Kanton Sarajevo

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

12. marta/ožujka 2024.

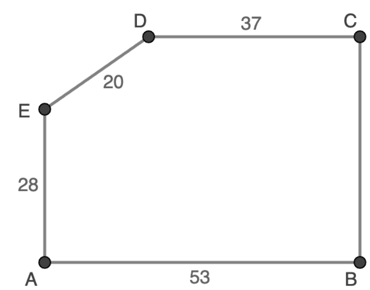
I razred

Zadatak 1. Dat je petougao $ABCDE$ sa sljedećim osobinama:

i. $\angle EAB = \angle ABC = \angle BCD = 90°$,

ii. $AB = 53, CD = 37, DE = 20, AE = 28$.

Odrediti površinu datog petougla.



Zadatak 2. Dati su prirodni brojevi a, b, c za koje vrijedi jednakost

$$\frac{a^2 - a - c}{b} + \frac{b^2 - b - c}{a} = a + b + 2.$$

Dokazati da je broj $a + b + c$ kvadrat prirodnog broja.

Zadatak 3. Na hokejaškom turniru učestvuje 6 ekipa. Svaka ekipa je igrala sa svakom drugom ekipom tačno jednom. U jednom meču ekipa dobija 3 boda ako pobijedi, 0 bodova ako izgubi i 1 bod ako je neriješen rezultat (tj. u slučaju neriješenog rezultata obje ekipe dobijaju po 1 bod). Na kraju turnira ekipe su rangirane po broju bodova. Ispostavilo se da nikoje dvije ekipe nemaju isti broj bodova, kao i da svaka ekipa (osim posljednje) ima tačno 2 boda više od ekipe koja se nalazi jedno mjesto ispod na rang listi. Dokazati da je četvrta ekipa na rang listi pobijedila tačno dva meča.

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve a, b, c za koje su zadovoljena sljedeća tri uslova:

i. $(a^2 + b^2)(c^2 + 2024^2) = (ab + 2024c)^2$,

ii. $(a^2 + 2024^2)(b^2 + c^2) = (2024a + bc)^2$,

iii. najveći zajednički djelilac brojeva a, b i c jednak je 1.

Zadatak 5. Date su kružnice k_1 i k_2 sa centrima u tačkama O_1 i O_2, redom, koje imaju različite poluprečnike i koje se dodiruju izvana u tački A. Neka je t zajednička tangenta te dvije kružnice koja ne prolazi kroz tačku A. Okomica iz tačke A na pravu t siječe simetralu duži O_1O_2 u tački B. Dokazati da je $O_1O_2 = 2AB$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.

Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
12. marta/ožujka 2024.

II razred

Zadatak 1. Ako su α i β rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + 2x + 3 = 0$, odrediti realne parametre a i b tako da $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2$ i $\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2$ budu rješenja jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$.

Zadatak 2. Koliko ima četverocifrenih prirodnih brojeva kojima je zbir prve dvije cifre jednak zbiru zadnje dvije cifre? Obrazložiti!

Zadatak 3. Odrediti sve vrijednosti realnog parametra k za koje postoji polinom $P(x)$ trećeg stepena takav da je istovremeno djeljiv sa polinomima $Q(x) = -x^2 + (2k - 3)x + k + 13$ i $R(x) = 2x^2 - (k - 1)x - 13 - k$.

Zadatak 4. Odrediti sve parove (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi

$$x^4 - 2y^2 = 1.$$

Zadatak 5. Na prečniku $\overline{AB}$ kružnice k_1 proizvoljno je izabrana tačka C različita od tačaka A i B, i povučena je kružnica k_2 koja dodiruje duž $\overline{AB}$ u tački C i kružnicu k_1 iznutra u tački D. Neka je E tačka presjeka duži $\overline{BD}$ i prave okomite na AB u tački C. Označimo sa F sredinu kružnog luka $\widehat{AB}$ na kojem je tačka D. Dokazati da su tačke A, E, F kolinearne.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
12. marta/ožujka 2024.

III razred

Zadatak 1. Odrediti jednačine zajedničkih tangenti kružnica $x^2+y^2=2x$ i $x^2+y^2=2y$.

Zadatak 2. Neka su α, β, γ uglovi trougla.

a) Dokazati da vrijedi jednakost: $\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

b) Dokazati da vrijedi nejednakost $\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\le 1$.

Zadatak 3. Neka su a i b relativno prosti prirodni brojevi, te neka je p prost broj. Dokazati da vrijedi

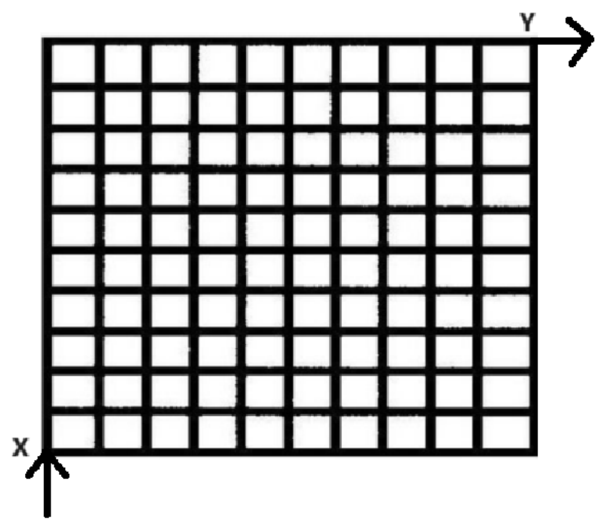
$$NZD(ab, a^2+pb^2)=\begin{cases}1, ako\ p\nmid a\\ p, ako\ p\mid a\end{cases}$$

Zadatak 4. Neka je ABC jednakostranični trougao, te neka je P tačka u njegovoj unutrašnjosti. Dalje, neka su D, E, F podnožja normala iz tačke P na stranice BC, CA, AB, redom. Dokazati:

a) $AF+BD+CE=AE+BF+CD$.

b) $P_{\Delta APF}+P_{\Delta BPD}+P_{\Delta CPE}=P_{\Delta APE}+P_{\Delta BPF}+P_{\Delta CPD}$.

Zadatak 5. Data je mreža 2024×2024 (na slici je prikazana mreža 10×10). Donji lijevi ugao je tačka X, a gornji desni tačka Y. Puž dolazi odozdo u tačku X, te želi da izađe iz mreže u tački Y i to tako što će iz nje otići desno (slika). Puž se može kretati samo ivicama mreže, te se uvijek kreće samo gore i desno. U bilo kojem korneru mreže on može promijeniti smjer kretanja (tj. iz desno u gore ili obratno), ali nakon što promijeni smjer, ne može odmah prilikom narednog kornera opet promijeniti smjer. Na koliko načina puž može na željeni način izaći iz mreže tako da napravi tačno 777 promjena smjera? Pri tome, prvu promjenu smjera može (ali ne mora) napraviti odmah u tački X, a posljednju promjenu smjera može (ali ne mora) napraviti u tački Y.



Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
12. marta/ožujka 2023.

IV razred

Zadatak 1. Neka je $a_1, a_2, a_3 \ldots$ beskonačan aritmetički niz realnih brojeva.

a) Ako postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $\frac{a_{2m}}{a_{2n}} = -1$, dokazati da niz sadrži cijeli broj.
b) Navesti primjer niza koji ne sadrži niti jedan racionalan broj, a za koji postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $\frac{a_m}{a_n} = -1$.

Zadatak 2. Data je ploča dimenzije 8×8. Za skup polja ploče kažemo da je *lijepo raspoređen* ako nikoja dva polja nisu u istom redu niti u istoj koloni.

a) Na koliko načina je moguće odabrati skup od 8 lijepo raspoređenih polja?
b) Ukoliko se sa ploče uklone gornje lijevo i donje desno polje, na koliko načina je moguće od preostala 62 polja odabrati skup od 8 lijepo raspoređenih?
c) U polja ploče upisani su brojevi $5, 10, 15, 20, \ldots 320$ u rastućem poretku slijeva nadesno i odozgo prema dole (tj. u prvom redu su redom brojevi $5, 10, 15, \ldots, 40$, u drugom redu redom brojevi $45, 50, 55, \ldots, 80$ itd.). Odrediti sve vrijednosti koje može uzeti suma brojeva na skupu od 8 lijepo raspoređenih polja.

Zadatak 3. Odrediti sve parove (a, b) cijelih brojeva za koje vrijedi
$$(8a - b)^2 = 2 \cdot (a - 2) \cdot b^2.$$

Zadatak 4. U kružnicu poluprečnika 1 upisan je kvadrat $ABCD$ i jednakostranični trougao XYZ, pri čemu je dozvoljeno da se tjemena kvadrata i trougla podudaraju. Koja je najveća površina koju može imati mnogougao čija su tjemena tačke A, B, C, D, X, Y, Z (ovaj mnogougao može imati manje od 7 tjemena ako se neke tačke podudaraju)?

Zadatak 5. Odrediti sve funkcije $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takve da je $f(1) > 0$ i da za sve $x, y \in \mathbb{N}_0$ vrijedi
$$f(x^2 + 3y^2) = \big(f(x)\big)^2 + 3\big(f(y)\big)^2.$$

Napomena: $\mathbb{N}_0$ označava skup nenegativnih cijelih brojeva.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
12. marta/ožujka 2024.

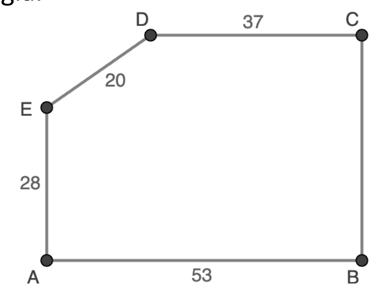
Rješenja zadataka za I razred

Zadatak 1. Dat je petougao $ABCDE$ sa sljedećim osobinama:

i. $\angle EAB = \angle ABC = \angle BCD = 90°$,

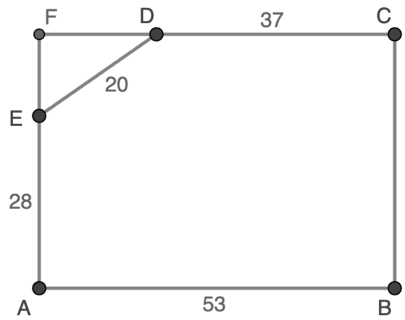
ii. $AB = 53, CD = 37, DE = 20, AE = 28$.

Odrediti površinu datog petougla.



Rješenje:

Dodajmo tačku F tako da je četverougao $ABCF$ pravougaonik.



Sada imamo da je $FD = FC - DC = AB - DC = 53 - 37 = 16$. Iz Pitagorine teoreme u trouglu ΔEDF imamo $EF = \sqrt{ED^2 - FD^2} = 12$. Iz toga slijedi da je $BC = AF = 28 + 12 = 40$. Površina petougla $ABCDE$ jednaka je razlici površina četverougla $ABCF$ i trougla ΔEDF, odnosno površina petougla jednaka je $53 \cdot 40 - \frac{16 \cdot 12}{2} = 2024$.

Šema bodovanja

- dodavanje tačke F: **5 bodova**
- izračunavanje stranice FD: **3 boda**
- izračunavanje stranice EF (ili AF): **7 bodova**
- izračunavanje površine petougla: **5 bodova**

Napomena: Zadatak je moguće uraditi i podjelom petougla na neke manje dijelove umjesto dodavanja tačke F. Takva rješenja ili pokušaji rješenja će biti adekvatno bodovani na način koji je konzistentan sa gore opisanom šemom (tj. slični postupci u takvim rješenjima će vrijediti sličan broj bodova kao u datoj šemi).

Zadatak 2. Dati su prirodni brojevi a, b, c za koje vrijedi jednakost

$$\frac{a^2 - a - c}{b} + \frac{b^2 - b - c}{a} = a + b + 2.$$

Dokazati da je broj $a + b + c$ kvadrat prirodnog broja.

Rješenje:

Nakon množenja jednakosti sa ab, uzevši u obzir da je $a + b \neq 0$, slijede ekvivalentne jednakosti:

$$a^3 - a^2 - ac + b^3 - b^2 - bc = a^2b + ab^2 + 2ab$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^2 + ab(a + b) + c(a + b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a + b + c + ab)$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)(a + b + c + ab)$$

$$a^2 - ab + b^2 = a + b + c + ab$$

$$a + b + c = (a - b)^2$$

Dakle, broj $a + b + c$ je potpun kvadrat.

