Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
4. marta/ožujka 2025.

I razred

1. Neka je dat izraz

$$W = \frac{a^3 + a^2 - 2a}{a|a+2| - a^2 + 4} - \frac{|1-2a|}{4}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

   Odrediti sve realne vrijednosti a za koje vrijedi $W = -\frac{1}{4}$.

2. Data je kocka dimenzija $9 \times 9 \times 9$ koja se sastoji od 729 jediničnih kockica. Tri strane kocke su obojene plavom, a tri crvenom bojom, tako da svaka od kockica u vrhovima kocke ima dvije strane različite boje. Koliko ima kockica koje imaju dvije strane različite boje?

3. Odrediti sve parove (a, b) prirodnih brojeva takvih da je $a^{2025} + b$ djeljiv sa ab.

4. U kružnici k tetive AC i BD su okomite i sijeku se u tački G. Prave p_1, p_2, p_3, p_4 prolaze kroz G i okomite su na AB, BC, CD, DA, redom. Neka je $p_1 \cap CD = \{X_1\}, p_2 \cap DA = \{X_2\}, p_3 \cap AB = \{X_3\}$ i $p_4 \cap BC = \{X_4\}$. Dokazati da je četverougao $X_1X_2X_3X_4$ pravougaonik.

5. Neka je $f(x)$ količnik dva polinoma drugog stepena sa realnim koeficijentima. Ako vrijedi da je $f(n) = n^3$ za sve $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, izračunati koliko je $f(0)$.

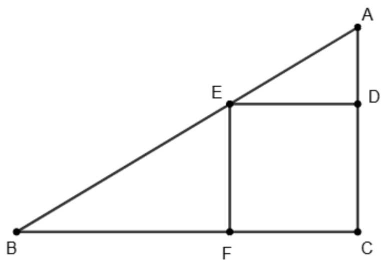
Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.
Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
4. marta/ožujka 2025.

II razred

1. Jednačina $x^4 - 20x^2 + 16 = 0$ ima četiri realna rješenja $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Za svaki od brojeva $x_2 + x_4, x_2 \cdot x_4$ i $(x_2 - x_4)^2$ odrediti da li je racionalan ili iracionalan.

2. Katete pravouglog trougla se razlikuju za 48. U njega je upisan kvadrat površine 2025, kao na slici. Odrediti površinu tog trougla.



3. Da li postoje kvadratni polinomi (sa realnim koeficijentima) $P(x)$ i $Q(x)$ takvi da polinom $R(x) = P(Q(x))$ ima četiri realne nule x_1, x_2, x_3, x_4, pri čemu je:
   (a) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 8$?
   (b) $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 6, x_4 = 8$?

4. Odrediti sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje je broj $(a + b)^3 - 2a^3 - 2b^3$ stepen broja 2.

   Napomena: Stepen broja 2 je broj koji se može napisati u obliku 2^k, gdje je k nenegativan cijeli broj.

5. Dato je $k \geq 2$ kutija, te se u njima nalazi redom $x_1, x_2, \ldots, x_k$ olovaka. U jednom potezu je dozvoljeno izabrati dvije kutije, te ako prva ima a, a druga b olovaka, pri čemu je $a \geq b$, prebaciti b olovaka iz prve kutije u drugu (nakon prebacivanja će prva kutija imati $a - b$, a druga $2b$ olovaka). Za $k-$torku $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ prirodnih brojeva kažemo da je *lijepa* ako se nakon konačno mnogo ovakvih poteza može postići da su sve olovke u istoj kutiji. Odrediti sve lijepe $k-$torke.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.
Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
4. marta/ožujka 2025.

III razred

1. Neka su a, b, c realni brojevi i posmatrajmo kvadratnu funkciju $y = ax^2 + bx + c$ sa različitim nulama x_1 i x_2. Neka su A i B tačke presjeka grafika ove funkcije sa x osom.
   (a) Ako su tangente u tačkama A i B na grafik funkcije okomite jedna na drugu, dokazati da je diskriminanta kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ jednaka 1.
   (b) Ako je $M = (\frac{x_1+x_2}{2}, 0)$ i T presjek tangenti u A i B na grafik funkcije, odrediti površinu trougla ΔATM.

2. Odrediti sve realne brojeve $0 \leq x \leq \pi$ za koje je izraz
$$\cos(x) + i\sin(x) - \cos(2x) - i\sin(2x) + \cos(3x) + i\sin(3x)$$
jednak nuli (pri čemu je i imaginarna jedinica).

3. Označimo sa S broj uređenih parova (a, b) cijelih brojeva $1 \leq a \leq 100$ i $b \geq 0$ za koje se polinom $x^2 + ax + b$ može faktorisati kao $(x + c)(x + d)$ za neke cijele brojeve c i d. Odrediti vrijednost S.

4. Neka su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi $a > b$ i
$$NZD(a - b, ab + 1) = NZD(a + b, ab - 1) = 1.$$
Dokazati da broj $(a - b)^2 + (ab + 1)^2$ nije kvadrat prirodnog broja.

5. Neka je O centar opisane kružnice raznostraničnog trougla ABC i neka je T težište tog trougla. Tačka M je sredina stranice AB. Dokazati da je OT okomito na težišnicu CM ako i samo ako vrijedi $BC^2 + AC^2 = 2AB^2$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.
Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
4. marta/ožujka 2025.

IV razred

1. Odrediti sve prirodne brojeve $n \geq 4$ takve da vrijedi
$$50n \cdot \binom{n+1}{n-4} = \binom{n^2+1}{3}.$$

2. U koordinatnom sistemu označene su sve tačke čije su obje koordinate cijeli brojevi između 1 i 5, uključujući i 1 i 5. Koliko postoji trouglova sa tjemenima u označenim tačkama čija je površina veća od 0 (tj. čija tjemena ne leže na jednoj pravoj)?

3. Dat je trougao $\triangle ABC$. Na stranicama BC i CA date su tačke D i E, redom. Duži AD i BE sijeku se u T. Pretpostavimo da vrijedi $AT = CD = 2 \cdot BT = 2 \cdot CE$ i $P_{\triangle ABT} = P_{\triangle CED}$.
   (a) Dokazati da je četverougao $CETD$ tetivan.
   (b) Odrediti odnos $\frac{P_{\triangle ATC}}{P_{\triangle BTC}}$.

   Napomena: sa $P_{\triangle XYZ}$ označavamo površinu trougla $\triangle XYZ$.

4. (a) Odrediti sve prirodne brojeve a sa sljedećom osobinom: za svaki neparan prost broj p postoji prirodan broj n takav da p istovremeno dijeli brojeve $a^n - n$ i $a^{n+1} - (n+1)$.
   (b) Odrediti sve prirodne brojeve a sa sljedećom osobinom: za svaki neparan prost broj p postoji prirodan broj n takav da p istovremeno dijeli brojeve $a^n - n^2$ i $a^{n+1} - (n+1)^2$.

5. Neka je n neparan prirodan broj, i neka su p, q racionalni brojevi za koje vrijedi $p^2 + q^2 = 1$. Dokazati da je broj
$$\left| \sum_{j=0}^{n-1} (p + iq)^j \right|$$
racionalan, gdje i označava imaginarnu jedinicu.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.
Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
4. marta/ožujka 2025.

I razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

1. Neka je dat izraz

$$W = \frac{a^3 + a^2 - 2a}{a|a+2| - a^2 + 4} - \frac{|1-2a|}{4}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Odrediti sve realne vrijednosti a za koje vrijedi $W = -\frac{1}{4}$.

Rješenje:

Kako je

$$|a+2| = \begin{cases} a+2, & \text{za } a+2 \geq 0, \text{ tj. } a \geq -2, \\ -(a+2), & \text{za } a+2 < 0 \text{ tj. } a < -2, \end{cases}$$

i

$$|1-2a| = \begin{cases} 1-2a, & \text{za } 1-2a \geq 0, \text{ tj. } a \leq \frac{1}{2}, \\ 2a-1, & \text{za } 1-2a < 0, \text{ tj. } a > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

te $a \neq -2$, to ćemo razlikovati sljedeća tri slučaja:

I. ako $a \in (-\infty, -2)$, imamo

$$\begin{aligned} W &= \frac{a^3 + a^2 - 2a}{-a(a+2) - a^2 + 4} - \frac{1-2a}{4} = \frac{a(a^2+a-2)}{-a^2-2a-a^2+4} - \frac{1-2a}{4} \\ &= \frac{a(a-1)(a+2)}{-2(a^2+a-2)} - \frac{1-2a}{4} = \frac{a(a-1)(a+2)}{-2(a-1)(a+2)} - \frac{1-2a}{4} \\ &= -\frac{a}{2} - \frac{1}{4} + \frac{a}{2} = -\frac{1}{4}; \end{aligned}$$

Dakle, za sve $a \in (-\infty, -2)$ vrijedi da je $W = -\frac{1}{4}$.

II. ako $a \in (-2, \frac{1}{2})$, imamo

$$\begin{aligned} A &= \frac{a(a-1)(a+2)}{a(a+2) - a^2 + 4} - \frac{1-2a}{4} = \frac{a(a-1)(a+2)}{a^2+2a-a^2+4} - \frac{1-2a}{4} \\ &= \frac{a(a-1)(a+2)}{2(a+2)} - \frac{1-2a}{4} = \frac{a(a-1)}{2} - \frac{1-2a}{4} \\ &= \frac{2a^2-2a-1+2a}{4} = \frac{2a^2-1}{4}; \end{aligned}$$

Jednakost $\frac{2a^2-1}{4} = -\frac{1}{4}$ vrijedi samo za $a = 0$, što pripada intervalu $(-2, \frac{1}{2})$.

III. ako $a \in [\frac{1}{2}, +\infty)$, imamo

$$A = \frac{a(a-1)(a+2)}{a(a+2)-a^2+4} - \frac{2a-1}{4} = \frac{a(a-1)}{2} - \frac{2a-1}{4} = \frac{2a^2-2a-2a+1}{4}$$
$$= \frac{2a^2-4a+1}{4}.$$

Jednakost $\frac{2a^2-4a+1}{4} = -\frac{1}{4}$ se nakon sređivanja svodi na $(a-1)^2 = 0$, te ona vrijedi samo za $a = 1$, što pripada intervalu $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

Dakle, tražene vrijednosti su $a \in (-\infty, -2) \cup \{0, 1\}$.

