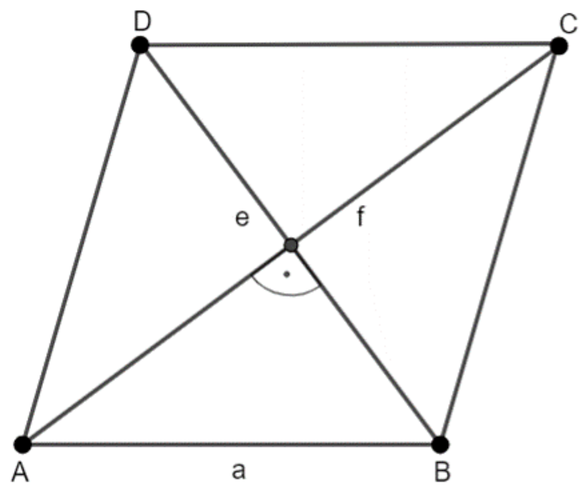
Napomena: Za svaki tačno izračunati kvadrat zbira dva broja u brojniku učenik dobiva 2 boda (ukupno 4 boda), a za tačno izračunati proizvod u nazivniku učenik dobiva 4 boda (2 boda za tačno množenje brojeva u zagradi, 2 boda za sabiranje brojeva).

Zadatak 2. U rombu $ABCD$ dužine dijagonala se odnose kao $3:4$. Ako je zbir dužina dijagonala romba 56, izračunati obim datog romba.

Rješenje:

<u>1.način za računanje dijagonala</u>

Označimo dijagonale romba sa e i f.



Iz $e: f = 3: 4$ imamo $e = 3k, f = 4k$, $(3\ boda)$ za neki pozitivan broj k. Uvrštavanjem u $e + f = 56$ slijedi

$$3k + 4k = 56, (3\ boda)$$

odakle je $k = 8. (2\ boda)$

Dakle,

$$e = 24, f = 32. (2\ boda)$$

<u>2. način za računanje dijagonala</u>

Označimo dijagonale romba sa e i f.

Iz $e: f = 3: 4$ imamo $4e = 3f, tj. e = \frac{3}{4}f. (3\ boda)$

Uvrštavanjem $e = \frac{3}{4}f$ u $e + f = 56$ imamo:

$$\frac{3}{4}f + f = 56\ (2\ boda)$$

$$\frac{7}{4}f = 56$$

$$f = \frac{56 \cdot 4}{7}$$

$$f = 32. (3\ boda)$$

$$e = \frac{3}{4}f = \frac{3}{4} \cdot 32 = 24. (2\ boda)$$

*

S obzirom da se dijagonale romba polove i da se sijeku pod pravim uglom *(*3 *boda)*, nalazimo na osnovu Pitagorine teoreme da je dužina stranice a romba jednaka

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 \quad (3\ boda)$$

Uvrštavanjem $e = 24, f = 32$ imamo:

$$a^2 = \left(\frac{24}{2}\right)^2 + \left(\frac{32}{2}\right)^2$$

$$a^2 = 400$$

$$a = 20. (2\ boda)$$

Obim romba je

$$O = 4 \cdot a = 4 \cdot 20 = 80. (2\ boda)$$

Zadatak 3. Zbir broja stranica i broja dijagonala pravilnog mnogougla iznosi 105. Neka je α veličina jednog unutrašnjeg ugla, a β veličina jednog vanjskog ugla tog mnogougla. Odrediti

$$\frac{\alpha}{\beta}.$$

Rješenje:

Neka je n broj stranica tog mnogougla. Broj dijagonala jednak je

$$\frac{n(n-3)}{2}\,.\,(2\ boda)$$

<u>*1. način za računanje broja*</u> n

Iz uslova zadatka je

$$n+\frac{n(n-3)}{2}=105\ (2\ boda)$$

$$\frac{2n+n^2-3n}{2}=105$$

$$\frac{n^2-n}{2}=105$$

$$\frac{n(n-1)}{2}=105,(2\ boda)$$

$$n(n-1)=2\cdot 105=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=(1\ bod)$$

$$=14\cdot 15,(2\ boda)$$

pa zaključujemo da je $n=15.(2\ boda)$

<u>*2. način za računanje broja*</u> n

Iz uslova zadatka je

$$n+\frac{n(n-3)}{2}=105\ (2\ boda)$$

$$\frac{2n+n^2-3n}{2}=105$$

$$n^2 - n - 210 = 0$$

Rastavljanjem izraza $n^2 - n - 210$ na faktore dobivamo:

$$n^2 + 14n - 15n - 210 = 0,$$

$$n(n+14) - 15(n+14) = 0,$$

$$(n+14)(n-15) = 0. (5\ bodova)$$

$$n + 14 = 0, \text{tj. } n = -14 \text{ ili } n - 15 = 0, \text{tj. } n = 15. (1\ bod)$$

Kako je n broj stranica mnogougla zaključujemo da je $n = 15$. *(1 bod)*

*

Dalje, s obzirom da je zbir svih unutrašnjih uglova u n-touglu jednak $(n-2) \cdot 180^{\circ}$, to je

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^{\circ}}{n} = (3\ boda)$$

$$= \frac{13 \cdot 180^{\circ}}{15} = 156^{\circ}, (2\ boda)$$

Sada je $\beta = 180^{\circ} - \alpha = 24^{\circ}$ *(2 boda)*

pa je

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{156^{\circ}}{24^{\circ}} = \frac{13}{2}. (2\ boda)$$

Napomena: Učenik može prvo izračunati vanjski ugao β, na osnovu činjenice da je zbir svih vanjskih uglova jednak 360°, pa odatle izračunati ugao α. U tom slučaju, računanje ugla β nosi 5 bodova, a računanje ugla α 2 boda.