Šema bodovanja:

- faktorizacija izraza na $(a + b)$: **15 bodova** (ovdje je moguće dobiti parcijalne bodove ako učenik neki dio izraza faktoriše na $(a + b)$, ali ne i cijeli izraz)
- dobijanje $a + b + c = (a - b)^2$ i zaključak: **5 bodova**

Zadatak 3. Na hokejaškom turniru učestvuje 6 ekipa. Svaka ekipa je igrala sa svakom drugom ekipom tačno jednom. U jednom meču ekipa dobija 3 boda ako pobijedi, 0 bodova ako izgubi i 1 bod ako je neriješen rezultat (tj. u slučaju neriješenog rezultata obje ekipe dobijaju po 1 bod). Na kraju turnira ekipe su rangirane po broju bodova. Ispostavilo se da nikoje dvije ekipe nemaju isti broj bodova, kao i da svaka ekipa (osim posljednje) ima tačno 2 boda više od ekipe koja se nalazi jedno mjesto ispod na rang listi. Dokazati da je četvrta ekipa na rang listi pobijedila tačno dva meča.

Rješenje:

Neka su bodovi ekipa jednaki $s, s+2, s+4, s+6, s+8$ i $s+10$ za neki nenegativni cijeli broj s. Neka je T ukupan broj dodijeljenih bodova. Dakle imamo $T = 6s + 30$, iz čega slijedi da $6|T$. Ukupan broj odigranih mečeva jednak je $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$. Neka je g broj mečeva čiji je rezultat bio neriješen. U meču u kojem je neriješen rezultat broj podijeljenih bodova jednak je $1+1=2$, a u svim ostalim mečevima je broj podijeljenih bodova jednak 3. Dakle imamo i da je $T = 2g + 3(15-g) = 45 - g$, odakle slijedi da je $30 \leq T \leq 45$ (jer je $0 \leq g \leq 15$). Kako je T broj djeljiv sa 6 opcije su $T = 30, T = 36, T = 42$.

1° Ako je $T = 30$, onda je $g = 45 - 30 = 15$. To znači da su svi mečevi bili neriješeni, tj. sve ekipe su imale jednak broj bodova, što je kontradikcija. Dakle, slučaj $T = 30$ nije moguć.
2° Ako je $T = 36$, imamo da je $g = 45 - 36 = 9$ i $s = \frac{T-30}{6} = 1$. Dakle brojevi bodova ekipa su 1,3,5,7,9,11. Ekipa koja je osvojila 1 bod morala je izgubiti 4 meča, a u 1 meču igrati neriješeno. Ekipa koja je osvojila 3 boda morala je izgubiti bar 2 meča (jer najviše 3 meča nije izgubila). Ekipa koja je osvojila 11 bodova morala je pobijediti bar 3 meča (inače bi njen maksimalan broj bodova bio $3+3+1+1+1=9$). Dakle, pored ekipa sa 1 i 3 osvojena boda, bar jedna druga ekipa je izgubila neki meč. Dakle, ukupno je u barem $4+2+1=7$ mečeva u kojima je neka ekipa izgubila, što je u kontradikciji sa činjenicom da $15 - g = 15 - 9 = 6$ mečeva nije završilo sa neriješenim rezultatom. Dakle, slučaj $T = 36$ nije moguć.
3° Ako je $T = 42$, imamo da je $g = 3, s = 2$ i brojevi bodova ekipa su 2,4,6,8,10,12. Kako je za svaku ekipu broj bodova koji su dobili od pobjeda djeljiv sa 3, ekipe su redom morale igrati bar 2,1,0,2,1,0 mečeva neriješeno. Dakle, ukupno je moralo biti dodijeljeno bar $2+1+0+2+1+0=6$ bodova u mečevima sa neriješenim rezultatom. Kako je ukupno tačno $g \cdot 2 = 6$ bodova dodijeljeno u mečevima sa neriješenim rezultatom, zaključujemo da su ekipe tačno igrale po 2,1,0,2,1,0 mečeva neriješeno. To nam govori da je ekipa na četvrom mjestu (sa 6 bodova) igrala tačno 0 mečeva neriješeno, što znači da je pobijedila tačno 2 meča i izgubila tačno 3 meča, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- zaključak da je $T = 6s + 30 = 45 - g$: **4 boda** (umjesto broja neriješenih mečeva može se posmatrati i broj mečeva koji nisu bili neriješeni)
- zaključak da su opcije $T = 30, T = 36$ ili $T = 42$: **1 bod**
- rješavanje slučaja $T = 30$: **1 bod**
- rješavanje slučaja $T = 36$: **7 bodova**
- rješavanje slučaja $T = 42$: **7 bodova**

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve a, b, c za koje su zadovoljena sljedeća tri uslova:

i. $(a^2 + b^2)(c^2 + 2024^2) = (ab + 2024c)^2$,
ii. $(a^2 + 2024^2)(b^2 + c^2) = (2024a + bc)^2$,
iii. najveći zajednički djelilac brojeva a, b i c jednak je 1.

Rješenje:

Nakon oduzimanja jednakosti i) i ii) te faktorisanja, dobivamo:

$$(a^2 - c^2)(b^2 - 2024^2) = 0.$$

Odatle slijedi $a = c$ ili $b = 2024$.

Uvrštavajući $a = c$ u i) ili ii) uslov, slijedi:

$$(a^2 - 2024b)^2 = 0,$$

odakle je

$$a^2 = 2024b = 2^3 \cdot 11 \cdot 23b.$$

Odavde imamo

$$11|a = c \Longrightarrow 11^2|a^2 \Longrightarrow 11|b.$$

tj. $NZD(a, b, c) \geq 11$, što je kontradikcija s uslovom iii). Dakle, ne može biti $a = c$.

Uvrštavajući $b = 2024$ dobivamo:

$$(a^2 + 2024^2)(c^2 + 2024^2) = (2024a + 2024c)^2$$

$$(ac - 2024^2)^2 = 0$$

$$ac = 2024^2 = 2^6 \cdot 11^2 \cdot 23^2$$

Kako je $NZD(a, c, 2024) = 1$, odavde slijedi da je $NZD(a, c) = 1$ (jer ako neki prost broj $p|a$ i $p|c$ onda iz gornje relacije slijeda i da $p^2|2024^2$, odnosno $p|2024$, što je kontradikcija). Sada dobivamo rješenja (uz $b = 2024$):

$$(a, c) \in \left\{ \begin{matrix} (1, 2024^2), (2^6, 11^2 \cdot 23^2), (11^2, 2^6 \cdot 23^2), (23^2, 2^6 \cdot 11^2), (2^6 \cdot 11^2, 23^2), \\ (2^6 \cdot 23^2, 11^2), (11^2 \cdot 23^2, 2^6), (2024^2, 1) \end{matrix} \right\}$$

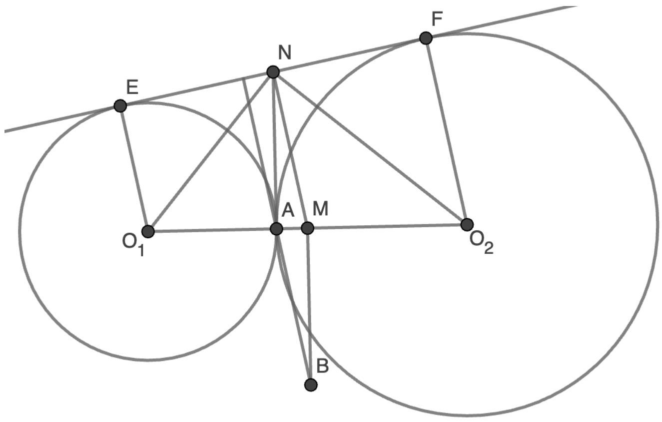
Šema bodovanja:

- dobijanje jednakosti $(a^2 - c^2)(b^2 - 2024^2) = 0$ i ispravan zaključak koji su slučajevi: **6 bodova**
- u slučaju $a = c$ dobijanje jednakosti $(a^2 - 2024b)^2 = 0$: **3 boda**
- dokaz da u slučaju $a = c$ nema rješenja: **4 boda**
- u slučaju $b = 2024$ dobijanje jednakosti $(ac - 2024^2)^2 = 0$: **3 boda**
- ispravno rješavanje slučaja $b = 2024$: **4 boda**

Zadatak 5. Date su kružnice k_1 i k_2 sa centrima u tačkama O_1 i O_2, redom, koje imaju različite poluprečnike i koje se dodiruju izvana u tački A. Neka je t zajednička tangenta te dvije kružnice koja ne prolazi kroz tačku A. Okomica iz tačke A na pravu t siječe simetralu duži O_1O_2 u tački B. Dokazati da je $O_1O_2 = 2AB$.

Rješenje:

Neka je M sredina duži O_1O_2, tačke E i F dodirne tačke tangente t sa kružnicama k_1 i k_2, redom, i neka je N presječna tačka duži EF sa tangentom iz tačke A na kružnice k_1 i k_2. Sada imamo da je $\angle O_1EF = \angle O_2FE = \angle O_1AN = \angle O_2AN = 90°$. Četverougao EO_1AN je deltoid (jer $O_1E = O_1A$ i $\angle O_1EN = \angle O_1AN = 90°$), pa slijedi da je $NE = NA$. Analogno, četverougao AO_2FN je deltoid, pa slijedi da je $NF = NA$. Dakle, N je sredina duži EF. Također, imamo da je $\angle O_1NO_2 = \angle O_1NA + \angle O_2NA = \frac{\angle ENA}{2} + \frac{\angle ANF}{2} = \frac{\angle ENF}{2} = 90°$. Kako je sada NM težišnica pravouglog trougla ΔO_1O_2N, imamo da je $O_1O_2 = 2NM$. Dakle, dovoljno je dokazati da je $NM = AB$.



Pošto je četverougao EO_1O_2F trapez ($EO_1||EO_2$), a MN srednja linija tog trapeza, slijedi da je $MN||EO_1||EO_2$, odnosno $MN \perp EF$. Kako je i $AB \perp EF$, imamo da je $MN||AB$. S druge strane, imamo i da je $AN \perp O_1O_2$ i $MB \perp O_1O_2$, pa je $AN||MB$. Dakle, zaključujemo da je četverougao $ABMN$ paralelogram. Sada imamo da je $AB = NM$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- dokaz da se presjek tangente iz A sa duži EF i sredina duži EF poklapaju: **7 bodova**
- dokaz da je $O_1O_2 = 2NA$: **5 bodova**
- dokaz da je $NM||AB$: **4 boda**
- zaključak da je četverougao $ABMN$ paralelogram: **3 boda**
- krajnji zaključak da je $O_1O_2 = 2AB$: **1 bod**

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
12. marta/ožujka 2024.

II razred

Zadatak 1. Ako su α i β rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + 2x + 3 = 0$, odrediti realne parametre a i b tako da $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2$ i $\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2$ budu rješenja jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$.

Zadatak 2. Koliko ima četverocifrenih prirodnih brojeva kojima je zbir prve dvije cifre jednak zbiru zadnje dvije cifre? Obrazložiti!

Zadatak 3. Odrediti sve vrijednosti realnog parametra k za koje postoji polinom $P(x)$ trećeg stepena takav da je istovremeno djeljiv sa polinomima $Q(x) = -x^2 + (2k-3)x + k + 13$ i $R(x) = 2x^2 - (k-1)x - 13 - k$.

Zadatak 4. Odrediti sve parove (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi

$$x^4 - 2y^2 = 1.$$

Zadatak 5. Na prečniku $\overline{AB}$ kružnice k_1 proizvoljno je izabrana tačka C različita od tačaka A i B, i povučena je kružnica k_2 koja dodiruje duž $\overline{AB}$ u tački C i kružnicu k_1 iznutra u tački D. Neka je E tačka presjeka duži $\overline{BD}$ i prave okomite na AB u tački C. Označimo sa F sredinu kružnog luka $\widehat{AB}$ na kojem je tačka D. Dokazati da su tačke A, E, F kolinearne.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
12. marta/ožujka 2024.

II razred

Rješenja zadataka

Zadatak 1. Ako su α i β rješenja kvadratne jednadžbe $x^2+2x+3=0$, odrediti realne parametre a i b tako da $\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2$ i $\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)^2$ budu rješenja jednadžbe $x^2+ax+b=0$.