Šema bodovanja:

- Oslobađanje od apsolutnih vrijednosti .... **2 boda**
- Pravilna podjela na slučajeve .... **3 boda**

∗ Ukoliko učenik uključi broj -2 u neki od slučajeva ili zaboravi uključiti neki drugi broj (npr. $\frac{1}{2}$) dobija 2 od ova 3 boda, pod uslovom da je osim toga podjela dobra

- Rješavanje svakog od slučajeva .... $3 \times 5 =$ **15 bodova**

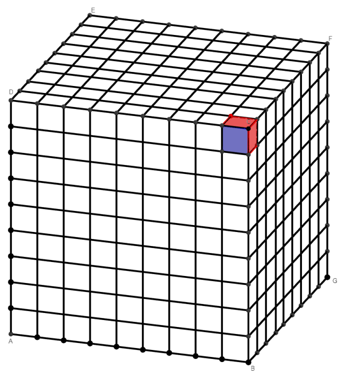
∗ Ukoliko u slučajevima II i III učenik dobije rješenje, ali ne konstatuje da to rješenje pripada intervalu za taj slučaj, dobija 4 od ovih 5 bodova

2. Data je kocka dimenzija $9 \times 9 \times 9$ koja se sastoji od 729 jediničnih kockica. Tri strane kocke su obojene plavom, a tri crvenom bojom, tako da svaka od kockica u vrhovima kocke ima dvije strane različite boje. Koliko ima kockica koje imaju dvije strane različite boje?

Rješenje:

Posmatrajmo vrh C kocke na slici ispod. Prema uslovu zadatka, jedinična kockica koja sadrži vrh C mora imati dvije strane različite boje. Stoga, bez umanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da se u tom vrhu sastaju dvije crvene strane i jedna plava strana kocke. Neka je strana $ABCD$ obojena u plavu boju, a strane $BCFG$ i $CDEF$ u crvenu boju. Kako strane $BCFG$ i $CDEF$ imaju zajednički vrh F to strana $EFGH$ mora biti obojena plavom bojom da bi kockica u vrhu F ispunjavala uvjete zadatka. Na ovaj način preostaje još da obojimo strane $ABGH$ i $ADEH$.

Strane $ABGH$ i $ADEH$ moraju biti obojene različitim bojama, jer u protivnom kockica u nekom od vrhova A ili H ne bi zadovoljavala uslove zadatka. Bez umanjena općenitosti, neka je strana $ABGH$ obojena crvenom bojom, a strana $ADEH$ plavom bojom.
Tražene kockice se nalaze na ivicama koje su zajedničke za plave i crvene strane. Takvih ivica ima 8 (sve ivice osim ivica BG, CF, EH i AD), i ukupni broj kockica na njima je $8 \cdot 9 = 72$. Na taj način smo svaku od kockica i vrhovima kocke $ABCDEFGH$ prebrojali dva puta, pa je ukupan broj kockica sa dvije strane obojene različitim bojama jednak $72 - 8 = 64$.



Šema bodovanja:

- konfiguracija kako strane kocke moraju biti obojene .... **12 bodova**
- brojanje kockica koje zadovoljavaju uvjet zadatka .... **8 bodova**

3. Odrediti sve parove (a, b) prirodnih brojeva takvih da je $a^{2025} + b$ djeljiv sa ab.

Rješenje:

Pošto treba da vrijedi $ab \mid a^{2025} + b$, to nam daje da treba vrijediti $a \mid b$. Odavde vidimo da b mora biti oblika $b = ab_1$. Zamjenom dobijamo $a^2 b_1 \mid a^{2025} + ab_1$, pa $ab_1 \mid a^{2024} + b_1$. Ponovno dobijamo da treba vrijediti da $a \mid b_1$, pa b_1 mora biti oblika $b_1 = ab_2$. Zamjenom dobijamo $a^2 b_2 \mid a^{2024} + ab_2$, pa $ab_2 \mid a^{2023} + b_2$. Ponovno dobijamo da treba vrijediti da $a \mid b_2$, pa b_2 mora biti oblika $b_2 = ab_3$.

Nastavljajući ovako, ako imamo $ab_i \mid a^{2025-i} + b_i$, tada $a \mid b_i$, pa mora vrijediti $b_i = ab_{i+1}$, odakle slijedi $ab_{i+1} \mid a^{2025-(i+1)} + b_{i+1}$. Nastavljajući ovaj postupak, dolazimo do toga da $ab_{2025} \mid 1 + b_{2025}$.

Posljednje je moguće samo ako je $b_{2025} = 1$, te kako je $b = a^{2025} b_{2025}$, slijedi da je $b = a^{2025}$. Dakle, treba da vrijedi $a^{2026} \mid 2a^{2025}$, tj. $a \mid 2$, odakle zaključujemo da je $a = 1$ ili $a = 2$.

Ako je $a = 1$, onda je i $b = 1$, pa dobijamo par $(a, b) = (1, 1)$.

Ako je $a = 2$, onda je $b = 2^{2025}$, pa je drugi par za koji vrijedi tvrdnja zadatka $(a, b) = (2, 2^{2025})$.

Dakle, rješenja su $(a, b) \in \{(1, 1), (2, 2^{2025})\}$.

Šema bodovanja:

- zaključak da $a \mid b$ i da je $b = ab_1$ .... **3 boda**
- zaključak da $ab_{2025} \mid 1 + b_{2025}$ .... **10 bodova**
- zaključak da je $b_{2025} = 1$ .... **2 boda**
- zaključak da je $a = 1$ ili $a = 2$ .... **3 boda**
- rješenja $(a, b) \in \{(1, 1), (2, 2^{2025})\}$ .... **2 boda**

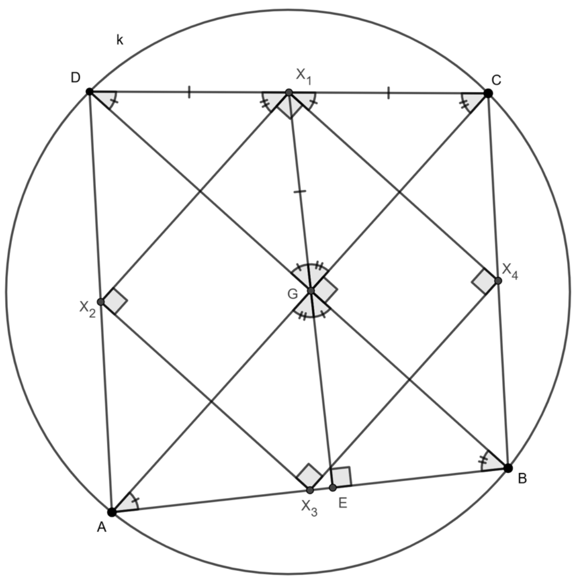
4. U kružnici k tetive AC i BD su okomite i sijeku se u tački G. Prave p_1, p_2, p_3, p_4 prolaze kroz G i okomite su na AB, BC, CD, DA, redom. Neka je $p_1 \cap CD = \{X_1\}, p_2 \cap DA = \{X_2\}, p_3 \cap AB = \{X_3\}$ i $p_4 \cap BC = \{X_4\}$. Dokazati da je četverougao $X_1X_2X_3X_4$ pravougaonik.

Rješenje:

Neka prava p_1 siječe AB u E. Trouglovi $\triangle ABG$ i $\triangle BGE$ su pravougli, pa je

$$\angle BGE = 90^\circ - \angle EBG = 90^\circ - \angle ABG = \angle BAG.$$

Kako je $\angle BAG = \angle BAC = \angle BDC = \angle GDX_1$ (jednakost $\angle BAC = \angle BDC$ vrijedi jer su to periferijski uglovi nad istom tetivom), imamo $\angle DGX_1 = \angle BGE = \angle BAG = \angle GDX_1$, odakle je $X_1D = X_1G$. Na isti način pokazujemo da je i $GX_1 = CX_1$, pa je $DX_1 = GX_1 = CX_1$, tj. X_1 je sredina stranice CD.



Analogno se pokazuje da su X_2, X_3, X_4 sredine stranica DA, AB i BC, redom.
Dokažimo sada da je ugao $\angle X_2X_1X_4$ prav. Kako su X_1, X_2, X_4 sredine stranica CD, AD, BC, redom, to je X_1X_2 srednja linija trougla $\triangle ACD$, a X_1X_4 je srednja linija trougla $\triangle BCD$. Odavde je $X_1X_2 \parallel AC$ i $X_1X_4 \parallel BD$. Kako su AC i BD okomite prave, to su i X_1X_2 i X_1X_4 okomite, pa je ugao $\angle X_2X_1X_4$ prav. Analogno se pokazuje da su i ostali uglovi četverougla $X_1X_2X_3X_4$ pravi, pa je ovaj četverougao pravougaonik.

Šema bodovanja:

- zaključak da vrijede obje jednakosti $\angle BDC = \angle CAB = \angle BGE$ .... **2 boda**
- $*$ Da bi dobio ova 2 boda učenik mora imati obje jednakosti, pri čemu je dovoljno da su odgovarajući uglovi na slici označeni
- zaključak da je $X_1D = X_1G$ .... **3 boda**
- zaključak da je X_1 sredina stranice BC .... **4 boda**
- zaključak da su i X_2, X_3, X_4 sredine odgovarajućih stranica .... **1 bod**
- zaključak da su X_1X_2 i X_1X_4 srednje linije i da su paralelne sa AC i BD . **2 boda**
- zaključak da je ugao $\angle X_2X_1X_4$ prav .... **5 bodova**
- zaključak da su i ostali uglovi pravi i da je $X_1X_2X_3X_4$ pravougaonik ...... **3 boda**

5. Neka je $f(x)$ količnik dva polinoma drugog stepena sa realnim koeficijentima. Ako vrijedi da je $f(n) = n^3$ za sve $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, izračunati koliko je $f(0)$.