Zadatak 4. Ako su x, y i z pozitivni realni brojevi takvi da je $xy = 16$, $xz = 32$ i $yz = 98$, izračunati vrijednost izraza:

$$x + y + z.$$

Rješenje:

1. način

Ako iz sistema jednačina

$$\begin{cases} xy = 16 \\ xz = 32 \\ yz = 98 \end{cases}$$

izrazimo iz prve jednačine $x = \frac{16}{y}$ $(1\ bod)$ i iz treće jednačine $z = \frac{98}{y}$ $(1\ bod)$ i uvrstimo u drugu jednačinu, imamo

$$\frac{16}{y} \cdot \frac{98}{y} = 32\ (6\ bodova)$$

$$\frac{16 \cdot 98}{y^2} = 32$$

$$32y^2 = 16 \cdot 98$$

$$y^2 = \frac{16 \cdot 98}{32}$$

$$y^2 = \frac{98}{2} = 49\ (3\ boda)$$

Kako je y pozitivan broj, to je $y = 7.\ (2\ boda)$

Dalje je,

$$x = \frac{16}{y} = \frac{16}{7} \text{ i } z = \frac{98}{y} = 14.\ (4\ boda)$$

Uvrštavanjem $x = \frac{16}{7}, y = 7$ i $z = 14$ u $x + y + z$ dobivamo

$$x + y + z = \frac{16}{7} + 7 + 14 = (2\ boda)$$

$$= \frac{163}{7}.\ (1\ bod)$$

2. način

Množenjem datih jednačina sistema

$$\begin{cases} xy = 16 \\ xz = 32 \\ yz = 98 \end{cases}$$

imamo

$$xy \cdot xz \cdot yz = 16 \cdot 32 \cdot 98 \ (3\ boda)$$

$$x^2y^2z^2 = 16 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 49$$

$$(xyz)^2 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 16^2$$

$$(xyz)^2 = (2 \cdot 7 \cdot 16)^2 = 224^2 \ (3\ boda)$$

Kako su x, y, z pozitivni brojevi, to je $xyz = 224. (2\ boda)$

Ako uvrstimo jednačinu $xy = 16$ u $xyz = 224$ dobit ćemo da je

$$16z = 224, \text{tj. } z = 14. (3\ boda)$$

Uvrštavanjem $xz = 32$ u datu jednačinu $xyz = 224$ imamo da je

$$32y = 224, tj.\ y = 7. (3\ boda)$$

Analogno, ako uvrstimo $yz = 98$ u $xyz = 224$ dobit ćemo da je

$$y = \frac{224:14}{98:14} = \frac{16}{7}. (3\ boda)$$

Uvrštavanjem $x = \frac{16}{7}, y = 7$ i $z = 14$ u $x + y + z$ imamo

$$x + y + z = \frac{16}{7} + 7 + 14 = (2\ boda)$$

$$= \frac{163}{7}. (1\ bod)$$

Zadatak 5. Dato je osam prirodnih brojeva: $a_1, a_2, \dots, a_8$. Poznato je da je drugi broj manji od prvog (tj. $a_2 < a_1$). Također, svaki sljedeći broj, počevši od trećeg, jednak je zbiru prethodna dva broja (dakle, vrijedi $a_3 = a_1 + a_2,\ a_4 = a_2 + a_3, \dots, a_8 = a_6 + a_7$). Ako je $a_7 = 120$, odrediti a_8. Odgovor obrazložiti.

Rješenje:

Imamo:

$$a_3 = a_2 + a_1,$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2a_2 + a_1,$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3a_2 + 2a_1,$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 5a_2 + 3a_1,$$

$$a_7 = a_6 + a_5 = 8a_2 + 5a_1 \,(7\ bodova)$$

Iz jednačine $8a_2 + 5a_1 = 120$ slijedi da je $8a_2 = 5(24 - a_1)$, pa a_2 mora biti djeljivo sa 5. Pošto je $8a_2 < 120$ to je $a_2 < 15$. Kako je a_2 djeljivo sa 5 imamo da a_2 može biti ili 5 ili 10. $(7\ bodova)$

Ako je $a_2 = 5$, uvrštavajući u jednačinu $8a_2 + 5a_1 = 120$ dobivamo da je $a_1 = 16$.

Za $a_2 = 10$ dobivamo da je $a_1 = 8$, što nije moguće zbog pretpostavke zadatka da je $a_2 < a_1$.

Dakle, jedino rješenje je $a_1 = 16, a_2 = 5.\ (4\ boda)$

Dalje imamo da je $a_3 = 21, a_4 = 26, a_5 = 47, a_6 = 73, a_8 = a_7 + a_6 = 193.\ (2\ boda)$