Rješenje 1: Najprije odredimo rješenja kvadratne jednadžbe $x^2+2x+3=0$. Koristeći formulu za traženje rješenja kvadratne jednadžbe dobijamo

$$x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 3}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}=\frac{-2\pm 2i\sqrt{2}}{2}=-1\pm i\sqrt{2}.$$

Stavimo $\alpha=-1-i\sqrt{2}$ i $\beta=-1+i\sqrt{2}$. Sada možemo izračunati $\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2$ i $\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)^2$. Imamo:

$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2=\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}-2=\left(-1-i\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{\left(-1-i\sqrt{2}\right)^2}-2=-1+2i\sqrt{2}+\frac{1}{-1+2i\sqrt{2}}-2=$$

$$=-1+2i\sqrt{2}-\frac{1+2i\sqrt{2}}{9}-2=\frac{-9+18i\sqrt{2}-1-2i\sqrt{2}-18}{9}=\frac{-28+16i\sqrt{2}}{9}=-\frac{4}{9}\left(7-4i\sqrt{2}\right),$$

i

$$(\beta-\frac{1}{\beta})^2=\beta^2+\frac{1}{\beta^2}-2=(-1+i\sqrt{2})^2+\frac{1}{(-1+i\sqrt{2})^2}-2=-1-2i\sqrt{2}-\frac{1}{1+2i\sqrt{2}}-2=$$

$$=-1-2i\sqrt{2}-\frac{1-2i\sqrt{2}}{9}-2=\frac{-9-18i\sqrt{2}-1+2i\sqrt{2}-18}{9}=\frac{-28-16i\sqrt{2}}{9}=-\frac{4}{9}\left(7+4i\sqrt{2}\right).$$

Jednadžba čiji su korjeni $\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2$ i $(\beta-\frac{1}{\beta})^2$ je data sa

$$\left(x-\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2\right)\left(x-(\beta-\frac{1}{\beta})^2\right)=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{4}{9}\left(7-4i\sqrt{2}\right)\right)\left(x+\frac{4}{9}\left(7+4i\sqrt{2}\right)\right)=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+\tfrac{4}{9}\left(7+4i\sqrt{2}\right)x+\tfrac{4}{9}\left(7-4i\sqrt{2}\right)x+\tfrac{16}{81}\left(7-4i\sqrt{2}\right)\left(7+4i\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$x^2+\frac{4}{9}\left(7+4i\sqrt{2}+7-4i\sqrt{2}\right)x+\frac{16}{81}(49+32)=0\Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{56}{9}x + 16 = 0.$$

Odavde zaključujemo da je $a = \frac{56}{9}$ i $b = 16$.

Šema bodovanja

- Pronalaženje rješenja jednadžbe $x^2 + 2x + 3 = 0$ vrijedi **3 boda.**
- Računanje svake od vrijednosti $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2$ i $\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2$ vrijedi po **5 bodova.** Ukoliko učenik napravi manju računsku grešku u nekom od izračuna, onda za taj izračun dobiva **3 boda.**
- Formiranje jednadžbe čija su rješenja $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2$ i $\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2$ vrijedi **4 boda.**
- Dobivanje jednadžbe $x^2 + \frac{56}{9}x + 16 = 0$, odnosno zaključak da je $a = \frac{56}{9}$ i $b = 16$ vrijedi **3 boda.**

Napomena: Ukoliko učenik nakon računanja izraza $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2$ i $\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2$ iskoristi Vietove formula da izračuna a i b, onda za tačan izračun učenik dobiva preostalih **7 bodova (3 boda za Viteove formule i po 2 boda za svaki tačno izračunat a i b)**.

Rješenje 2: Koristeći Vieteova pravila, imamo da je

$$\alpha + \beta = -2 \ \text{ i } \ \alpha\beta = 3.$$

Da bi $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2$ i $\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2$ bila rješenja jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$ mora vrijediti

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2 = -a \ \text{ i } \ \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2 = b.$$

Odavde i iz $\alpha + \beta = -2$ i $\alpha\beta = 3$, imamo

$$a = -\left[\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2\right] = -\left(\alpha^2 - 2 + \frac{1}{\alpha^2} + \beta^2 - 2 + \frac{1}{\beta^2}\right) = -\left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} - 4\right)$$
$$= -\left((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} - 4\right) = -\left(4 - 6 + \frac{4 - 6}{9} - 4\right) = \frac{56}{9},$$

$$b = \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)^2 = \left[\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\right]^2 = \left(\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \left(\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}\right)^2$$
$$= \left(\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}\right)^2 = \left(3 + \frac{1}{3} - \frac{4 - 6}{3}\right)^2 = 16.$$

Dakle, $a = \frac{56}{9}$ i $b = 16$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da je $\alpha + \beta = -2$ i $\alpha\beta = 3$ vrijedi **3 boda.**
- Tačno izražavanje a i b preko α i β vrijedi **3 boda.**
- Tačan izračun svake od vrijednosti a i b vrijedi **7 bodova,** od čega učenik dobiva **3 boda** ako dobije $a = -\left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2} - 4\right)$ odnosno $b = \left(\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)^2$ a za ostatak izračuna učenik dobiva **4 boda.**

Zadatak 2. Koliko ima četverocifrenih prirodnih brojeva kojima je zbir prve dvije cifre jednak zbiru zadnje dvije cifre? Obrazložiti!

Rješenje: Označimo sa n zbir prve dvije, odnosno posljednje dvije, cifre traženih brojeva. Kako su cifre 0,1,2,…,9 zaključujemo da mora vrijediti $1 \leq n \leq 18$. Dalje razlikujemo dva slučaja.
Prvi slučaj: Ako je $1 \leq n \leq 9$ onda prve dvije cifre možemo izabrati na n načina a posljednje dvije cifre na $n+1$ načina jer se cifra 0 ne može nalaziti na prvom mjestu. Odavde zaključujemo da je ukupan broj traženih brojeva u ovom slučaju jednak

$$\sum_{n=1}^{9} n(n+1) = \sum_{n=1}^{9} n^2 + \sum_{n=1}^{9} n = \frac{9 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 9 + 1)}{6} + \frac{9 \cdot 10}{2} = 285 + 45 = 330.$$

Drugi slučaj: Ako je $10 \leq n \leq 18$ onda oba para cifara možemo izabrati na $19 - n$ načina. Odavde zaključujemo da je ukupan broj traženih brojeva u ovom slučaju jednak

$$\sum_{n=10}^{18} (19-n)^2 = \sum_{n=1}^{9} n^2 = 285.$$

Konačno, ukupan broj četverocifrenih prirodnih brojeva kojima je zbir prve dvije cifre jednak zbiru posljednje dvije cifre je $330 + 285 = 615$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da mora vrijediti $1 \leq n \leq 18$ vrijedi **2 boda.**
- Zaključak da u prvom slučaju prve dvije cifre možemo izabrati na n načina vrijedi **3 boda.**
- Zaključak da u prvom slučaju posljednje dvije cifre možemo izabrati na $n+1$ načina vrijedi **3 boda.**
- Pravilno izračunata suma u prvom slučaju vrijedi **4 boda.**
- Zaključak da u prvom slučaju parove cifara možemo izabrati na $19 - n$ načina vrijedi **5 bodova.**
- Računanje sume u drugom slučaju vrijedi **2 boda.**
- Zbrajanje rezultata iz oba slučaja vrijedi **1 bod.**

Napomena: Nakon zaključka da je $1 \leq n \leq 18$, ukoliko je učenik posmatrao posebno slučajeve $n = 1, n = 2, \ldots$ onda zaključak da je $1 \leq n \leq 18$ vrijedi **2 boda** I svaki od 18 slučajeva vrijedi **1 bod.** Ukoliko učenik tačno dobije rezultate u svakom od slučajeva ali ih na kraju ne sabere oduzima se **1 bod.**

Zadatak 3. Odrediti sve vrijednosti realnog parametra k za koje postoji polinom $P(x)$ trećeg stepena takav da je istovremeno djeljiv sa polinomima $Q(x) = -x^2 + (2k-3)x + k + 13$ i $R(x) = 2x^2 - (k-1)x - 13 - k$.

Rješenje: S obzirom da oba polinoma $Q(x)$ i $R(x)$ istovremeno dijele polinom $P(x)$, to znači da oni moraju imati bar jednu zajedničku nulu, jer u protivnom bi polinom $P(x)$ morao biti bar četvrtog stepena. Ako bi ovi polinomi imali dvije zajedničke nule, onda bi oni bili jednaki do na multiplikativnu konstantu, tj. postojala bi realna konstanta $c \neq 0$ takva da vrijedi $Q(x) = c \cdot R(x)$. To je nemoguće jer koeficijenti uz odgovarajuće stepene promjenjive x u polinomima $Q(x)$ i $R(x)$ nisu proporcionalni, odnosno $\frac{-1}{2} \neq -1 = \frac{k+13}{-k-13}$. Dakle, da bi postojao polinom trećeg stepena sa traženom osobinom, polinomi $Q(x)$ i $R(x)$ moraju imati tačno jednu zajedničku nulu. Označimo tu nulu sa α. Tada mora vrijediti $Q(\alpha) = 0, R(\alpha) = 0$ odakle dobijamo sistem jednačina

$$-\alpha^2 + (2k-3)\alpha + k + 13 = 0$$

$$2\alpha^2 - (k-1)\alpha - 13 - k = 0.$$

Sabiranjem jednačina dobijenog sistema imamo

$$\alpha^2 + (2k - 3 - k + 1)\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (k-2)\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha + k - 2) = 0.$$

Odavde zaključujemo da je $\alpha = 0$ ili $\alpha + k - 2 = 0$.

Ako je $\alpha = 0$, uvrštavanjem u prvu jednačinu sistema dobijamo $k + 13 = 0$ odakle zaključujemo da je $k = -13$. Ako je $\alpha + k - 2 = 0$ onda dobijamo $\alpha = 2 - k$. Uvrštavanjem u prvu jednačinu sistema dobijamo jednačinu

$$-(2-k)^2 + (2k-3)(2-k) + k + 13 = 0.$$

Nakon sređivanja i množenja sa $-\frac{1}{3}$ jednačina postaje

$$k^2 - 4k - 1 = 0.$$

Primjenjujući formulu za rješavanje kvadratne jednačine dobijamo

$$k_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Konačno zaključujemo da $k \in \{-13, 2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\}$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da polinomi $Q(x)$ i $R(x)$ imaju bar jednu zajedničku nulu vrijedi **7 bodova.**
- Zaključak da polinomi $Q(x)$ i $R(x)$ nisu jednaki i da imaju tačno jednu zajedničku nulu vrijedi **1 bod.**
- Uvođenje oznake za zajedničku nulu i postavljanje odgovarajućeg sistema vrijedi **2 boda.**
- Zaključak da iz dobivenog sistema slijedi $\alpha = 0$ ili $\alpha = 2 - k$ vrijedi **3 boda.**
- Zaključak da iz $\alpha = 0$ slijedi $k = -13$ vrijedi **2 boda.**
- Uvrštavanje $\alpha = 2 - k$ u neku od jednačina sistema i dobivanje rješenja $k_{1/2} = 2 \pm \sqrt{5}$ vrijedi **5 bodova.**

Napomena: Ukoliko učenik rješi sistem eliminišući x^2 iz sistema ili na neki drugi način onda

- Izražavanje α ili k iz sistema vrijedi **3 boda.**
- Pronalaženje rješenja $k = -13$ vrijedi **2 boda.**
- Pronalaženje rješenja $k = 2 - \sqrt{5}$ i $k = 2 + \sqrt{5}$ vrijedi **5 bodova.**

Dodatak: Iako se u zadatku nije tražilo, možemo u svakom od slučajeva napisati kako glasi polinom $P(x)$.

1) Za $k = -13$, polinomi $Q(x)$ i $R(x)$ glase: $Q(x) = -x^2 - 29x$ i $R(x) = 2x^2 + 14x$. Oba polinoma imaju zajedničku nulu $x_1 = 0$, druga nula polinoma $Q(x)$ je $x_2 = -29$, a druga nula polinoma $R(x)$ je $x_3 = -7$. Polinom $P(x)$ ima oblik
$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = cx(x + 29)(x + 7) = cx^3 + 36cx^2 + 203cx,$$
pri čemu je c proizvoljna realna konstanta različita od nule.
2) Za $k = 2 - \sqrt{5}$, polinomi $Q(x)$ i $R(x)$ imaju zajedničku nulu $x_1 = \sqrt{5}$, druga nula polinoma $Q(x)$ je $x_2 = 1 - 3\sqrt{5}$, a druga nula polinoma $R(x)$ je $x_3 = \frac{1}{2}\left(1 - 3\sqrt{5}\right)$. Polinom $P(x)$ ima oblik
$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = c\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x - \left(1 - 3\sqrt{5}\right)\right)\left(x - \frac{1}{2}\left(1 - 3\sqrt{5}\right)\right)$$
$$= c\left(x^3 - \frac{3 - 7\sqrt{5}}{2}x^2 + \frac{1 - 3\sqrt{5}}{2}x + 15 - 23\sqrt{5}\right),$$
pri čemu je c proizvoljna realna konstanta različita od nule.
3) Za $k = 2 + \sqrt{5}$, polinomi $Q(x)$ i $R(x)$ imaju zajedničku nulu $x_1 = -\sqrt{5}$, a druga nula polinoma $Q(x)$ je $x_2 = 1 + 3\sqrt{5}$, a druga nula polinoma $R(x)$ je $x_3 = \frac{1}{2}\left(1 + 3\sqrt{5}\right)$. Polinom $P(x)$ ima oblik
$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = c\left(x + \sqrt{5}\right)\left(x - \left(1 + 3\sqrt{5}\right)\right)\left(x - \frac{1}{2}\left(1 + 3\sqrt{5}\right)\right)$$
$$= c\left(x^3 - \frac{3 + 7\sqrt{5}}{2}x^2 + \frac{1 + 3\sqrt{5}}{2}x + 15 + 23\sqrt{5}\right),$$
pri čemu je c proizvoljna realna konstanta različita od nule.