Rješenje:

Neka je $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, pri čemu su $p(x)$ i $q(x)$ polinomi drugog stepena. Primijetimo da bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je vodeći koeficijent polinoma $q(x)$ jednak 1, jer ako je vodeći koeficijent jednak a, možemo čitav razlomak proširiti sa $\frac{1}{a}$. Kako je $f(n) = n^3$ za sve $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, to vrijedi da je $\frac{p(n)}{q(n)} = n^3$ za sve $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, odnosno

$$n^3 q(n) - p(n) = 0 \text{ za sve } n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Tada polinom $r(x) = x^3 q(x) - p(x)$ ima korijene $1, 2, 3, 4, 5$, a kako je vodeći koeficijent polinoma $q(x)$ jednak 1, to je i vodeći koeficijent polinoma $r(x)$ jednak 1, pa vrijedi $r(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$, tj.

$$x^3 q(x) - p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120.$$

Odavde dobijemo $q(x) = x^2 - 15x + 85$ i $p(x) = 225x^2 - 274x + 120$, pa je $q(0) = 85$ i $p(0) = 120$. Prema tome, imamo da je

$$f(0) = \frac{p(0)}{q(0)} = \frac{120}{85} = \frac{24}{17}.$$

Šema bodovanja:

- zaključak da polinom $r(x) = x^3 q(x) - p(x)$ ima korijene $1, 2, 3, 4, 5$ ..... **6 bodova**
- zaključak da to znači $r(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ .... **2 boda**

∗ Ova dva boda učenik dobija i ako nije izvršio normalizaciju, te je zaključio $r(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$, pri čemu je a vodeći koeficijent polinoma $q(x)$

- jednakost $x^3 q(x) - p(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$ .... **2 boda**

∗ Ova dva boda učenika dobija i ako dobije sljedeću jednakost $x^3 q(x) - p(x) = ax^5 - 15ax^4 + 85ax^3 - 225ax^2 + 274ax - 120a$, pri čemu je $a \neq 0$

- zaključak da je $q(x) = x^2 - 15x + 85$ i $p(x) = 225x^2 - 274x + 120$ ...... **7 bodova**

∗ Isti broj bodova dobija učenik ako dobije da je $q(x) = ax^2 - 15ax + 85a$ i $p(x) = 225ax^2 - 274ax + 120a$

- Dobijanje rezultata $f(0) = \frac{p(0)}{q(0)} = \frac{120}{85} = \frac{24}{17}$ .... **3 boda**

Napomena: Ako učenik označi $q(x) = ax^2 + bx + c$ i $p(x) = dx^2 + ex + f$, te pravilno postavi odgovarajućih pet uslova, dobija 3 boda. Ako pri tome izvrši normalizaciju, tj. zaključi da može bez umanjenja opštosti pretpostaviti $a = 1$ (ili nešto slično), dobija još 3 boda (jer je tako dobio sistem 5 jednačina sa 5 nepoznatih). Ukoliko učenik radi na ovaj način, broj bodova će zavisiti od progresa u rješavanju tog sistema.

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
4. marta/ožujka 2025.

II razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

1. Jednačina $x^4 - 20x^2 + 16 = 0$ ima četiri realna rješenja $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Za svaki od brojeva $x_2 + x_4, x_2 \cdot x_4$ i $(x_2 - x_4)^2$ odrediti da li je racionalan ili iracionalan.

Rješenje:

Uvedimo smjenu $y = x^2$. Tada se data jednačina svodi na kvadratnu jednačinu $y^2 - 20y + 16 = 0$. Ova jednačina ima dva rješenja $y_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 16}}{2} = 10 \pm 2\sqrt{21}$.

Primijetimo da se ova rješenja mogu napisati u obliku $y_{1,2} = 7 \pm 2\sqrt{7}\sqrt{3} + 3 = \left(\sqrt{7} \pm \sqrt{3}\right)^2$. Odavde su rješenja za x jednaka $\pm\left(\sqrt{7} \pm \sqrt{3}\right)$, odnosno $x_1 = -\sqrt{7} - \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{7} + \sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{7} - \sqrt{3}$ i $x_4 = \sqrt{7} + \sqrt{3}$. Sada imamo:

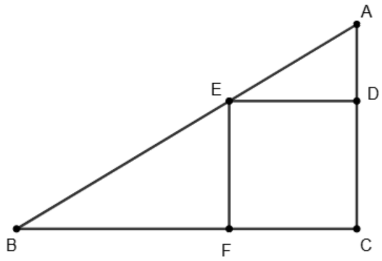
- $x_2 + x_4 = -\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, što je iracionalan broj,
- $x_2 \cdot x_4 = \left(-\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right) = 3 - 7 = -4$, što je racionalan broj,
- $(x_2 - x_4)^2 = (-\sqrt{7} + \sqrt{3} - \sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = \left(-2\sqrt{7}\right)^2 = 28$, što je racionalan broj.

Šema bodovanja:

- dobijanje rješenja $y_{1,2} = 10 \pm 2\sqrt{21}$ .... **5 bodova**
- svođenje rješenja na oblik $y_{1,2} = \left(\sqrt{7} \pm \sqrt{3}\right)^2$ .... **5 bodova**
- dobijanje rješenja za x i njihov ispravan poredak $x_1 = -\sqrt{7} - \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{7} + \sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{7} - \sqrt{3}$ i $x_4 = \sqrt{7} + \sqrt{3}$ .... **4 boda**
- računanje $x_2 + x_4 = 2\sqrt{3}$ i zaključak da je to iracionalan broj .... **2 boda**
- računanje $x_2 \cdot x_4 = -4$ i zaključak da je to racionalan broj .... **2 boda**
- računanje $(x_2 - x_4)^2 = 28$ i zaključak da je to racionalan broj .... **2 boda**

Napomena: Ukoliko učenik ne svede rješenja na oblik $\pm(\sqrt{7} \pm \sqrt{3})$, već radi sa oblikom $\pm\sqrt{10 \pm 2\sqrt{21}}$, tada se 4 od 5 bodova za svođenje na pomenuti oblik prebacuje na dokazivanje da je $x_2 + x_4$ iracionalan broj (tako da taj dokaz vrijedi 6 bodova), a preostali bod se prebacuje na dokaz da je $(x_2 - x_4)^2$ racionalan broj (što onda vrijedi 3 boda).

2. Katete pravouglog trougla se razlikuju za 48. U njega je upisan kvadrat površine 2025, kao na slici. Odrediti površinu tog trougla.



Rješenje:

Označimo dužine kateta BC i AC sa a i b, redom. Iz uslova teksta zadatka imamo $a - b = 48$ (bez umanjenja opštosti možemo uzeti $a > b$).

Ako dužinu stranice kvadrata $CDEF$ označimo sa d, tada je $d^2 = 2025$, odnosno $d = 45$.

Trouglovi BFE i BCA su slični, pa vrijedi $\frac{BF}{FE} = \frac{BC}{CA}$, odnosno $\frac{a-d}{d} = \frac{a}{b}$.

Sređivanjem izraza i uvrštavanjem vrijednosti za d, dobijemo $ab - 45(a+b) = 0$. Ako sada uvrstimo $a = b + 48$, dobit ćemo kvadratnu jednačinu $b^2 - 42b - 2160 = 0$, čije je jedino pozitivno rješenje jednako $b = 72$.

Odavde je $a = 120$, pa je površina trougla ABC jednaka $P = \frac{ab}{2} = \frac{120 \cdot 72}{2} = 4320$.

Šema bodovanja:

- dobijanje dužine stranice kvadrata $d = 45$ .... **1 bod**
- zaključak da su trouglovi BFE i BCA slični .... **4 boda**
- dobijanje relacije $ab = 45(a + b)$ .... **6 bodova**
- dobijanje kvadratne jednačine po b (ili po a) .... **4 boda**
- izračunavanje stranica a i b .... **3 boda**
- izračunavanje površine trougla .... **2 boda**

3. Da li postoje kvadratni polinomi (sa realnim koeficijentima) $P(x)$ i $Q(x)$ takvi da polinom $R(x) = P(Q(x))$ ima četiri realne nule x_1, x_2, x_3, x_4, pri čemu je:

   (a) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 8$?

   (b) $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 6, x_4 = 8$?

Rješenje:

a) Pretpostavimo da postoje takvi polinomi $P(x)$ i $Q(x)$. Tada polinom $P(x)$ mora imati realnu nulu. Neka su $y_1 \leq y_2$ realne nule polinoma $P(x)$. Da bi vrijedilo $R(w) = 0$, mora vrijediti $Q(w) \in \{y_1, y_2\}$. Neka je $Q(x) = ax^2+bx+c$. Kako je $Q(x)$ kvadratni polinom, to za maksimalno dvije vrijednosti w može vrijediti $Q(w) = y_1$ i za maksimalno dvije vrijednosti w može vrijediti $Q(w) = y_2$. Dakle, jedini način da za četiri različite vrijednosti w_1, w_2, w_3, w_4 vrijedi $R(w_1) = R(w_2) = R(w_3) = R(w_4) = 0$ je da za dvije vrijednosti (recimo w_1 i w_2) vrijedi $Q(w_1) = Q(w_2) = y_1$, a za preostale dvije da vrijedi $Q(w_3) = Q(w_4) = y_2$.

   S druge strane, ako je $Q(w_1) = Q(w_2)$, tada su w_1 i w_2 simetrični u odnosu na apscisu tjemena parabole, tj. vrijedi $\frac{w_1+w_2}{2} = -\frac{b}{2a}$. To znači da ako je $Q(w_1) = Q(w_2) = y_1$ i $Q(w_3) = Q(w_4) = y_2$, vrijedi $\frac{w_1+2_2}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{w_3+w_4}{2}$, odakle je $w_1 + w_2 = w_3 + w_4$. Kako se brojevi $1, 2, 4, 8$ ne mogu podijeliti u dva para sa jednakim zbirom, došli smo do kontradikcije, pa ne postoje takvi polinomi $P(x)$ i $Q(x)$.

b) Neka je $Q(x) = x^2 - 9x$. Tada je $Q(1) = Q(8) = -8$ i $Q(3) = Q(6) = -18$. Sada za $P(x) = (x + 8)(x + 18)$ imamo da vrijedi $R(1) = R(3) = R(6) = R(9) = 0$, pa u ovom slučaju traženi polinomi postoje.