Zadatak 4. Odrediti sve parove (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi
$$x^4 - 2y^2 = 1.$$

Rješenje 1: Datu jednadžbu možemo napisati u obliku
$$x^4 - 1 = 2y^2, \text{tj. } (x-1)(x+1)(x^2+1) = 2y^2.$$
Odavde vidimo da mora biti x neparan broj jer je desna strana uvijek paran broj. Stavimo da je $x = 2n + 1$ za neki cijeli broj n. Uvrštavanjem u posljednju jednadžbu i sređivanjem dobijemo
$$8n(n+1)(2n^2 + 2n + 1) = 2y^2,$$
tj.
$$4n(n+1)(2n(n+1) + 1) = y^2.$$
Primijetimo da je desna strana potpun kvadrat nekog cijelog broja, pa takva mora biti i lijeva strana. Kako su $n(n+1)$ i $2n(n+1)+1$ uzajamno prosti brojevi, to mora biti $n(n+1)$ potpun kvadrat. To je jedino moguće ako je $n = 0$ ili $n = -1$.
Zaista, ako je $n > 0$ cijeli broj, onda je
$$n^2 < n(n+1) < (n+1)^2,$$
pa $n(n+1)$ ne može biti potpun kvadrat.
Ako je $n < -1$ cijeli broj, onda postoji prirodan broj $m > 1$ takav da je $n = -m$ i
$$n(n+1) = -m(-m+1) = (m-1)m.$$
Kako je
$$(m-1)^2 < (m-1)m < m^2,$$
to $(m-1)m$ ne može biti potpun kvadrat, pa ni $n(n+1)$ ne može biti potpun kvadrat nekog cijelog broja.
Sada, za $n = 0$ imamo da je $x = 1, y = 0$, a za $n = -1$ je $x = -1, y = 0$. Dakle, rješenja su
$$(x, y) \in \{(1,0), (-1,0)\}.$$

Šema bodovanja:

- Napisati jednadžbu u obliku $(x-1)(x+1)(x^2+1) = 2y^2$ **2 boda.**
- Zaključak da x mora biti neparan **2 boda.**
- Svođenje jednadžbe na oblik $4n(n+1)(2n(n+1)+1) = y^2$ **1 bod**.
- Zaključak da su $n(n+1)$ i $2n(n+1)+1$ uzajamno prosti brojevi **4 boda**.
- Zaključak da mora biti $n(n+1)$ potpun kvadrat **5 bodova**.
- Dokaz da je $n(n+1)$ potpun kvadrat samo u slučaju $n = 0$ ili $n = -1$ **4 boda.**
- Pravilno izračunata rješenja $(x, y) \in \{(1,0), (-1,0)\}$ **2 boda.**

Rješenje 2: Datu jednadžbu možemo napisati u obliku
$$x^4 = 2y^2 + 1,$$
pa vidimo da x mora biti neparan broj. Napišimo jednadžbu sada u obliku
$$x^4 - 1 = 2y^2.$$
Posmatrajmo posljednju jednadžbu po modulu 4. Kako je x neparan, to imamo da je
$$x^4 - 1 \equiv 0 \ (mod\ 4).$$
To znači da mora biti
$$2y^2 \equiv 0 \ (mod\ 4),$$
odakle slijedi da y mora biti paran broj. Stavimo $x = 2n + 1$ i $y = 2m$ za neke cijele brojeve n i m.
Jednadžba $x^4 - 1 = 2y^2$ sada postaje
$$n(n+1)(2n^2 + 2n + 1) = m^2.$$

Kako su brojevi $n, n+1$ i $2n^2+2n+1$ uzajamno prosti i njihov proizvod potpun kvadrat, tada je ili jedan od njih jednak nuli, tj. $n=0$ ili $n=-1$ (treći faktor nema realnih nula), ili svaki od njih mora biti sam po sebi potpun kvadrat ili dva od njih potpuni kvadrati pomnoženi sa -1. Kako je $2n^2+2n+1>0$ za sve cijele n, ne umanjujući općenitost možemo staviti $n=p^2$ i $n+1=q^2$ ili $n=-p^2$ i $n+1=-q^2$ za neke cijele brojeve p i q.
Ako je $n=p^2$ i $n+1=q^2$, onda je

$$1=q^2-p^2=(q-p)(q+p).$$

Ovo je moguće jedino ako je

$$q-p=1, q+p=1 \text{ ili } q-p=-1, q+p=-1.$$

Rješenje prvog sistema je $q=1, p=0$, a rješenje drugog sistema je $q=-1, p=0$. Oba rješenja daju $n=0$.

Ako je $n=-p^2$ i $n+1=-q^2$, onda je

$$1=p^2-q^2=(p-q)(p+q).$$

Ovo je moguće jedino ako je

$$p-q=1, p+q=1 \text{ ili } p-q=-1, p+q=-1\,.$$

Rješenje prvog sistema je $p=1, q=0$, a rješenje drugog sistema je $p=-1, q=0$. Oba rješenja daju $n=-1$.
Dakle, polazna jednadžba ima rješenje u skupu cijelih brojeva samo ako je $n=0$ ili $n=-1$.
Sada, za $n=0$ imamo da je $x=1, y=0$, a za $n=-1$ je $x=-1, y=0$. Dakle, rješenja su

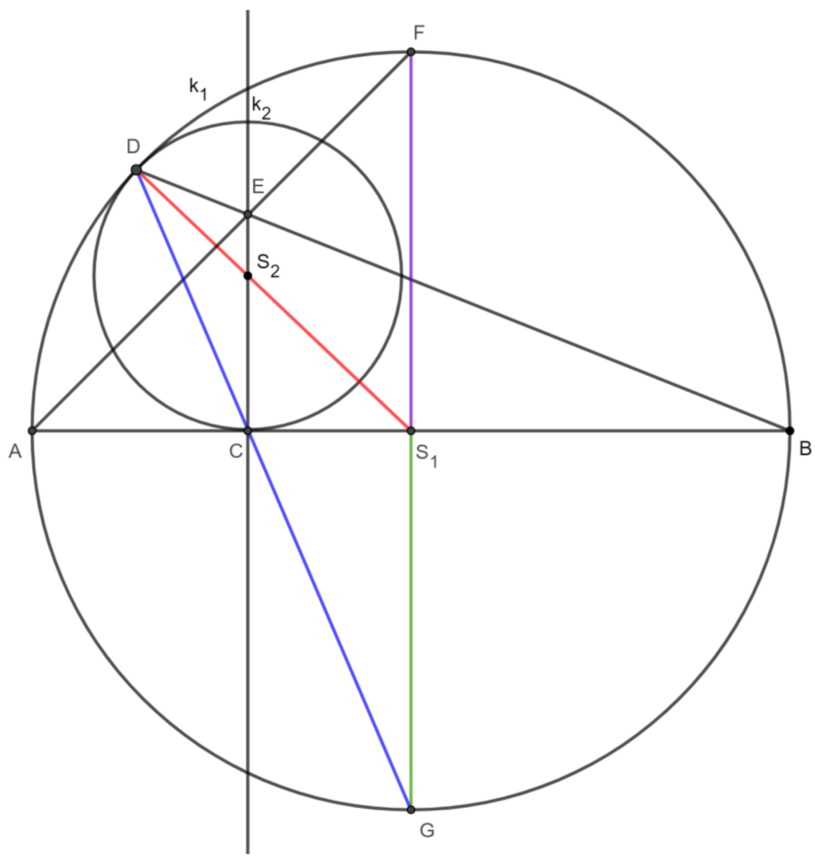
$$(x,y)\in\{(1,0),(-1,0)\}.$$

Šema bodovanja:

- Zaključak da x mora biti neparan **2 boda.**
- Zaključak da y mora biti paran broj **2 boda.**
- Svođenje jendadžbe na oblik $x^4-1=2y^2$ **1 bod.**
- Svođenje jednadžbe na oblik $n(n+1)(2n^2+2n+1)=m^2$ **1 bod**.
- Zaključak da su $n, n+1$ i $2n^2+2n+1$ uzajamno prosti brojevi **4 boda**.
- Zaključak da mora biti $n=0$ ili $n=-1$ (treći faktor nema realnih nula), ili svaki od njih mora biti sam po sebi potpun kvadrat ili dva od njih potpuni kvadrati pomnoženi sa -1 **5 bodova**
- Razmatranje slučajeva $n=p^2, n+1=q^2$ i $n=-p^2, n+1=-q^2$ **3 boda**. Učenik gubi 1 bod ukoliko izostavi jedan od ova dva sistema.
- Pravilno izračunata rješenja $(x,y)\in\{(1,0),(-1,0)\}$ **2 boda.**

Zadatak 5. Na prečniku $\overline{AB}$ kružnice k_1 proizvoljno je izabrana tačka C različita od tačaka A i B, i povučena je kružnica k_2 koja dodiruje duž $\overline{AB}$ u tački C i kružnicu k_1 iznutra u tački D. Neka je E tačka presjeka duži $\overline{BD}$ i prave okomite na AB u tački C. Označimo sa F sredinu kružnog luka $\widehat{AB}$ na kojem je tačka D. Dokazati da su tačke A, E, F kolinearne.

Rješenje: Označimo sa S_1 i S_2 centre kružnica k_1 i k_2, redom. Tačke D, S_1, S_2 leže na istoj pravoj (jer centri kružnica leže na pravoj okomitoj na zajedničku tangentu kružnica u tački dodira D). Tačka S_2 također leži na pravoj okomitoj na pravu AB u tački C, tj. $S_2 \in CE$. Trougao AS_1F je jednakokrako-pravougli trougao sa pravim uglom u vrhu S_1 ($\overline{AS_1} \cong \overline{FS_1}$ kao poluprečnici kružnice k_1 i tačka F je sredina kružnog luka nad prečnikom $\overline{AB}$). To znači da je dovoljno dokazati da je $\angle BAE = 45^\circ$.



Označimo sa G sredinu kružnog luka $\widehat{AB}$ na kojem nije tačka D. Tada su tačke F, S_1, G kolinearne, pa je $S_!G$ okomita na AB. Tada je $CS_2 \parallel GS_1$, pa je $\angle DS_2C = \angle DS_1G$. Trouglovi DS_2C i DS_1G su jednakokraki, a kako je $\angle DS_2C = \angle DS_1G$, to oni imaju sve uglove podudarne, pa su slični. To znači da su tačke D, C, G kolinearne.

Četverougao $ADEC$ je tetivni (jer je $\angle ADE = \angle ADB = 90^\circ$ kao ugao nad prečnikom i $\angle ACE = 90^\circ$), pa je $\angle CAE = \angle CDE = \angle GDB = 45^\circ$ jer je $\angle GDB$ ugao nad četvrtinom kruga.

Dakle, $\angle BAE = \angle CAE = 45^\circ$, pa su tačke A, E, F kolinearne, što je i trebalo dokazati.

Napomena: Sličnost trouglova DS_2C i DS_1G se mogla dokazati posmatranjem homotetije sa centrom u tački D koja prevodi kružnicu k_2 u kružnicu k_1. Tom homotetijoms se tačka S_2 slika u tačku S_1, a tačka C u tačku G.

Šema bodovanja:

- Zaključak da je dovoljno dokazati da je $\angle BAE = 45^\circ$. **4 boda.**
- Uvođenje tačke G **2 boda** i dokaz da su tačke D, C, G kolinearne. **5 bodova.**
- Zaključak da je četverougao $ADEC$ tetivni **5 bodova** i da je $\angle CAE = \angle CDE$ **2 boda**.
- Zaključak da je $\angle GDB = 45^\circ$ **2 boda.**

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
12. marta/ožujka 2024.

III razred – rješenja zadataka i šema bodovanja

Zadatak 1. Odrediti jednačine zajedničkih tangenti kružnica $x^2 + y^2 = 2x$ i $x^2 + y^2 = 2y$.

Rješenje 1: Poznato je (i lako se dokazuje) da je prava $y = kx + n$ tangenta kružnice $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ ako i samo ako vrijedi $r^2(k^2+1) = (-kp + q - n)^2$.
Jednačina prve kružnice se može napisati u obliku $(x-1)^2 + y^2 = 1$, pa iz dobijenog uslova imamo

$$k^2 + 1 = (k+n)^2.$$

Jednačin druge kružnicu možemo napisati u obliku $x^2 + (y-1)^2 = 1$, odakle se dobije

$$k^2 + 1 = (1-n)^2.$$

Kako je $(k+n)^2 = k^2 + 1 = (1-n)^2$, to je $k + n = 1 - n$ ili $k + n = n - 1$. U prvom slučaju uvrštavanjem $k = 1 - 2n$ u prvu jednačinu dobija se $3n^2 - 2n + 1 = 0$, što nema realnih rješenja. U drugom slučaju dobijamo $k = -1$, a odatle $n = 1 \pm \sqrt{2}$.