Šema bodovanja:

- zaključak da ako je $R(w) = 0$, tada mora vrijediti $Q(w) \in \{y_1, y_2\}$, gdje su y_1 i y_2 nule polinoma $P(x)$ .... **4 boda**
- zaključak da za najviše dvije vrijednosti w može vrijediti $Q(w) = y_1$ (ili y_2) **3 boda**
- zaključak da te dvije vrijednosti moraju biti simetrične u odnosu na apscisu tjemena parabole .... **3 boda**
- zaključak da se to ne može desiti u dijelu pod a) .... **3 boda**
- konstrukcija polinoma za dio pod b) i dokaz da oni zadovoljavaju uslov . **7 bodova**

Napomena: Zadatak se mogao uraditi i pisanjem $P(x) = ax^2+bx+c, Q(x) = dx^2+ex+f$, te zaključkom da je $R(x) = t(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)$ (ili $R(x) = t(x-1)(x-3)(x-6)(x-8)$), a onda izjednačavanjem koeficijenata doći do istih zaključaka.

4. Odrediti sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje je broj $(a+b)^3 - 2a^3 - 2b^3$ stepen broja 2.

Napomena: Stepen broja 2 je broj koji se može napisati u obliku 2^k, gdje je k nenegativan cijeli broj.

Rješenje:

Razmotrimo najprije slučaj kada je $NZD(a, b) = 1$. Imamo

$(a+b)^3 - 2a^3 - 2b^3 = (a+b)((a+b)^2 - 2(a^2 - ab + b^2)) = (a+b)(4ab - a^2 - b^2)$.

Kako je $a + b > 0$, to mora vrijediti i $4ab - a^2 - b^2 > 0$. Da bi proizvod ovih brojeva bio stepen dvice, oba broja $a + b$ i $4ab - a^2 - b^2$ moraju biti stepeni dvice. Kako je $a + b > 1$, to je $a + b$ parno, pa su a i b neparni (jer su relativno prosti). Međutim, kako kvadrat neparnog broja daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 4, to je $4ab - a^2 - b^2 \equiv -2 \equiv 2 \pmod 4$. Jedini stepen dvice koji daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 4 je broj 2, pa mora vrijediti $4ab - a^2 - b^2 = 2$, što možemo zapisati kao $6ab = 2 + (a+b)^2$.

S druge strane, ako je $a + b = 2^k$, prethodna jednakost postaje $6ab = 2 + 2^{2k}$, pa nakon dijeljenja sa 2 i uvrštavanja $b = 2^k - a$ imamo $3a(2^k - a) = 1 + 2^{2k-1}$, tj. $3a \cdot 2^k = 3a^2 + 1 + 2^{2k-1}$. Kako kvadrat neparnog broja daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 8, to za $k \geq 3$ prethodna jednakost nije moguća, s obzirom da je lijeva strana djeljiva sa 8, a desna daje ostatak 4 pri dijeljenju sa 8. Dakle, imamo sljedeća dva slučaja:

1) $a + b = 2$. Ovo je moguće samo za $a = b = 1$, što lako provjeravamo da jeste rješenje zadatka.

2) $a + b = 4$. Ovo je moguće samo za $(a, b) \in \{(1, 3), (3, 1)\}$, što također jeste rješenje zadatka.

Neka je sada $NZD(a, b) = d$. Kako je broj $(a+b)^3 - 2a^3 - 2b^3$ očigledno djeljiv sa d, to d mora biti stepen dvice. Neka je $a = dx, b = dy$. Tada je $NZD(x, y) = 1$ i vrijedi $(a+b)^3 - 2a^3 - 2b^3 = d^3((x+y)^3 - 2x^3 - 2y^3)$. Kako je d stepen dvice, to mora i $(x+y)^3 - 2x^3 - 2y^3$ biti stepen dvice. Međutim, već smo vidjeli da su jedini parovi relativno prostih brojeva koji to zadovoljavaju $(1, 1), (1, 3)$ i $(3, 1)$. Pošto d može biti bilo koji stepen dvice (uključujući i 1), to su rješenja $(a, b) \in \{(2^k, 2^k), (2^k, 3 \cdot 2^k), (3 \cdot 2^k, 2^k) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.

Šema bodovanja:

- zaključak da je $NZD(a, b)$ stepen dvice i svođenje zadatka na slučaj kad su a i b relativno prosti .... **4 boda**
- zaključak da su $a + b$ i $4ab - a^2 - b^2$ stepeni dvice .... **3 boda**
- zaključak da je $4ab - a^2 - b^2 = 2$ .... **4 boda**
- zaključak da je nemoguće da vrijedi $a + b = 2^k$ za $k \geq 3$ .... **6 bodova**
- rješavanje slučajeva $a + b = 2$ i $a + b = 4$ .... **2 boda**
- dobijanje konačnih rješenja .... **1 bod**

5. Dato je $k \geq 2$ kutija, te se u njima nalazi redom $x_1, x_2, \ldots, x_k$ olovaka. U jednom potezu je dozvoljeno izabrati dvije kutije, te ako prva ima a, a druga b olovaka, pri čemu je $a \geq b$, prebaciti b olovaka iz prve kutije u drugu (nakon prebacivanja će prva kutija imati $a - b$, a druga $2b$ olovaka). Za $k-$torku $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ prirodnih brojeva kažemo da je *lijepa* ako se nakon konačno mnogo ovakvih poteza može postići da su sve olovke u istoj kutiji. Odrediti sve lijepe $k-$torke.

Rješenje:

Neka je $a_i = \frac{x_i}{d}$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, gdje je d najveći zajednički djelilac brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Tada brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nemaju zajedničkog faktora. Primijetimo da je $k-$torka $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ lijepa ako i samo ako je $k-$torka $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ lijepa (jer ako vršimo odgovarajuće poteze u drugoj $k-$torci, uvijek će elementi druge $k-$torke biti d puta manji). Zbog toga ćemo posmatrati $k-$torku $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Dokazat ćemo da je ona lijepa ako i samo ako je $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ stepen dvice (što znači da je $k-$torka $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ lijepa ako i samo ako je $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{d}$ stepen dvice, gdje je d najveći zajednički djelilac brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_k$).

Pretpostavimo da je $a_1, a_2, \ldots, a_k$ lijepa $k-$torka. Kako je $NZD(a, b) = NZD(a-b, b)$, to je $NZD(a - b, 2b)$ jednak ili $NZD(a, b)$ ili $2 \cdot NZD(a, b)$. Kako je $NZD(a_1, a_2, \ldots, a_k) = NZD(NZD(a_1, a_2), a_3, \ldots, a_k)$, to se u svakom koraku najveći zajednički djelilac svih brojeva ili udupla ili ostane isti. Kako je on na kraju jednak $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, to mora vrijediti da je $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ stepen dvice.

Obrnuto, neka je $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 2^n$. Kako brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nemaju zajedničkog djelioca, ne mogu biti svi parni, a kako im je zbir paran, to među njima ima paran broj neparnih brojeva. Uparimo na proizvoljan način te neparne brojeve i u svakom paru izvršimo dozvoljenu operaciju. Kako je razlika dva neparna broja paran broj, na taj način ćemo dobiti sve parne brojeve. Neka smo nakon izvršavanja ovih poteza dobili brojeve $2b_1, 2b_2, \ldots, 2b_k$ (neki od ovih brojeva mogu biti jednaki 0). Dakle, vrijedi $b_1+b_2+\cdots+b_k = 2^{n-1}$. Također, ne mogu svi brojevi b_i biti parni, jer su neki od njih jednaki $2a_j$ za neko neparno a_j, te kako se u svakom koraku najveći zajednički djelilac svih brojeva ili udupla ili ostane isti, to brojevi $b_1, b_2, \ldots, b_k$ nemaju zajedničkog faktora. Dakle, dobili smo istu situaciju kao za brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (osim što je zbir prepolovljen), a znamo da je $k-$torka $(2b_1, 2b_2, \ldots, 2b_k)$ lijepa ako i samo ako je $k-$torka $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ lijepa. Nastavljajući ovaj postupak, doći ćemo do situacije da je zbir brojeva jednak 2, a da su oni relativno prosti, što znači da imamo dvije jedinice i $k - 2$ nula, te jednim potezom prebacujemo sve u jednu kutiju. Dakle, ako je $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ stepen dvice, moguće je prebaciti sve olovke u jednu kutiju. Ovim je dokaz završen.

Šema bodovanja:

- svođenje zadatka na slučaj kad brojevi nemaju zajedničkog djelioca .... **2 boda**
- dokaz da je $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 2^n$ potreban uslov da bi $k-$torka $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ bila lijepa .... **7 bodova**
- dokaz da je $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 2^n$ dovoljan uslov da bi $k-$torka $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ bila lijepa .... **11 bodova**

Napomena: Ako učenik ne radi zadatak za slučaj kad brojevi nemaju zajedničkog djelioca, već generalno, onda koraci koji slijede umjesto 7 i 11 vrijede 8 i 12 bodova, redom.

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
4. marta/ožujka 2025.

III razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

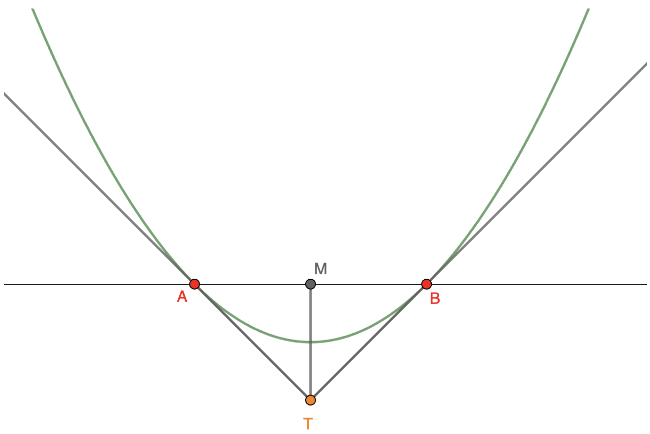
1. Neka su a, b, c realni brojevi i posmatrajmo kvadratnu funkciju $y = ax^2 + bx + c$ sa različitim nulama x_1 i x_2. Neka su A i B tačke presjeka grafika ove funkcije sa x osom.

   (a) Ako su tangente u tačkama A i B na grafik funkcije okomite jedna na drugu, dokazati da je diskriminanta kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ jednaka 1.

   (b) Ako je $M = (\frac{x_1+x_2}{2}, 0)$ i T presjek tangenti u A i B na grafik funkcije, odrediti površinu trougla ΔATM.

Rješenje:

Označimo diskriminantu ove kvadratne jednačine sa $D = b^2 - 4ac$. Neka je bez gubitka opštosti $x_1 < x_2$ i neka tačke A i B imaju koordinate $A = (x_1, 0)$ i $B = (x_2, 0)$. Zbog simetrije tačka T ima x koordinatu jednaku x koordinati tjemena ove kvadratne funkcije, odnosno x koordinata tačke T je jednaka $-\frac{b}{2a} = \frac{x_1+x_2}{2}$.



(a) Neka je jednačina tangente u tački A data sa $y = kx + n$. Kako prava prolazi kroz tačku $A(x_1, 0)$, to je $n = -kx_1$. Prava $y = k(x - x_1)$ i parabola $y = ax^2 + bx + c$ će imati jednu zajedničku tačku (tj. prava će biti tangenta na parabolu) ako jednačina $k(x - x_1) = ax^2 + bx + c$ ima jedno rješenje. Ovo je kvadratna jednačina $ax^2 + x(b - k) + c + kx_1$, te njena diskriminanta mora biti jednaka 0, tj. mora vrijediti $(b - k)^2 - 4a(c + kx_1) = 0$, što je ustvari kvadratna jednačina po $k : k^2 - (2b + 4ax_1)k + b^2 - 4ac = 0$. Njena diskriminanta je jednaka $4b^2 + 16abx_1 + 16a^2x_1^2 - 4b^2 + 16ac = 16a(ax_1^2 + bx_1 + c) = 0$ (jer je x_1 rješenje kvadratne jednačine

$ax^2+bx+c=0$). Dakle, $k=-\frac{-2b-4ax_1}{2}=2ax_1+b$. Slično je koeficijent tangente u tački B jednak $2ax_2+b$. Kako su ove tangente okomite, to znači da im je proizvod nagiba jednak -1, odnosno vrijedi

$$-1=(2ax_1+b)(2ax_2+b)=4a^2x_1x_2+2ab(x_1+x_2)+b^2=4a^2\frac{c}{a}-2ab\frac{b}{a}+b^2=4ac-b^2,$$

odnosno $\mathrm{D}=\mathrm{b}^2-4ac=1$, što je i trebalo dokazati. Ovdje smo koristili Vijetova pravila po kojima je

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

(b) Po definiciji je tačka M sredina duži AB, pa je $\overline{AM}=\frac{\overline{AB}}{2}=|\frac{x_2-x_1}{2}|$. Imamo da je $x_2-x_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}=\sqrt{\frac{1}{a^2}}=|\frac{1}{a}|$, pa je $\overline{AM}=|\frac{1}{2a}|$.
Također znamo da je MT okomito na AB. Kako je M sredina hipotenuze pravouglog trougla ΔATB, imamo da je $AM=MB=MT$, pa je i $\overline{MT}=\overline{AM}=|\frac{1}{2a}|$.
Sada je površina trougla ΔATB jednaka:

$$P_{\Delta ATM}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{MT}}{2}=\frac{|\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2a}|}{2}=\frac{1}{8a^2}.$$

Šema bodovanja:

- Dio (a) .... **10 bodova**
  - zaključak da je nagib tangente $2ax_1+b$, odnosno $2ax_2+b$ .... **3 boda**
  - postavljanje uslova da je proizvod nagiba tangenti jednak -1 .... **3 boda**
  - kraj dokaza .... **4 bodova**
- Dio (b) .... **10 bodova**
  - izračun x koordinate tačke T .... **1 bod**
  - zaključak da je trougao ΔATM pravougli .... **1 bod**
  - izračun stranice AM .... **3 boda**
  - izračun stranice MT .... **4 boda**
  - tačno izračunavanje površine .... **1 bod**

2. Odrediti sve realne brojeve $0 \leq x \leq \pi$ za koje je izraz

$$\cos(x) + i\sin(x) - \cos(2x) - i\sin(2x) + \cos(3x) + i\sin(3x)$$

jednak nuli (pri čemu je i imaginarna jedinica).

Rješenje:

Riješimo jednačinu

$$\cos x + i\sin x - \cos 2x - i\sin 2x + \cos 3x + i\sin 3x = 0.$$

Realni dio izraza sa lijeve strane mora biti nula, pa je

$$\begin{aligned}
\cos x - \cos 2x + \cos 3x &= 0\\
\cos x - (2\cos^2 x - 1) + \cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x &= 0\\
1 + \cos x - 2\cos^2 x + \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\cos x\sin^2 x &= 0\\
4\cos^3 x - 2\cos^2 x - 2\cos x + 1 &= 0\\
(2\cos^2 x - 1)(2\cos x - 1) &= 0.
\end{aligned}$$

Jedina rješenja posljednje jednačine u intervalu $[0,\pi]$ su $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$. Ako se izjednači imaginarni dio sa nulom dobije se

$$\begin{aligned}
\sin x - \sin 2x + \sin 3x &= 0\\
\sin x - 2\sin x\cos x + \sin x\cos 2x + \sin 2x\cos x &= 0\\
\sin x - 2\sin x\cos x + \sin x(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x(1 - \sin^2 x) &= 0\\
-4\sin^3 x + 4\sin x - 2\sin x\cos x &= 0\\
\sin x(2 - 2\sin^2 x - \cos x) &= 0.
\end{aligned}$$

Za $x = \frac{\pi}{3}$ je lijeva strana posljednje jednakosti jednaka je nuli, dok $x = \frac{\pi}{4}$ i $x = \frac{3\pi}{4}$ ne daju rješenje.

Dakle, jedino rješenje je $x = \frac{\pi}{3}$.

Šema bodovanja:

- izjednačavanje realnog ili imaginarnog dijela jednačine sa 0 .... **2 boda**
- dokaz da je $(2\cos^2 x - 1)(2\cos x - 1) = 0$ .... **10 bodova**

∗ u ovom koraku moguće je osvojiti parcijalne bodove u zavisnosti koliko je učenik/ica napredovao/la u dokazu

- zaključak da su jedina moguća rješenja $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ .... **3 boda**
- dokaz da je jedino rješenje $x = \frac{\pi}{4}$ .... **5 bodova**

3. Označimo sa S broj uređenih parova (a, b) cijelih brojeva $1 \leq a \leq 100$ i $b \geq 0$ za koje se polinom $x^2 + ax + b$ može faktorisati kao $(x + c)(x + d)$ za neke cijele brojeve c i d. Odrediti vrijednost S.

Rješenje:

Dokazat ćemo da je $S = 2600$. Imamo da je

$$(x + c)(x + d) = x^2 + x(c + d) + cd,$$

pa da bi vrijedilo $x^2 + ax + b = (x + c)(x + d)$ mora vrijediti $a = c + d$ i $b = cd$. Fiksirajmo sada neko $1 \leq a \leq 100$ i pretpostavimo bez gubitka opštosti da je $c \leq d$. Zbog $c + d = a > 0$ i $cd = b \geq 0$ imamo da su i $c \geq 0, d \geq 0$. Sada za $c + d = a$ imamo rješenja $(c, d) \in \{(0, a), (1, a - 1), ..., (\lfloor \frac{a}{2} \rfloor, a - \lfloor \frac{a}{2} \rfloor)\}$. Pretpostavimo da za dva različita rješenja $(x, a - x)$ i $(y, a - y)$ vrijedi $x \cdot (a - x) = y \cdot (a - y)$. Dobijamo da je

$$\begin{aligned} &ax - x^2 = ay - y^2 \\ &a(x - y) - (x^2 - y^2) = 0 \\ &(x - y)(a - (x + y)) = 0. \end{aligned}$$

Kako je $x + y \leq \lfloor \frac{a}{2} \rfloor + \lfloor \frac{a}{2} \rfloor - 1 \leq 2 \cdot \frac{a}{2} - 1 < a$, dobijamo da je $x = y$, što je kontradikcija. To znači da nam svako nabrojano rješenje daje drugačiju vrijednost za $b = cd$. Odnosno, za fiksno $1 \leq a \leq 100$ imamo $\lfloor \frac{a}{2} \rfloor + 1$ rješenja za b, za koje postoje traženi c i d.

Sumirajući ovo za sve $a \in \{1, 2, \ldots 100\}$ dobijamo

$$S = 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \ldots + 50 + 50 + 51 = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots 50) + 50 = 2600.$$

Šema bodovanja:

- dokaz da za fiksno a postoji $\lfloor \frac{a}{2} \rfloor + 1$ rješenja za b .... **15 bodova**
- izračunavanje S .... **5 bodova**

4. Neka su a i b prirodni brojevi za koje vrijedi $a > b$ i

$$NZD(a-b, ab+1) = NZD(a+b, ab-1) = 1.$$

Dokazati da broj $(a-b)^2 + (ab+1)^2$ nije kvadrat prirodnog broja.

Rješenje:

Vrijedi

$$(a-b)^2+(ab+1)^2 = a^2-2ab+b^2+a^2b^2+2ab+1 = a^2+a^2b^2+b^2+1 = (a^2+1)(b^2+1).$$

Neka je $d = NZD(a^2+1, b^2+1)$. Tada $d|a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$. Ukoliko $d \neq 1$ postoji prost broj $p|d$.

Pretpostavimo $p|a-b$, tada

$$p|(a^2+1)(b^2+1) \implies p|(a-b)^2+(ab+1)^2 \implies p|ab+1,$$

öto je kontradikcija sa $NZD(a-b, ab+1) = 1$.