Dakle, tangente imaju jednačine $y = -x + 1 + \sqrt{2}$ i $y = -x + 1 - \sqrt{2}$.

Napomena: Uslovom $r^2(k^2+1) = (-kp + q - n)^2$ nisu obuhvaćene prave paralelne sa y osom, ali zajedničke tangente ovih kružnica očigledno nisu paralelne sa y osom. Učenik neće gubiti bodove ako ne navede ovu napomenu.

Šema bodovanja:

- Zapisivanje uslova dodira tangente i kružnice: **4 boda**
- predstavljanje jednačine prve kružnice u obliku $(x-1)^2 + y^2 = 1$: **2 boda**
- predstavljanje jednačine druge kružnice u obliku $x^2 + (y-1)^2 = 1$: **2 boda**
- dobijanje jednačine $k^2 + 1 = (k+n)^2$: **2 boda**
- dobijanje jednačine $k^2 + 1 = (1-n)^2$: **2 boda**
- rješavanje sistema i dobijanje rješenja $k = -1$, $c = 1 \pm \sqrt{2}$: **8 bodova**

Rješenje 2: Iz jednačina kružnica napisanih u obliku $(x-1)^2+y^2=1$ i $x^2+(y-1)^2=1$ vidimo da obje kružnice imaju poluprečnik 1, sa centrima u tačkama (1,0) i (0,1) respektivno. Jasno je da se ove kružnice sijeku u tačkama (0,0) i (1,1), pa nemaju unutrašnjih zajedničkih tangenti, već samo imaju vanjske zajedničke tangente. Vanjske zajedničke tangente ovih kružnica su paralelne pravoj koja prolazi kroz centre dvaju kružnica, pa imaju koeficijent pravca $k=-1$. Dakle, jednačine tangenti imaju oblik $y=-x+n$. Uvrštavanjem dobijene jednačine tangente u jednačinu neke od kružnica dobijemo

$$2x^2-2(n+1)x+n^2=0.$$

Da bi naša prava dodirivala kružnicu, dobijena kvadratna jednačina mora imati samo jedno (dvostruko) rješenje, tj. diskriminanta joj mora biti jednaka nuli. Imamo $D=4(n+1)^2-8n^2=0$, odakle dobijamo $n=1\pm\sqrt{2}$.

Dakle, tangente imaju jednačine $y=-x+1+\sqrt{2}$ i $y=-x+1-\sqrt{2}$.

Šema bodovanja:

- predstavljanje jednačine prve kružnice u obliku $(x-1)^2+y^2=1$: **2 boda**
- predstavljanje jednačine druge kružnice u obliku $x^2+(y-1)^2=1$: **2 boda**
- zaključak da je tangenta paralelna pravoj koja prolazi kroz centre dvaju kružnica i dobijanje $m=-1$: **5 bodova**
- dobijanje jednačine $2x^2-2(c+1)x+c^2=0$: **4 boda**
- zaključak da je y tangenta ako jednačina ima $2x^2-2(c+1)x+c^2=0$ ima samo jedno rješenje: **2 boda**
- jednačina $D=4(c+1)^2-8c^2=0$: **3 boda**
- dobijanje $c=1\pm\sqrt{2}$: **2 boda**

Zadatak 2. Neka su α, β, γ unutrašnji uglovi trougla.

a) Dokazati da vrijedi jednakost: $\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

b) Dokazati da vrijedi nejednakost $\frac{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} \leq 1$.

Rješenje 1:

a) Koristeći $\sin x = -\sin(2\pi - x)$ imamo

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2(\alpha+\beta)\\ &= \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\beta\cos 2\alpha\\ &= \sin 2\alpha(1-\cos 2\beta) + \sin 2\beta(1-\cos 2\alpha) =\\ 2\sin 2\alpha\sin^2\beta + 2\sin 2\beta\sin^2\alpha &= 4\sin\alpha\sin\beta\,(\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha)\\ &= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\,. (1)\end{aligned}$$

Koristeći $\sin x = \sin(\pi - x)$ imamo

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$= \sin\alpha(1+\cos\beta) + \sin\beta(1+\cos\alpha) = 2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2} + 2\sin\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.\ (2)$$

Korištenjem $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ (analogno za β i γ), te jednakosti (1) i (2) dobijamo

$$\frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Napomena: Jednakosti (1) i (2) su se mogle dokazati tako što najprije prva dva sabirka pretvorimo u proizvod, a treći sabirak napišemo preko formule za dvostruki ugao.

b) Zbog dokaza pod a), dovoljno je dokazati da vrijedi $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$. Kako je $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) - \sin\frac{\gamma}{2}\right)$, to se početna nejednakost svodi na $4\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) - \sin\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \leq 1$, što se može zapisati kao $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) - 1 \leq \left(2\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\right)^2$. Posljednja nejednakost je očigledno tačna, jer je lijeva strana nepozitivna, dok je desna nenegativna. Ovim je dokaz završen.

Šema bodovanja:

Dio pod a) nosi **12 bodova**, i to:

- izvođenje izraza $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$: **4 boda**
- izvođenje izraza $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$: **4 boda**
- završetak dokaza: **4 boda**

Dio pod b) nosi **8 bodova** (mogu se dobiti parcijalni bodovi u slučaju značajnog progresa)

Rješenje 2: Zadatak ćemo riješiti tako što ćemo se osloboditi uglova i izraziti sve preko stranica trougla.

a) Neka je O centar opisane kružnice oštrouglog trougla ABC. Tada je njegova površina jednaka

$$P = P_{\Delta ABO} + P_{\Delta BCO} + P_{\Delta CAO} = \frac{R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)}{2},$$

pa zbog $P = \frac{abc}{4R}$ dobijamo $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \frac{2P}{R} \cdot \frac{1}{R} = \frac{8P^2}{Rabc}$. (1)

Međutim, ako je npr. ugao α tupi (ili pravi), tada je $P = P_{\Delta ABO} - P_{\Delta BCO} + P_{\Delta CAO}$, ali zbog $\angle AOB = 2(180 - \alpha) = 360 - 2\alpha$ i $\sin x = -\sin(2\pi - x)$ opet dobijamo istu jednakost.

S druge strane, kako je $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, to je $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{a+b+c}{2R}$. (2)

Dalje, iz formule za dvostruki ugao je $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, pa kako je $\frac{\alpha}{2}$ oštri ugao imamo $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}}$.

Primjenjujući ove formule za $\sin\frac{\beta}{2}$ i $\sin\frac{\gamma}{2}$, dobijamo $8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 8\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$. (3)

Sada iz (1), (2) i (3) naša jednakost se svodi na $P^2 = \frac{(a+b+c)}{2} \cdot (s-a)(s-b)(s-c)$, što je ustvari Heronov obrazac. Ovim je dokaz završen.

b) Na osnovu dokaza pod a), dovoljno je dokazati da vrijedi nejednakost

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{abc}{8},$$

tj. $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$. Kako se radi o stranicama trougla, svaka od zagrada je pozitivna, pa iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leq \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2} = b.$$

Slično dobijamo $\sqrt{(a+b-c)(a+c-b)} \leq a$ i $\sqrt{(a+c-b)(b+c-a)} \leq c$, pa množenjem ovih nejednakosti dobijamo traženu nejednakost.

Napomena: Ova nejednakost se lako dokazuje standardnom smjenom za nejednakosti sa stranicama trougla: $x = \frac{b+c-a}{2}, y = \frac{c+a-b}{2}, z = \frac{a+b-c}{2}$ (x, y, z su ustvari dužine odsječaka upisane kružnice). Tada se nejednakost svodi na $8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x)$, što slijedi množenjem nejednakosti $x + y \geq 2\sqrt{xy},\ y + z \geq 2\sqrt{yz}, z + x \geq 2\sqrt{zx}$.

Šema bodovanja:

Dio pod a) nosi **12 bodova**, i to:

- $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \frac{2P}{R} \cdot \frac{1}{R} = \frac{8P^2}{Rabc}$: **4 boda**
- $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{a+b+c}{2R}$: **4 boda**
- $8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 8\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$: **4 boda**
- završetak dokaza: **2 boda**

Dio pod b) nosi **8 bodova,** i to:

- svođenje nejednakosti na stranice trougla: **2 boda**
- dokazivanje nejednakosti: **6 bodova** (učenik gubi jedan bod ako ne napomene da su brojevi $a + b - c, b + c - a, c + a - b$ pozitivni, pri čemu ova napomena nije neophodna ako učenik nejednakost dokazuje uvođenjem smjene)

Zadatak 3. Neka su a i b relativno prosti prirodni brojevi, te neka je p prost broj. Dokazati da vrijedi

$$NZD(ab, a^2 + pb^2) = \begin{cases} 1, ako\ p \nmid a \\ p, ako\ p \mid a \end{cases}$$

Rješenje:

Dokažimo najprije da ne postoji prost broj $q \neq p$ takav da $q|NZD(ab, a^2 + pb^2)$. Pretpostavimo suprotno. Tada $q|ab$, pa q dijeli bar jedan od brojeva a i b. S druge strane, kako su a i b relativno prosti, to q ne može dijeliti oba broja a i b, pa dijeli tačno jedan od njih. Međutim, tada broj $a^2 + pb^2$ nije djeljiv sa q (jer je jedan sabirak djeljiv sa q, dok drugi nije). Ovo je kontradikcija (jer $q|NZD(ab, a^2 + pb^2)$, pa $q|a^2 + pb^2$), što pokazuje da ne postoji prost broj $q \neq p$ takav da $q|NZD(ab, a^2 + pb^2)$.

Ako $p \nmid a$, tada broj $a^2 + pb^2$ nije djeljiv sa p, pa ne postoji niti jedan prost broj koji dijeli oba broja ab i $a^2 + pb^2$, što znači da je $NZD(ab, a^2 + pb^2) = 1$.

S druge strane, ako $p|a$, tada $p \nmid b$, pa broj $a^2 + pb^2$ jeste djeljiv sa p, ali nije sa p^2 (jer je broj a^2 djeljiv sa p^2, dok pb^2 nije). Kako je broj ab također djeljiv sa p, to je $NZD(ab, a^2 + pb^2) = p$.

Ovim je dokaz završen.

Šema bodovanja:

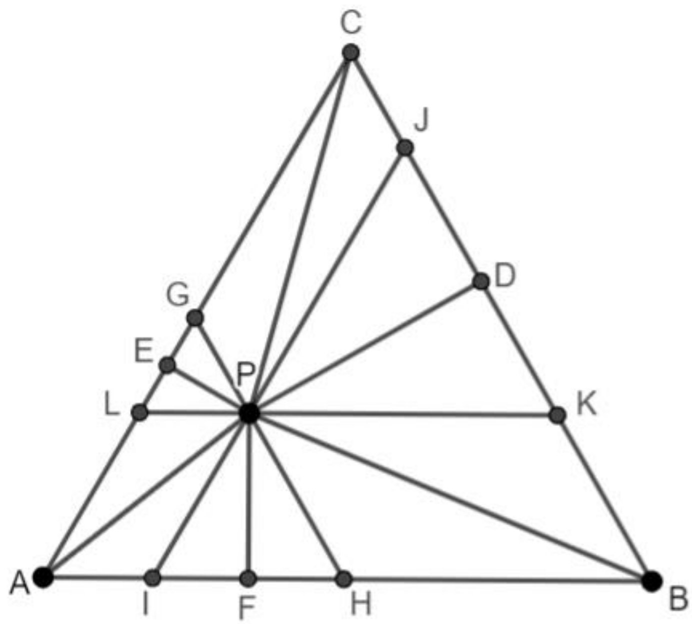
- dokaz da ne postoji prost broj $q \neq p$ koji dijeli oba broja ab i $a^2 + pb^2$: **9 bodova** (ukoliko učenik ovo dokaže u jednom slučaju, a nije svjestan da to vrijedi i u drugom, dobija 7 od ovih 9 bodova)
- dokaz za slučaj $p \nmid a$: **3 boda**
- dokaz za slučaj $p|a$: **8 bodova**

Zadatak 4. Neka je ABC jednakostranični trougao, te neka je P tačka u njegovoj unutrašnjosti. Dalje, neka su D, E, F podnožja normala iz tačke P na stranice BC, CA, AB, redom. Dokazati:

a) $AF + BD + CE = AE + BF + CD$.

b) $P_{\Delta APF} + P_{\Delta BPD} + P_{\Delta CPE} = P_{\Delta APE} + P_{\Delta BPF} + P_{\Delta CPD}$.

Rješenje 1: Neka prava kroz P paralelna sa BC siječe AC i AB u G i H, redom, prava kroz P paralelna sa AC siječe AB i BC u I i J, redom, te prava kroz P paralelna sa AB siječe BC i AC u K i L, redom. Jasno je da su trouglovi IHP, PKJ, LPG jednakostranični (imaju sve uglove po $60°$), kao i da su četverouglovi $HBPK, JCGP, AIPL$ paralelogrami. Također, kako je PF visina jednakokstraničnog trougla IHP, pa je $IF = FH$. Analogno je $KD = DJ$ i $GE = EL$.



a) Na osnovu svega rečenog imamo $AF - BF + BD - CD + CE - AE = AI - BH + BK - CJ + CG - AL = PL - KP + PH - GP + JP - PI = 0, q.e.d.$

b) Kako su trouglovi IFP i PHF podudarni, to je $P_{\Delta AFP} - P_{\Delta BFP} = P_{\Delta API} - P_{\Delta BHP}$. Analogno je $P_{\Delta BPD} - P_{\Delta CPD} = P_{\Delta BPK} - P_{\Delta CPJ}$ i $P_{\Delta CPE} - P_{\Delta APE} = P_{\Delta CPG} - P_{\Delta APL}$. Međutim, trouglovi API i APL su očigledno podudarni, kao i trouglovi BHP i BKP, odnosno CJP i CGP. Zbog toga se sabiranjem prethodnih jednakosti dobija tražena.

Šema bodovanja:

- Povlačenje paralelnih pravih i uočavanje jednakostraničnih trouglova: **4 boda**
- Zaključak $IF = FH$ (i analogni zaključci): **3 boda**
- Uočavanje paralelograma: **2 boda**
- Završetak dokaza pod a): **3 boda**
- Završetak dokaza pod b): **8 bodova**

Rješenje 2: **Lema:** Neka je dat trougao ABC sa dužinama stranica a, b, c i visinom AT. Vrijedi:

$$BT = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}, CT = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, BT - CT = \frac{c^2 - b^2}{a}.$$

Dokaz:

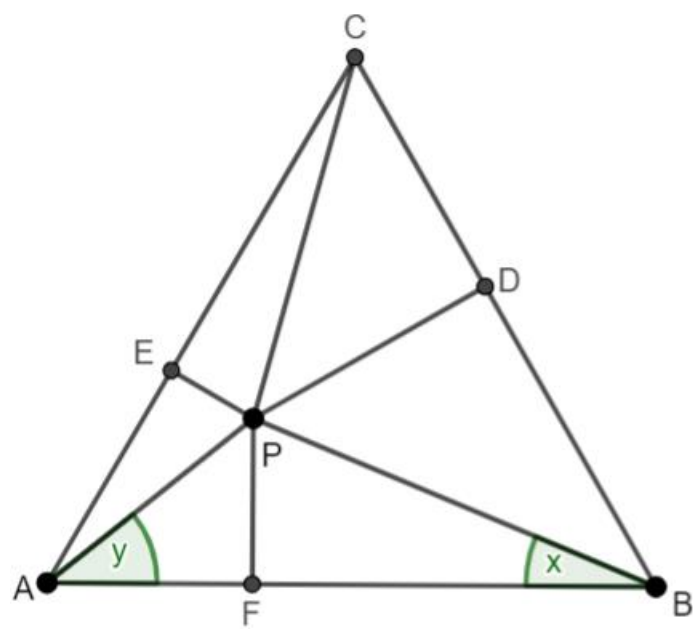
Iz pravouglog trougla ABT imamo $BT = AB\cos\beta = c \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$. Analogno se dobije $CT = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$, pa je $BT - CT = \frac{c^2-b^2}{a}$. Ovim je lema dokazana.

a) Označimo dužinu stranice jednakostraničnog trougla sa a. Primjenom navedene leme dobijamo $AF - BF = \frac{AP^2-BP^2}{a}, BD - CD = \frac{BP^2-CP^2}{a}, CE - AE = \frac{CP^2-AP^2}{2}$. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo $AF + BD + CE = AE + BF + CD, q.e.d.$

Napomena: Ista stvar se mogla dobiti i bez leme, primjenom Pitagorine teoreme. Naime, iz $BP^2 - AP^2 = BF^2 + FP^2 - AF^2 - FP^2 = (BF - AF)\cdot(BF + AF) = (BF - AF)\cdot a$ dobijamo $AF - BF = \frac{AP^2-BP^2}{a}$, te završavamo na isti način.

b) Neka je $\angle ABP = x$ i $\angle BAP = y$. Dovoljno je dokazati da vrijedi

$$2(P_{\Delta APF} + P_{\Delta BPD} + P_{\Delta CPE}) = P_{\Delta ABC}. \ (*)$$



Imamo da je $2P_{\Delta APF} = AF \cdot PF = AP\cos y \cdot AP\sin y = \frac{AP^2 \sin 2y}{2}$, te slično $2P_{\Delta BPD} = \frac{BP^2\sin(120°-2x)}{2}$ i $2P_{\Delta CPE} = 2(P_{\Delta CPA} - P_{\Delta APE}) = a \cdot EP - \frac{AP^2\sin(120°-2y)}{2} = a \cdot AP \cdot \sin(60° - y) - \frac{AP^2\sin(120°-2y)}{2}$. Kako je $\frac{AP^2\sin 2y}{2} - \frac{AP^2\sin(120°-2y)}{2} = AP^2 \cdot \sin(2y - 60°)\cos 60° = AP^2 \cdot \frac{\sin(2y-60°)}{2}$, jednakost $(*)$ se nakon dijeljenja sa a^2 svodi na:

$$\frac{AP^2}{a^2} \cdot \frac{\sin(2y - 60°)}{2} + \frac{BP^2}{a^2} \cdot \frac{\sin(120° - 2x)}{2} + \frac{AP}{a} \cdot \sin(60° - y) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Međutim, iz sinusne teoreme za trougao ABP vrijedi $\frac{AP}{\sin x} = \frac{BP}{\sin y} = \frac{a}{\sin(x+y)}$, pa se prethodna jednakost (nakon množenja sa $\sin^2(x+y)$ svodi na:

$$\frac{\sin^2 x \sin(2y - 60°)}{2} + \frac{\sin^2 y \sin(120° - 2x)}{2} + \sin x \sin(x+y) \sin(60° - y) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sin^2(x+y).$$

Kako je $\sin(60° - y) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y - \frac{1}{2}\sin y$, nakon prebacivanja člana $\sin x \sin(x + y) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y$ na desnu stranu, ona postaje

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\sin(x+y)\left(\sin(x+y) - 2\sin x \cos y\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin(x+y)\sin(y-x).$$

Na lijevoj strani je ostalo

$$\frac{\sin^2 x \sin(2y - 60°)}{2} + \frac{\sin^2 y \sin(120° - 2x)}{2} - \sin x \sin(x+y) \cdot \frac{1}{2}\sin y.$$

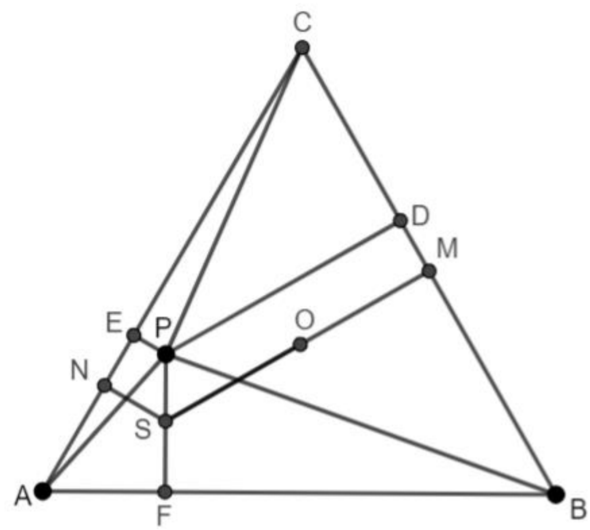
Međutim, kako je $\sin(2y - 60°) = \sin 2y \cos 60° - \cos 2y \sin 60° = \sin y \cos y - (\cos^2 y - \sin^2 y) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, a slično i $\sin(120° - 2x) = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x \ \cos x$. Primijetimo sada da $\frac{\sin^2 x \sin y \cos y}{2} + \frac{\sin^2 y \sin x \cos x}{2}$ daje $\sin x \sin(x + y) \cdot \frac{1}{2}\sin y$, pa nakon poništavanja na lijevoj strani ostaje $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sin^2 x\,(\sin^2 y - \cos^2 y) + \sin^2 y\,(\cos^2 x - \sin^2 x)\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sin y \cos x - \sin x \cos y)(\sin y \cos x + \sin x \cos y) = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin(x+y)\sin(y-x)$. Ovim je dokaz završen.

Šema bodovanja:

Dio pod a) nosi **7 bodova**, a dio pod b) **13 bodova**. S obzirom da je riječ o čisto računskom rješenju, teško je "izvagati" korake. Međutim, u dijelu pod a) **4 boda** se dobija za izračunavanje bilo koje od duži iz zadatka (u obliku koji nam može pomoći da završimo dokaz). U dijelu pod b), **5 bodova** se dobija ako se zadatak svede samo na uglove x i y (ili neke druge dvije nezavisne veličine).

Rješenje 3: Primijetimo da obje tvrdnje vrijede ako je tačka P centar trougla. Jasno je da ako pomjeramo tačku P po pravima koje su paralelne visinama trougla, u najviše dva koraka možemo postići da P bude centar trougla. Dokazat ćemo da takva pomjeranja ne mijenjaju razliku lijeve i desne strane (u oba dijela zadatka).

a) Neka je O centar trougla, te neka je S tačka na pravoj PF takva da je $OS||PD$. Sa M i N označimo podnožja normala iz S na BC i CA, redom. Primijetimo da ako P pomjerimo u S, razlika $AF-BF$ nam se ne mijenja. S druge strane razlika $BD-CD$ postane $BM-CM$, dakle, smanji se (na našoj slici) za $2\cdot DM$, dok razlika $CE-AE$ postaje $CN-NA$, dakle, poveća se za $2\cdot NE$. Međutim, duži DM i NE su projekcije duži PS na stranice trougla, a kako prava PS gradi isti ugao sa pravim AC i BC $(30°)$, to su te projekcije jednake. Dakle, razlika lijeve i desne strane se ne mijenja kada P pomjerimo u S. Analogno se ta razlika ne mijenja kada S pomjerimo u O, pa kako je tvrdnja zadovoljena za O, zadovoljena je i za P.

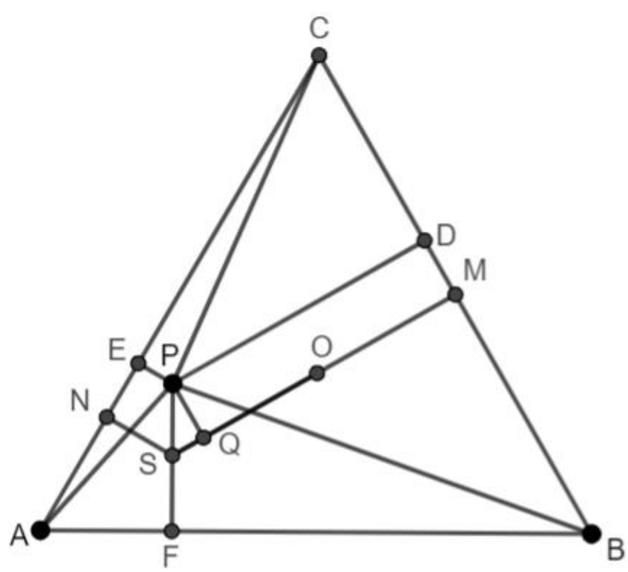


b) Primijetimo da pomjeranjem P u S razlika $P_{\Delta APF}-P_{\Delta BPF}$ postaje $P_{\Delta ASF}-P_{\Delta BSF}$, tj. umjesto $PF\cdot\frac{AF-BF}{2}$ imamo $SF\cdot\frac{AF-BF}{2}$, pa je razlika nove i stare razlike $PS\cdot\frac{BF-AF}{2}$. Neka je Q projekcija P na SM. Tada je $2P_{\Delta BSM}-2P_{\Delta CSM}=SM(BM-CM)=(MQ+QS)(BD-DC-2DM)=MQ\cdot(BD-DC)+QS\cdot(BD-CD)-2(MQ+QS)\cdot DM=DP\cdot(BD-DC)+PS\sin 30°\cdot(BD-CD)-2(PD+PS\sin 30°)\cdot DM=2P_{\Delta BPD}-2P_{\Delta CPD}+\frac{PS(BD-CD)}{2}-2PD\cdot DM-PS\cdot DM.$ Dakle, razlika površina se promijeni za $\frac{\frac{PS(BD-CD)}{2}-2PD\cdot DM-PS\cdot DM}{2}$. Slično, kod trećeg para trouglova razlika površina se primijeni za $\frac{\frac{PS(CE-AE)}{2}\mp 2PE\cdot NE+PS\cdot NE}{2}$. Kako je $DM=NE$ (tj. $PS\cdot DM=PS\cdot NE$), dovoljno je dokazati da vrijedi

$$PS(BF-AF)+\frac{PS(BD-CD)}{2}-2PD\cdot DM+\frac{PS(CE-AE)}{2}\mp 2PE\cdot NE=0.$$