Ako pretpostavimo $p|a+b$ tada imamo

$$p|(a^2+1)(b^2+1) \implies p|(a-b)^2+(ab+1)^2 \implies p|(a+b)^2+(ab-1)^2 \implies p|ab-1,$$

što je kontradikcija sa $NZD(a+b, ab-1) = 1$. Dakle $d = 1$.

Sada ukoliko je $(a-b)^2+(ab+1)^2 = (a^2+1)(b^2+1)$ potpun kvadrat, pošto su a^2+1 i b^2+1 relativno prosti to su oba izraza potpuni kvadrati prirodnog broja. To je kontradikcija jer a^2+1 nikada nije potpun kvadrat kada je a prirodan broj (ako pretpostavimo $a^2+1 = c^2$ dobijamo $(c-a)(c+a) = 1$, što je nemoguće).

Šema bodovanja:

- zapis datog izraza kao $(a^2+1)(b^2+1)$ .... **3 boda**
- uvođenje prostog broja p koji dijeli a^2+1 i b^2+1 .... **2 boda**
- dokaz da $p \mid (a-b)(a+b)$ .... **3 boda**
- rješavanje slučaja $p \mid (a-b)$ .... **5 bodova**
- rješavanje slučaja $p \mid (a+b)$ .... **5 bodova**
- kraj dokaza .... **2 boda**

5. Neka je O centar opisane kružnice raznostraničnog trougla ABC i neka je T težište tog trougla. Tačka M je sredina stranice AB. Dokazati da je OT okomito na težišnicu CM ako i samo ako vrijedi $BC^2 + AC^2 = 2AB^2$.

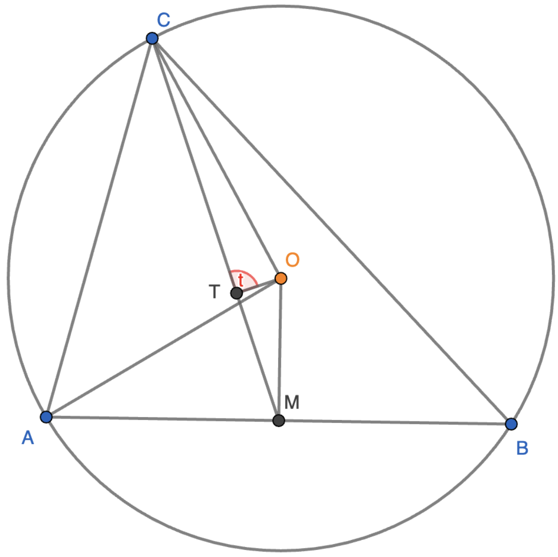
Rješenje:

Označimo ugao $\angle OTC = t$. Ako se iskoristi kosinusna teorema na trougao OTC dobije se

$$OC^2 = CT^2 + OT^2 - 2 \cdot CT \cdot OT \cdot \cos t.$$

Vrijedi da je

$$\cos(\angle OTM) = \cos(180^0 - t) = \cos(180^0)\cos(t) + \sin(180^0)\sin(t) = -\cos t.$$



Zbog toga, ako se iskoristi kosinusna teorema na trougao OTM se dobije

$$OM^2 = MT^2 + OT^2 + 2 \cdot MT \cdot OT \cdot \cos t.$$

Sada oduzimanjem dobijamo

$$OC^2 - OM^2 = CT^2 - MT^2 - 2OT\cos t(CT + MT).$$

Trougao MOA je pravougli, pa koristeći Pitagorinu teoremu lijeva strana posljednje jednakosti jednaka je

$$OC^2 - OM^2 = OA^2 - OM^2 = AM^2 = \frac{AB^2}{4}.$$

Ako označimo dužinu težišnice sa $t_c = CM$, poznato je da vrijedi $CT = \frac{2}{3}t_c$ i $MT = \frac{1}{3}t_c$. Sada se dobije jednakost

$$\frac{AB^2}{4} = \frac{1}{3}t_c^2 - 2OT\cos(t)t_c \ (*).$$

Lema: Vrijedi da je $2BC^2 + 2AC^2 = AB^2 + 4t_c^2$.

Dokaz:

Primjenjujući kosinusnu teoremu na ugao $\angle ABC$ u trouglovima ABC i MBC dobijamo

$$2\cos(\angle ABC) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{AB \cdot BC} = \frac{MB^2 + BC^2 - CM^2}{MB \cdot BC}.$$

Iz posljednje jednakosti lagano slijedi tvrdnja leme.

Dakle, iz leme imamo da je

$$t_c^2 = \frac{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}{4}.$$

Uvrštavajući u $(*)$ dobijamo

$$\frac{AB^2}{4} = \frac{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}{12} - 2OT\cos(t)t_c,$$

odnosno

$$2AB^2 = AC^2 + BC^2 - 12OT\cos(t)t_c.$$

Dakle vrijedi $2AB^2 = AC^2 + BC^2$ ako i samo ako je $\cos t = 0$, odnosno ako i samo ako je $t = 90^0$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- dokaz da vrijedi jednakost $OC^2 - OM^2 = CT^2 - MT^2 - 2OT\cos t(CT + MT)$ (ili neki ekvivalentni izraz) .... **8 bodova**
- dokaz da vrijedi jednakost $\frac{AB^2}{4} = \frac{2BC^2+2AC^2-AB^2}{12} - 2OT\cos(t)t_c$ (ili neki ekvivalentni izraz) .... **5 bodova**
- izračunavanje t_c kao u dokazu .... **5 bodova**
- kraj dokaza .... **2 boda**

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
4. marta/ožujka 2025.

IV razred

Rješenja zadataka i šeme bodovanja

1. Odrediti sve prirodne brojeve $n \geq 4$ takve da vrijedi

$$50n \cdot \binom{n+1}{n-4} = \binom{n^2+1}{3}.$$

Rješenje:

Koristeći simetričnost binomnih koeficijenata imamo

$$\begin{aligned}
50n \cdot \binom{n+1}{n-4} &= 50n \cdot \binom{n+1}{n+1-(n-4)} = 50n \cdot \binom{n+1}{5} \\
&= 50n \cdot \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!} = \frac{5}{12} \cdot n^2(n+1)(n-1)(n-2)(n-3).
\end{aligned}$$

S druge strane je

$$\binom{n^2+1}{3} = \frac{(n^2+1)n^2(n^2-1)}{3!} = \frac{1}{6} \cdot n^2(n+1)(n-1)(n^2+1),$$

gdje je u posljednjem koraku član $n^2 - 1$ faktorisan kao razlika kvadrata. Sada imamo

$$\begin{gathered}
50n \cdot \binom{n+1}{n-4} = \binom{n^2+1}{3} \Leftrightarrow \\
\frac{5}{12} \cdot n^2(n+1)(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{6} \cdot n^2(n+1)(n-1)(n^2-1) \Leftrightarrow \\
5(n-2)(n-3) = 2(n^2-1) \Leftrightarrow \\
3n^2 - 25n + 28 = 0
\end{gathered}$$

Rješenja posljednje kvadratne jednačine su

$$n_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 3 \cdot 28}}{2 \cdot 3} = \frac{25 \pm 17}{6},$$

odnosno $n_1 = \frac{25-17}{6} = \frac{4}{3}$ i $n_2 = \frac{25+17}{6} = 7$. Kako je n prirodan broj, jedino rješenje je $n = 7$.

Šema bodovanja:

- Zaključak $\binom{n+1}{n-4} = \binom{n+1}{5}$ .... **4 boda**
- Primjena formule za binomni koeficijent na lijevu i/ili desnu stranu .... **3 boda**
- Dobijanje kvadratne jednačine po n .... **7 bodova**
  - Skraćivanje člana n^2 .... **2 boda**
  - Skraćivanje člana $n^2 - 1$ (ili $(n-1)(n+1)$) .... **5 bodova**
- Rješavanje kvadratne jednačine .... **4 boda**
- Dobivanje rješenja $n = 7$ .... **2 boda**

2. U koordinatnom sistemu označene su sve tačke čije su obje koordinate cijeli brojevi između 1 i 5, uključujući i 1 i 5. Koliko postoji trouglova sa tjemenima u označenim tačkama čija je površina veća od 0 (tj. čija tjemena ne leže na jednoj pravoj)?

Rješenje:

U nastavku pod *trojka* uvijek podrazumijevamo neuređenu trojku, odnosno tročlani skup. Tako svaka trojka označenih tačaka određuje jedan trougao.

Ukupan broj označenih tačaka je $5 \cdot 5 = 25$, pa je broj trojki označenih tačaka jednak $\binom{25}{3}$. Od ovog broja potrebno je oduzeti one trojke koje čine trougao površine 0, tj. čija su tjemena kolinearna.

Najprije odredimo koliko ima trojki koje leže u istom redu ili istoj koloni. Imamo 5 redova i 5 kolona, te u svakom redu ili koloni trojku tačaka možemo odabrati na $\binom{5}{3}$ načina. Dakle, ovakvih trojki ima $10 \cdot \binom{5}{3}$.

Odredimo sada koliko ima trojki kolinearnih označenih tačaka koje nisu u istom redu ili koloni. Neka su $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ i $C(x_C, y_C)$ tri označene tačke na istoj pravoj, i neka je $x_A < x_B < x_C$. Pretpostavimo da prava ima pozitivan koeficijent. Tada je i $y_A < y_B < y_C$. Zbog kolinearnosti imamo

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}.$$

Zbog $1 \leq x_A < x_B < x_C \leq 5$ i $1 \leq y_A < y_B < y_C \leq 5$ brojnici i nazivnici u posljednjoj relaciji su jednaki $1, 2$ ili 3, te je zbir brojnika, kao i zbir nazivnika, cijeli broj između 1 i 4. Vidimo da su jedine mogućnosti za koeficijent prave $\frac{1}{2}, 1$ i 2. Analogno dobijamo da su jedine mogućnosti za negativan koeficijent prave $-\frac{1}{2}, -1$ i -2.