Kako je $DM=NE=PS\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, prethodna jednakost se svodi na

$$BF-AF+\frac{BD-CD}{2}+\frac{CE-AE}{2}+\sqrt{3}(PE-PD)=0.$$

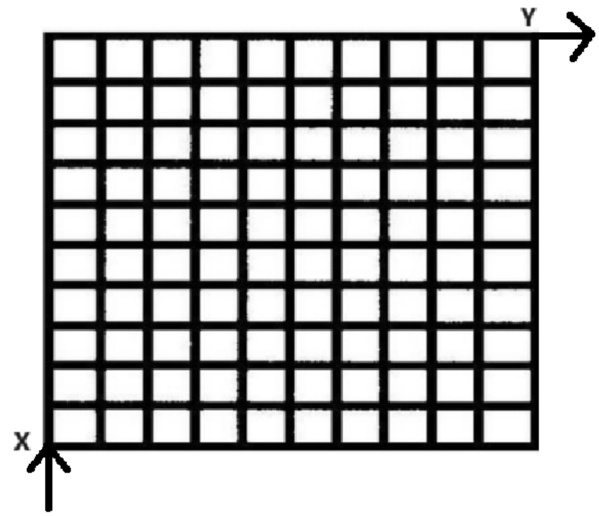


Iz dijela pod a) je $\frac{BD-CD}{2}+\frac{CE-AE}{2}=\frac{BF-AF}{2}$, pa je dovoljno dokazati da vrijedi $\frac{3}{2}(BF-AF)=\sqrt{3}(PD-PE)$, tj. $PD-PE=\frac{\sqrt{3}}{2}(BF-AF)$. Međutim, razlika udaljenosti tačke P od stranica BC i AC se ne mijenja kako se tačka P kreće po pravoj PF (npr. $SM-SN=PD+PS\sin 30°-PE-PS\sin 30°$). U tački F je razlika tih udaljenosti jednaka $BF\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-AF\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, pa je $PD-PE=\frac{\sqrt{3}}{2}(BF-AF), q.e.d.$

Šema bodovanja:

Dio pod a) nosi **7 bodova**, a dio pod b) **13 bodova**. U oba dijela sama ideja pomjeranja tačke P po pravim koje su paralelne visinama trougla (uz posmatranje razlike lijeve i desne strane) nosi **3 boda**.

Zadatak 5. Data je mreža 2024×2024 (na slici je prikazana mreža 10×10). Donji lijevi vrh je X, a gornji desni Y. Puž dolazi odozdo u vrh X, te želi da izađe iz mreže u vrhu Y i to tako što će iz njega otići desno (slika). Puž se može kretati samo ivicama mreže, te se uvijek kreće gore i desno. U bilo kojem vrhu mreže on može promijeniti smjer kretanja (iz desno u gore ili obratno), ali nakon što u nekom vrhu promijeni smjer, ne može odmah u narednom vrhu u kojem se nađe opet promijeniti smjer. Na koliko načina puž može na željeni način izaći iz mreže tako da napravi tačno 777 promjena smjera? Pri tome, prvu promjenu smjera može (ali ne mora) napraviti odmah u vrhu X, a posljednju promjenu može napraviti u vrhu Y (tj. napravit će je ukoliko u Y dolazi odozdo, a neće ukoliko u Y dolazi s lijeva).



Rješenje 1: Primijetimo da puž najprije ide gore nekoliko (moguće i 0) koraka, zatim desno bar 2 koraka, zatim gore bar 2 koraka, zatim desno bar 2 koraka..., sve do kraja kada će ići desno (moguće i 0 koraka). Također, jasno je da će po 389 puta ići gore i desno (pri čemu prvi put gore i posljedni put desno mogu biti koraci 0. Dakle, validan put je opisan nizom $g_1, d_1, g_2, d_2, g_3, d_3, \dots, g_{389}, d_{389}$, pri čemu je $g_1 \geq 0$, $g_i \geq 2$ za $i \geq 2$, $d_{389} \geq 0$, $d_i \geq 2$ za $i \leq 388$, pri čemu je $g_1 + g_2 + \cdots + g_{339} = 2024$ i $d_1 + d_2 + \cdots + d_{339} = 2024$. Uvedimo smjenu $g_1 = y_1, g_i = y_i + 2$ za $i = 2,3, \dots ,389$, te slično $d_{389} = x_{389}$ i $d_i = x_i + 2$ za $i = 1,2, \dots ,388$. Tada imamo uslov $x_i \geq 0$ i $y_i \geq 0$ za sve i, te

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{389} = 1248,$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{389} = 1248.$$

Poznato je da svaka od ovih jednačina ima $\binom{1248+389-1}{389-1} = \binom{1636}{388}$ rješenja (naime, možemo gledati kao da imamo 1248 jedinica, te treba postaviti 388 pregrada koje će razdvojiti/odrediti varijable, tj. ukupno treba postaviti $1248 + 388 = 1636$ znakova, te je samo potrebno odrediti koji od tih znakova će biti jedinice, a koji prograde, što možemo na $\binom{1636}{388}$ načina). Zbog toga je ukupan broj načina jednak $\binom{1636}{388}^2$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da validnu putanju određuje odgovarajući niz brojeva $g_1, d_1, g_2, d_2, g_3, d_3, \dots, g_{389}, d_{389}$ (uz postavljene uslove za varijable): **6 bodova**
- Svođenje zadatka na prebrojavanje broja rješenja jednačina $x_1 + x_2 + \cdots + x_{389} = 1248$ i $y_1 + y_2 + \cdots + y_{389} = 1248$: **6 bodova**
- Ispravno prebrojavanje broja načina: **8 bodova**

Rješenje 2: Jasno je da imamo 2025 horizontalnih i vertikalnih linija (tj. linija u kojima se dešavaju promjene smjerova). Numerišimo horizontalne linije $1,2,\dots,2025$ odozdo prema gore, a vertikalne $1,2,\dots,2025$ s lijeva prema desno. Primijetimo da će prva promjena smjera biti prema desno, pa naredna prema gore, i tako naizmjenično, te će posljednja $777.$ promjena biti u desno, i desit će se na posljednjoj $2025.$ liniji (zbog čega se ne smije desiti na $2024.$ liniji). Dakle, 388 promjena smjera na desno (ne računajući zadnji) se mora desiti na prve 2023 linije, pri čemu se ne smije desiti na dvije uzastopne linije (jer bi to značilo da smo imali dvije uzastopne promjene smjera). Slično, kako se promjena na gore ne može desiti u prve dvije vertikalne linije, to će se tih 388 promjena desiti na posljednje 2023 linije, pri čemu se opet ne smiju desiti promjene na dvije uzastopne vertikalne linije. S druge strane, odabir 388 horizontalnih linija od prve 2023 i 388 vertikalnih linija od posljednje 2023, uz uslov da se ni u jednom ni u drugom slučaju ne smiju odabrati uzastopne linije, jednoznačno određuje jednu validnu putanju.

Prebrojimo na koliko načina možemo odabrati horizontalne linije (na isto možemo i vertikalne). Traženi odabir možemo posmatrati kao da imamo 2024 mjesta, te ih treba popuniti sa stringovima $'0'$ ili sa stringovima $'10'$, pri čemu postavljamo 1248 stringa $'0'$ i 388 stringova $'10'$. To možemo uraditi na $\binom{1248+388}{388} = \binom{1636}{388}$. Zbog toga je traženi broj načina jednak $\binom{1636}{388}^2$ (jer isti broj načina imamo i za vertikalne linije).

Šema bodovanja:

- Zaključak da validnu putanju određuje dvostruki odabir 388 brojeva od 2023 broja, pri čemu nikoja dva odabrana broja nisu susjedna: **10 bodova**
- Ispravno prebrojavanje broja načina: **10 bodova**

Kanton Sarajevo
RJEŠENJA ZADATAKA I ŠEME BODOVANJA ZA KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
12. marta/ožujka 2024.

IV razred

Zadatak 1. Neka je a_1, a_2, a_3 ... beskonačan aritmetički niz realnih brojeva.

a) Ako postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $\frac{a_{2m}}{a_{2n}} = -1$, dokazati da niz sadrži cijeli broj.

b) Navesti primjer niza koji ne sadrži niti jedan racionalan broj, a za koji postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $\frac{a_m}{a_n} = -1$.

Rješenje.

a) Označimo sa d razliku dva uzastopna člana niza. Tada za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, pa imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{2m}}{a_{2n}} = -1 \Leftrightarrow \\
&a_{2m} = -a_{2n} \Leftrightarrow \\
&a_{2m} + a_{2n} = 0 \Leftrightarrow \\
&a_1 + (2m-1) \cdot d + a_1 + (2n-1) \cdot d = 0 \Leftrightarrow \\
&2a_1 + (2m + 2n - 2) \cdot d = 0 \Leftrightarrow \\
&a_1 + (m + n - 1) \cdot d = 0.
\end{aligned}$$

Kako je $a_1 + (m + n - 1) \cdot d = a_{m+n}$, zaključujemo $a_{m+n} = 0$, pa je član niza s indeksom $m + n$ cijeli broj.

b) Posmatrajmo aritmetički niz dat sa $a_1 = -\sqrt{2}$ i $d = 2\sqrt{2}$, gdje je d razlika dva uzastopna člana niza. Opšti član ovog niza je $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -\sqrt{2} + (n-1) \cdot 2\sqrt{2} = (2n-3)\sqrt{2}$, što očigledno nije racionalan broj niti za jedan prirodan broj n. S druge strane, vrijedi $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$, pa je ovo primjer niza s traženim osobinama.

Šema bodovanja

Dio a)

- Izražavanje opšteg člana niza preko jednog člana i zajedničke razlike: **1 bod**
- Izražavanje uslova $\frac{a_{2m}}{a_{2n}} = -1$ preko jednog člana i zajedničke razlike: **2 boda**
- Dobivanje relacije ekvivalentne relaciji $a_1 + (m + n - 1) \cdot d = 0$: **4 boda**
- Zaključak da postoji član niza jednak 0: **6 bodova**

Dio b)

- Navođenje korektnog primjera niza: **5 bodova**
- Dokaz da navedeni niz ne sadrži racionalan broj: **1 bod**
- Dokaz da postoje indeksi m i n s traženom osobinom: **1 bod**

Zadatak 2. Data je ploča dimenzije 8×8. Za skup polja ploče kažemo da je *lijepo raspoređen* ako nikoja dva polja nisu u istom redu niti u istoj koloni.

a) Na koliko načina je moguće odabrati skup od 8 lijepo raspoređenih polja?
b) Ukoliko se sa ploče uklone gornje lijevo i donje desno polje, na koliko načina je moguće od preostala 62 polja odabrati skup od 8 lijepo raspoređenih?
c) U polja ploče upisani su brojevi $5, 10, 15, 20, \dots 320$ u rastućem poretku slijeva nadesno i odozgo prema dole (tj. u prvom redu su redom brojevi $5, 10, 15, \dots, 40$, u drugom redu redom brojevi $45, 50, 55, \dots, 80$ itd.). Odrediti sve vrijednosti koje može uzeti suma brojeva na skupu od 8 lijepo raspoređenih polja.

Rješenje.

a) Kako imamo 8 redova i 8 kolona, te 8 lijepo raspoređenih polja, svaki red i svaka kolona mora sadržavati tačno jedno polje. Polje u prvom redu možemo odabrati na 8 načina. U koloni odabranog polja ne smije biti više odabranih polja, pa polje u drugom redu možemo odabrati na 7 načina (dozvoljena su sva polja osim onog u koloni odabranog polja prvog reda). U kolonama prva dva odabrana polja ne smije biti više odabranih polja, pa u trećem redu postoji 6 polja koja možemo odabrati, odnosno polje u trećem redu možemo odabrati na 6 načina. Nastavljajući ovako dobijamo da polje u redovima $4, 5, 6, 7, 8$ možemo odabrati na $5, 4, 3, 2, 1$ načina, respektivno. Dakle, ukupan broj načina je $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$.

b) U dijelu a) dokazano je da, ukoliko nema uklonjenih polja, broj načina za odabir 8 lijepo raspoređenih polja je 8!. Od ovog broja je potrebno oduzeti broj skupova lijepo raspoređenih polja koji sadrže barem jedno od uklonjenih polja.
Izbrojimo skupove koji sadrže gornje lijevo polje. U prvom redu nemamo izbora – određeno je da moramo odabrati prvo polje reda (jer je to gornje lijevo polje). Na isti način kao u dijelu a) zaključujemo da u drugom redu polje možemo odabrati na 7 načina, polje u trećem redu na 6 načina itd., te da je ukupni broj lijepo raspoređenih skupova koji sadrže gornje lijevo polje jednak 7!.
Analogno dobijamo da je broj lijepo raspoređenih skupova koji sadrže donje desno polje također jednak 7!.
Iz prethodnog dobijamo da je broj lijepo raspoređenih skupova koji sadrže gornje lijevo ili donje desno polje jednak $2 \cdot 7!$. Međutim, ukoliko skup sadrži oba polja, ovdje je uračunat dva puta – jednom kao skup koji sadrži gornje lijevo polje i jednom kao skup koji sadrži donje desno polje. Zbog toga je potrebno od broja $2 \cdot 7!$ oduzeti broj skupova lijepo raspoređenih polja koji sadrže i gornje lijevo i donje desno polje. Kako su odabiri polja u prvom i posljednjem redu određeni, u redovima $2, 3, 4, 5, 6, 7$ polje možemo odabrati na $6, 5, 4, 3, 2, 1$ načina, respektivno, što znači da je broj ovakvih skupova jednak 6!.
Zaključujemo, traženi broj skupova je $8! - (2 \cdot 7! - 6!) = 8! - 2 \cdot 7! + 6!$.

c) Označimo sa (i, j) polje u presjeku reda i i kolone j, pri čemu su redovi numerisani sa $1, 2, \dots, 8$ odozgo prema dole, a kolone sa $1, 2, \dots, 8$ slijeva nadesno. Susjedni brojevi u istom redu se razlikuju za 5, a susjedni brojevi u istoj koloni za 40. To znači da se u polju (i, j) nalazi broj $5 \cdot i + 40 \cdot (j - 1)$.