Posmatrajmo trojke označenih tačaka koje leže na pravoj s koeficijentom 1. Ovakvih pravih koje sadrže barem tri označene tačke ima 5 - po jedna za svaku od tačaka $(1, 3)$, $(1, 2), (1, 1), (2, 1), (3, 1)$. Ove prave sadrže redom $3, 4, 5, 4, 3$ označenih tačaka, pa je broj odgovarajućih trojki $2 \cdot \binom{3}{3} + 2 \cdot \binom{4}{3} + \binom{5}{3}$. Zbog simetrije broj trojki označenih tačaka koje leže na pravoj s koeficijentom -1 je isti.

Posmatrajmo sada trojke označenih tačaka koje leže na pravoj s koeficijentom 2. Ovakvih pravih koje sadrže barem tri označene tačke ima 3 - po jedna za svaku od tačaka $(1, 1)$, $(2, 1), (3, 1)$. Svaka od njih sadrži tačno po tri označene tačke, pa dobijamo tri trojke. Zbog simetrije broj trojki označenih tačaka koje leže na pravoj s koeficijentom $-2, \frac{1}{2}$ ili $-\frac{1}{2}$ je isti.

Sada zaključujemo da je ukupan broj traženih trouglova jednak

$$\binom{25}{3} - 2 \cdot \left(2 \cdot \binom{3}{3} + 2 \cdot \binom{4}{3} + \binom{5}{3}\right) - 4 \cdot 3 = 2148.$$

Šema bodovanja:

- Određivanje ukupnog broja trojki .... **2 boda**
- Ideja oduzimanja kolinearnih trojki od ukupnog broja .... **4 boda**
- Određivanje broja trojki koje leže u istom redu ili koloni .... **3 boda**
- Određivanje mogućih koeficijenata prave kroz barem tri označene tačke ... **3 boda**
  - ∗ Ovi bodovi se dodjeljuju i ukoliko učenik navede moguće koeficijente bez dokaza
- Određivanje broja trojki s koeficijentom ± 1 .... **3 boda**
  - ∗ Određivanje broja trojki za jedan od koeficijenata 1 i -1 nosi 2 od 3 boda
- Određivanje broja trojki za koeficijente $\pm\frac{1}{2}$ i ± 2 .... **3 boda**
  - ∗ Određivanje broja trojki za jedan od ovih koeficijenata nosi 2 od 3 boda
- Dobijanje tačnog rezultata .... **2 boda**
  - ∗ Ovi bodovi se dodjeljuju i ako učenik ne izračuna broj, nego rezultat predstavi preko binomnih koeficijenata

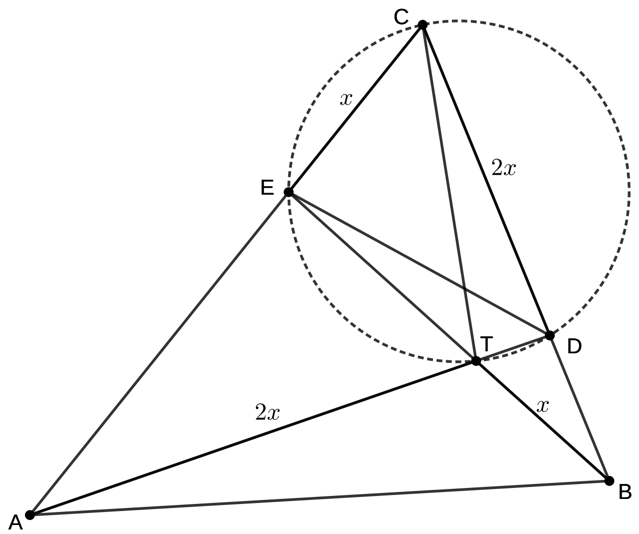
3. Dat je trougao $\triangle ABC$. Na stranicama BC i CA date su tačke D i E, redom. Duži AD i BE sijeku se u T. Pretpostavimo da vrijedi $AT = CD = 2 \cdot BT = 2 \cdot CE$ i $P_{\triangle ABT} = P_{\triangle CED}$.

   (a) Dokazati da je četverougao $CETD$ tetivan.

   (b) Odrediti odnos $\frac{P_{\triangle ATC}}{P_{\triangle BTC}}$.

Napomena: sa $P_{\triangle XYZ}$ označavamo površinu trougla $\triangle XYZ$.

Rješenje:



Označimo $BT = CE = x$. Tada je $AT = CD = 2x$. Imamo

$$P_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} \cdot AT \cdot BT \cdot \sin \angle ATB = x^2 \cdot \sin \angle ATB,$$

te

$$P_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot CD \cdot \sin \angle ECD = x^2 \cdot \sin \angle ECD.$$

Sada iz $P_{\triangle ABT} = P_{\triangle CED}$ dobijamo $\sin \angle ATB = \sin \angle ECD$, odakle slijedi $\angle ECD = \angle ATB$ ili $\angle ECD + \angle ATB = 180°$. Prvi slučaj otpada jer je tačka T u unutrašnjosti trougla $\triangle ABC$, pa vrijedi $\angle ECD + \angle ATB = 180°$. Kako je $\angle ETD = \angle ATB$, dobijamo $\angle ECD + \angle ETB = 180°$, odakle slijedi da je četverougao $CETD$ tetivan. Ovim je dokazan dio (a).

Imamo $P_{\triangle ATC} = \frac{1}{2} \cdot AT \cdot CT \cdot \sin \angle ATC$, a kako je $\sin \angle ATC = \sin \angle CTD = \sin \angle CED$ (prva jednakost slijedi iz $\angle ATC + \angle CTD = 180°$, a druga iz tetivnosti četverougla CETD), to je $P_{\triangle ATC} = \frac{1}{2} \cdot AT \cdot CT \cdot \sin \angle CED$. Analogno dobijamo $P_{\triangle BTC} = \frac{1}{2} \cdot BT \cdot CT \cdot \sin \angle CDE$. Sada imamo

$$\frac{P_{\triangle ATC}}{P_{\triangle BTC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AT \cdot CT \cdot \sin \angle CED}{\frac{1}{2} \cdot BT \cdot CT \cdot \sin \angle CDE} = \frac{AT}{BT} \cdot \frac{\sin \angle CED}{\sin \angle CDE} = 2 \cdot 2 = 4,$$

jer je $\frac{AT}{BT} = 2$ po uslovu zadatka, a $\frac{\sin \angle CED}{\sin \angle CDE} = \frac{CD}{CE} = 2$ iz sinusne teoreme na trougao $\triangle CED$.

Šema bodovanja:

- Dio (a) .... **7 bodova**
  - Izražavanje $P_{\triangle ABT}$ i $P_{\triangle CED}$ na način iz rješenja .... **2 boda**
  - Zaključak $\sin\angle ATB = \sin\angle$ECD .... **2 boda**
  - Zaključak $\angle ATB + \angle ECD = 180^\circ$ .... **2 boda**
  - Zaključak da je četverougao CETD tetivan .... **1 bod**
- Dio (b) .... **13 bodova**
  - Relacija $P_{\triangle ATC} = \frac{1}{2} \cdot AT \cdot CT \cdot \sin\angle ATC$ (ili ekvivalentna za $P_{\triangle BTC}$) **2 boda**
  - Zaključak $\frac{P_{\triangle ATC}}{P_{\triangle BTC}} = 2 \cdot \frac{\sin\angle ATC}{\sin\angle BTC}$ .... **3 boda**
  - Zaključak $\sin\angle ATC = \sin\angle CED$ (ili ekvivalentan za $\angle BTC$) .... **3 boda**
  - Zaključak $\frac{\sin\angle ATC}{\sin\angle BTC} = 2$ .... **4 boda**
  - Dobijanje rezultata .... **1 bod**

4. (a) Odrediti sve prirodne brojeve a sa sljedećom osobinom: za svaki neparan prost broj p postoji prirodan broj n takav da p istovremeno dijeli brojeve $a^n - n$ i $a^{n+1} - (n+1)$.

   (b) Odrediti sve prirodne brojeve a sa sljedećom osobinom: za svaki neparan prost broj p postoji prirodan broj n takav da p istovremeno dijeli brojeve $a^n - n^2$ i $a^{n+1} - (n+1)^2$.

Rješenje:

Dio (a)
$a = 1$ očigledno ne zadovoljava uslov, jer je tada $a^n - n = -(n-1)$ i $a^{n+1} - (n+1) = -n$.

Pretpostavimo da a ima neparan prost faktor q. Tada po uslovu zadatka postoji n takav da $q \mid a^n - n$ i $q \mid a^{n+1} - (n+1)$, odakle slijedi $q \mid n$ i $q \mid n+1$ (jer $q \mid a$). Ovo je nemoguće jer su uzastopni cijeli brojevi relativno prosti. Dakle, a nema neparan prost faktor, pa je $a = 2^k$ za neki $k \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je $k \geq 2$. Tada je $a - 1$ neparan broj veći od 1, pa ima neparan prost faktor r. Vrijedi $a \equiv 1 \pmod r$, pa je $a^n - n \equiv 1 - n \pmod r$ i $a^{n+1} - (n+1) \equiv 1 - (n+1) \equiv -n \pmod r$. Po uslovu zadatka postoji n takav da je $a^n - n \equiv a^{n+1} - (n+1) \equiv 0 \pmod r$, odnosno $1 - n \equiv -n \equiv 0 \pmod r$. Odavde slijedi $1 \equiv 0 \pmod r$, što je kontradikcija. Dakle $k = 1$, odnosno $a = 2$.

Pokažimo sada da $a = 2$ zadovoljava uslov zadatka, tj. da za svaki neparan prost broj p postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a^n \equiv n \pmod p$ i $a^{n+1} \equiv n + 1 \pmod p$. Dovoljno je uzeti n takav da vrijedi $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ i $n \equiv 1 \pmod p$, što je moguće po Kineskom teoremu o ostacima, jer su brojevi $p - 1$ i p relativno prosti. Naime, iz Male Fermatove teoreme imamo $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, pa vrijedi i $2^n \equiv 1 \pmod p$ jer $p - 1 \mid n$. Kako je i $n \equiv 1 \pmod p$, vrijedi $2^n \equiv n \pmod p$. Imamo i $2^{n+1} \equiv 2 \cdot 2^n \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \equiv n + 1 \pmod p$, pa navedeni broj n zadovoljava uslov.

Dio (b)
Pretpostavimo da $a = 1$ zadovoljava uslov zadatka. Tada za svaki neparan prost broj p postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $p \mid n^2 - 1$ i $p \mid (n+1)^2 - 1$. Iz prve relacije p dijeli barem jedan od brojeva $n - 1$ i $n + 1$, a iz druge p dijeli barem jedan od brojeva n i $n + 2$. Za $p \geq 5$ ovakav n očigledno ne postoji, pa $a = 1$ ne zadovoljava uslov. Dakle, $a \geq 2$.

Na isti način kao u dijelu (a) dobijamo da a nema neparan prost faktor (dobili bismo $q \mid n^2$ i $q \mid (n+1)^2$, što je nemoguće). Zato je $a = 2^k$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Za $k = 1$ je $a = 2$, što ne zadovoljava uslov. Naime, tada za $p = 3$ ne postoji n takav da je $a^n \equiv n^2 \pmod p$ i $a^{n+1} \equiv (n+1)^2 \pmod p$, jer je među brojevima $a^n = 2^n$ i $a^{n+1} = 2^{n+1}$ jedan kongruentan 2 po modulu 3, a n^2 i $(n+1)^2$ ne mogu biti kongruentni 2 jer su potpuni kvadrati. Dakle, $k \geq 2$.

Sada $a - 1$ ima neparan prost faktor r. Tada je $a \equiv 1 \pmod r$. Po uslovu zadatka postoji n takav da je $a^n \equiv n^2 \pmod r$ i $a^{n+1} \equiv (n+1)^2 \pmod r$, odnosno $n^2 \equiv 1 \pmod r$ i $(n+1)^2 \equiv 1 \pmod r$. Odavde slijedi $r \mid n^2 - 1$ i $r \mid (n+1)^2 - 1$, pa r dijeli barem jedan od brojeva $n - 1$ i $n + 1$ i barem jedan od brojeva n i $n + 2$. Ovo je moguće samo ako je $r = 3$. Dakle, jedini neparan prost faktor od $a - 1$ je 3, a kako je $a - 1 = 2^k - 1$ neparan broj, vrijedi $2^k - 1 = 3^t$ za neki $t \in \mathbb{N}$.

Posmatrajući jednačinu $2^k - 1 = 3^t$ po modulu 3 dobijamo da je $2^k \equiv 1 \pmod 3$, odakle slijedi da je k paran broj. Uvrštavajući $k = 2l$ i faktorišući lijevu stranu kao razliku kvadrata dobijamo $(2^l - 1)(2^l + 1) = 3^t$, pa su $2^l - 1$ i $2^l + 1$ stepeni broja 3. Kako se ovi brojevi razlikuju za 2, jedina mogućnost je $2^l - 1 = 1$ i $2^l + 1 = 3$, odakle dobijamo $l = 1$, tj. $k = 2$ i $a = 4$.

Pokažimo da $a = 4$ zadovoljava uslov zadatka. U dijelu (a) smo dokazali da za svaki neparan prost broj p postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $2^n \equiv n \pmod{p}$ i $2^{n+1} \equiv n + 1 \pmod{p}$. Kvadrirajući ove kongruencije dobijamo $4^n \equiv n^2 \pmod{p}$ i $4^{n+1} \equiv (n + 1)^2 \pmod{p}$, pa je zadovoljen uslov dijela (b) za $a = 4$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da a nema neparan prost faktor (za oba dijela (a) i (b)) .... **3 boda**
  - ∗ Ukoliko je ovaj zaključak donesen samo u jednom od dijelova (a) i (b), vrijedi 2 od 3 boda
- Posmatranje neparnog prostog faktora od $a - 1$ (za oba dijela (a) i (b)) ... **3 boda**
  - ∗ Ukoliko je on posmatran samo u jednom od dijelova (a) i (b), vrijedi 2 od 3 boda
- Dokaz da su $a = 2$ i $a = 4$ rješenja za dijelove (a) i (b) redom .... **4 boda**
  - ∗ Ukoliko je ovaj dokaz sproveden za samo jedan od dijelova (a) i (b), vrijedi 3 od 4 boda
- Ostatak dijela (a) .... **3 boda**
  - – Zaključak da je $a = 2^k$ za $k \geq 1$ (odbacivanje slučaja $k = 0$) .... **1 bod**
  - – Zaključak da $a - 1$ nema neparan prost faktor .... **2 boda**
- Ostatak dijela (b) .... **7 bodova**
  - – Zaključak da je $a = 2^k$ za $k \geq 2$ .... **4 boda**
    - ∗ Odbacivanje svakog od slučajeva $k = 0$ i $k = 1$ vrijedi po 2 boda
  - – Zaključak da je $a - 1$ stepen broja 3 .... **2 boda**
  - – Zaključak da je jedina mogućnost $a = 4$ .... **1 bod**

5. Neka je n neparan prirodan broj, i neka su p, q racionalni brojevi za koje vrijedi $p^2+q^2=1$. Dokazati da je broj

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1}(p+iq)^j\right|$$

racionalan, gdje i označava imaginarnu jedinicu.

Rješenje:

Zbog $p^2+q^2=1$ kompleksni broj $p+iq$ ima modul 1. Predstavimo ga u eksponencijalnom obliku $p+iq=e^{i\varphi}$. Tada imamo

$$\sum_{j=0}^{n-1}(p+iq)^j=\sum_{j=0}^{n-1}(e^{i\varphi})^j=\frac{(e^{i\varphi})^n-1}{e^{i\varphi}-1},$$

gdje smo koristili formulu za sumu geometrijskog niza. Dalje je

$$\frac{(e^{i\varphi})^n-1}{e^{i\varphi}-1}=\frac{e^{-i\frac{\varphi}{2}}(e^{in\varphi}-1)}{e^{i\frac{\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\varphi}{2}}}=\frac{e^{-i\frac{\varphi}{2}}(e^{in\varphi}-1)}{2i\sin\frac{\varphi}{2}},$$

gdje smo u prvom koraku proširili razlomak sa $e^{-i\frac{\varphi}{2}}$, a u drugom iskoristili identitet $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. Sada dobijamo

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1}(p+iq)^j\right|=\left|\frac{e^{-i\frac{\varphi}{2}}(e^{in\varphi}-1)}{2i\sin\frac{\varphi}{2}}\right|=\frac{\left|e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right|\left|e^{in\varphi}-1\right|}{\left|2i\sin\frac{\varphi}{2}\right|}=\frac{\left|e^{in\varphi}-1\right|}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Primijetimo da vrijedi

$$\left|e^{in\varphi}-1\right|=|\cos n\varphi-1+i\sin n\varphi|=\sqrt{(\cos n\varphi-1)^2+(\sin n\varphi)^2}=$$
$$\sqrt{(cos n\varphi)^2+(\sin n\varphi)^2-2\cos n\varphi+1}=\sqrt{2-2\cos n\varphi}=\sqrt{2-2(1-2\sin^2 n\frac{\varphi}{2})}=$$
$$\sqrt{4\sin^2 n\frac{\varphi}{2}}=2\left|\sin n\frac{\varphi}{2}\right|,$$

pa je

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1}(p+iq)^j\right|=\frac{\left|\sin n\frac{\varphi}{2}\right|}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Kako je $e^{i\varphi}=p+iq$, to je $p=\cos\varphi$ i $q=\sin\varphi$, tj. $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ su racionalni. Dokazat ćemo da je $\frac{\sin n\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ racionalan broj za svaki neparan prirodan broj n, čime će dokaz biti završen.

Dokažimo najprije indukcijom po n da je su $\cos n\varphi$ i $\sin n\varphi$ racionalni za svaki $n\in\mathbb{N}$. Za $n=1$ tvrdnja slijedi iz uslova zadatka ($p=\cos\varphi$ i $q=\sin\varphi$ su racionalni), što prestavlja bazu indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-1$, te dokažimo da vrijedi za n. Imamo

$$\sin n\varphi=\sin((n-1)\varphi+\varphi)=\sin(n-1)\varphi\cos\varphi+\cos(n-1)\varphi\sin\varphi,$$

što je racionalan broj jer su $\sin(n-1)\varphi$ i $\cos(n-1)\varphi$ racionalni po induktivnoj pretpostavci, a $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ racionalni po uslovu zadatka. Analogno dokazujemo da je $\cos n\varphi$ racionalan, čime je indukcija završena.

Dokažimo sada indukcijom po n da je $\frac{\sin n\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ racionalan broj za svaki neparan prirodan broj n. Baza indukcije je očigledna: za $n = 1$ je $\frac{\sin n\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 1 \in \mathbb{Q}$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-2$, i dokažimo da vrijedi za n. Imamo

$$\frac{\sin n\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} - \frac{\sin(n-2)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\sin n\frac{\varphi}{2} - \sin(n-2)\frac{\varphi}{2}\right) =$$
$$\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot 2\cos\frac{n\frac{\varphi}{2}+(n-2)\frac{\varphi}{2}}{2}\sin\frac{n\frac{\varphi}{2}-(n-2)\frac{\varphi}{2}}{2} = \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot 2\cos(n-1)\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} =$$
$$2\cos(n-1)\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{n-1}{2}\varphi$$

što je racionalan broj jer je $n-1$ paran, pa je $\frac{n-1}{2}$ cio broj. Dakle, $\frac{\sin n\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} - \frac{\sin(n-2)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ je racionalan, a po induktivnoj pretpostavci je $\frac{\sin(n-2)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ racionalan, pa je i $\frac{\sin n\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ racionalan. Ovim je dokaz završen.

Šema bodovanja:

- Predstavljanje broja $p + iq$ u trigonometrijskom ili eksponencijalnom obliku **1 bod**
- Izračunavanje sume geometrijskog reda .... **3 boda**
- Dobijanje oblika $\frac{\left|e^{in\varphi}-1\right|}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$ .... **5 bodova**
- Dobijanje oblika $\frac{\left|\sin n\frac{\varphi}{2}\right|}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ .... **3 boda**
- Dokaz da su $\cos n\varphi$ i $\sin n\varphi$ racionalni za sve $n \in \mathbb{N}$ .... **3 boda**
- Dokaz da je $\frac{\sin n\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ racionalan .... **5 bodova**