Za bilo koji skup od 8 lijepo raspoređenih polja, svaki od redova $1, 2, \dots, 8$ sadrži tačno jedno polje, i svaka od kolona $1, 2, \dots, 8$ sadrži tačno jedno polje. Zato se u sumi brojeva na lijepo raspoređenom skupu javlja sabirak $5 \cdot i$ za svaki red $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ i sabirak $40 \cdot (j-1)$ za svaku kolonu $j \in \{1, 2, \dots 8\}$. Slijedi da je ova suma jednaka $5 \cdot (1 + 2 + \cdots + 8) + 40 \cdot (0 + 1 + \cdots + 7) = 1300$.

Šema bodovanja

Dio a)

- Zaključak da svaki red i svaka kolona sadrže tačno jedno polje: **1 bod**
- Posmatranje broja načina za odabir polja po redovima/kolonama: **1 bod**
- Dobivanje tačnog rezultata: **2 boda**

Dio b)

- Ideja oduzimanja broja skupova koji sadrže ili gornje lijevo ili donje desno polje od ukupnog broja lijepo raspoređenih skupova: **2 boda**
- Određivanje broja lijepo raspoređenih skupova koji sadrže gornje lijevo (ili donje desno) polje: **2 boda**
- Određivanje broja lijepo raspoređenih skupova koji sadrže i gornje lijevo i donje desno polje: **2 boda**
- Dobivanje tačnog rezultata: **2 boda**

Dio c)

- Određivanje oblika broja u polju (i, j): **2 boda**
- Zaključak da sa u sumi za svaki red i javlja sabirak $5 \cdot i$, ili analogan zaključak za kolone: **2 boda**
- Dobivanje tačnog rezultata: **4 boda**

Zadatak 3. Odrediti sve parove (a, b) cijelih brojeva za koje vrijedi

$$(8a - b)^2 = 2 \cdot (a - 2) \cdot b^2.$$

Rješenje.

Ako je jedna nepoznata jednaka 0, direktnim uvrštavanjem dobijamo da je i druga jednaka 0. Dakle, jedno rješenje je $(a, b) = (0, 0)$. U nastavku rješenja se pretpostavlja da je $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

Da bi početna jednačina imala rješenje u skupu cijelih brojeva, desna strana treba biti potpun kvadrat nekog cijelog broja (jer je i lijeva). Uzimajući u obzir članove koji se nalaze na desnoj strani, to znači da vrijedi $a - 2 = 2k^2$ za cio broj k. Dakle, $a = 2k^2 + 2$ $(*)$ što se sada uvrštava u početnu jednačinu.

$$[8(2k^2 + 2) - b]^2 = 2 \cdot (2k^2 + 2 - 2) \cdot b^2$$

$$(16k^2 + 16 - b)^2 = 4k^2b^2$$

$$16k^2 + 16 - b = \pm 2kb \ (**)$$

Iz posljednje relacije se dobiva $b = \frac{16(k^2+1)}{1 \pm 2k}$. Da bi nepoznata b bila cjelobrojna vrijednost, treba vrijediti $1 + 2k | k^2 + 1$ ili $1 - 2k | k^2 + 1$.

Ako $1 + 2k | k^2 + 1$, imamo

$$2k + 1 \mid k^2 + 1 - (2k + 1)$$

$$2k + 1 \mid k^2 - 2k$$

$$2k + 1 \mid k(k - 2)$$
$$2k + 1 \mid k - 2$$
$$2k + 1 \mid 2(k - 2) - 2k - 1$$
$$2k + 1 \mid -5$$

(u prelazu iz trećeg u četvrti red je korišteno da su brojevi k i $2k + 1$ relativno prosti). Dakle, $2k + 1 \in \{-5, -1, 1, 5\}$, odnosno $k = \{-3, -1, 0, 2\}$.

Ako $1 - 2k|k^2 + 1$, imamo

$$1 - 2k \mid k^2 + 1 - (1 - 2k)$$
$$1 - 2k \mid k^2 + 2k$$
$$1 - 2k \mid k(k + 2)$$
$$1 - 2k \mid k + 2$$
$$1 - 2k \mid 2(k + 2) + 1 - 2k$$
$$1 - 2k \mid 5$$

(u prelazu iz trećeg u četvrti red je korišteno da su brojevi k i $1 - 2k$ relativno prosti). Dakle, $1 - 2k \in \{-5, -1, 1, 5\}$, odnosno $k = \{-2, 0, 1, 3\}$.

Uvrštavanjem redom vrijednosti k u relacije $(*)$ i $(**)$, dobivaju se sljedeći uređeni parovi kao potencijalna cjelobrojna rješenja jednačine: $(a, b) \in \{(2,16), (4, -32), (10,16), (20, -32)\}$. Direktnom provjerom se pokazuje da su oni stvarno rješenja iste.

Dakle, sva rješenja su $(a, b) \in \{(0, 0), (2, 16), (4, -32), (10, 16), (20, -32)\}$.

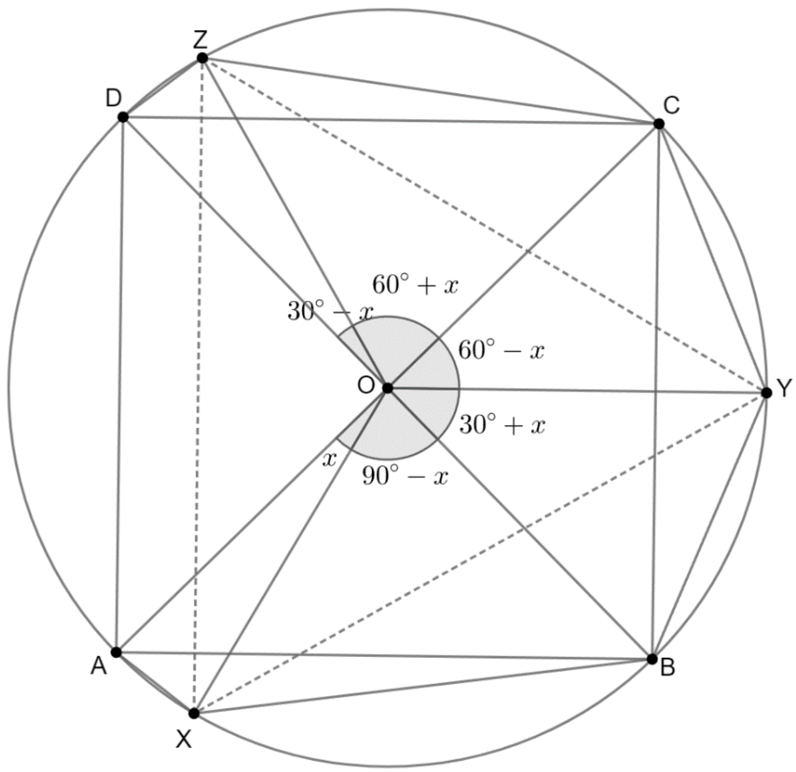
Šema bodovanja

- Zaključak da su ili obje nepoznate jednake 0 ili obje različite od 0: **1 bod**
- Zaključak da je $a - 2$ oblika $2k^2$ za $k \in \mathbb{Z}$ (pod uslovom $a \neq 0$ i $b \neq 0$): **3 boda**
- Izražavanje b preko k: **4 boda**
- Zaključak da $1 + 2k|k^2 + 1$ ili $1 - 2k|k^2 + 1$: **2 boda**
- Rješavanje jednog od slučajeva $1 + 2k|k^2 + 1$ i $1 - 2k|k^2 + 1$: **5 bodova**
- Rješavanje preostalog slučaja iz prethodne tačke: **1 bod**
- Dobivanje svih rješenja: **4 boda**

Zadatak 4. U kružnicu poluprečnika 1 upisan je kvadrat $ABCD$ i jednakostranični trougao XYZ, pri čemu je dozvoljeno da se tjemena kvadrata i trougla podudaraju. Koja je najveća površina koju može imati mnogougao čija su tjemena tačke A, B, C, D, X, Y, Z (ovaj mnogougao može imati manje od 7 tjemena ako se neke tačke podudaraju)?

Rješenje.

Kako je centralni ugao nad stranicom kvadrata 90°, a centralni ugao nad stranicom trougla 120°, zaključujemo da svaki od kraćih lukova AB, BC, CD, DA sadrži najviše jedno tjeme trougla. Bez gubitka opštosti pretpostavimo da je poredak tačaka na kružnici A, X, B, Y, C, Z, D. Označimo sa O centar kružnice, i označimo $\angle AOX = x$.



Iz prethodno navedenih centralnih uglova imamo $\angle XOB = 90° - \angle AOX = 90° - x$, $\angle BOY = 120° - \angle XOB = 30° + x$, $\angle YOC = 90° - \angle BOY = 60° - x$, $\angle COZ = 120° - \angle YOC = 60° + x$ i $\angle ZOD = 90° - \angle COZ = 30° - x$. Također vrijedi

$$P_{AXBYCZD} = P_{AOX} + P_{XOB} + P_{BOY} + P_{YOC} + P_{COZ} + P_{ZOD} + P_{DOA},$$

gdje sa $P_{\mathcal{M}}$ označavamo površinu mnogougla $\mathcal{M}$. Imamo $P_{AOX} = \frac{OA \cdot OX \cdot \sin \angle AOX}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$, pa primjenjujući istu formulu za ostale trouglove dobijamo

$$P_{AXBYCZD} = \frac{1}{2}(\sin x + \sin(90° - x) + \sin(30° + x) + \sin(60° - x) + \sin(60° + x) + \sin(30° - x) + \sin 90°) = \frac{1}{2}\mathcal{A} + \frac{1}{2},$$

gdje smo označili $\mathcal{A} = \sin x + \sin(90° - x) + \sin(30° + x) + \sin(60° - x) + \sin(60° + x) + \sin(30° - x)$.

Primjenjujući identitet $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ dobijamo

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \sin x + \sin(90° - x) + \sin(30° + x) + \sin(60° - x) + \sin(60° + x) + \sin(30° - x) = \\ &2 \sin 45° \cos(x - 45°) + 2 \sin 45° \cos(x - 15°) + 2 \sin 45° \cos(x + 15°) = \\ &2 \sin 45° \left(\cos(x - 45°) + \cos(x - 15°) + \cos(x + 15°)\right).\end{aligned}$$

Kako je $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, i kako vrijedi identitet $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$, to je

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \sqrt{2} \cdot (\cos(x - 15°) + 2\cos(x - 15°) \cos 30°) = \\ &\sqrt{2}(2\cos 30° + 1) \cdot \cos(x - 15°) = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot \cos(x - 15°).\end{aligned}$$

Kako je $x \in [0, 90°]$, prethodni izraz dostiže maksimum za $x = 15°$, i tada je $\mathcal{A} = \sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)$. Dakle, maksimalna površina iznosi $\frac{1}{2}\mathcal{A} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)+1}{2}$.

Šema bodovanja

- Zaključak da između dva susjedna tjemena kvadrata na kružnici može biti najviše jedno tjeme trougla: **1 bod**
- Izražavanje svih centralnih uglova nad stranicama mnogougla preko jednog ugla: **3 boda**
- Izražavanje površine mnogougla kao sume trigonometrijskih funkcija iste promjenljive: **3 boda**
- Svođenje izraza za površinu na sumu tri trigonometrijske funkcije: **4 boda**
- Svođenje izraza za površinu na jednu trigonometrijsku funkciju jedne promjenljive: **4 boda**
- Određivanje međusobnog položaja kvadrata i trougla za koji je površina maksimalna: **3 boda**
- Određivanje maksimalne površine: **2 boda**

Zadatak 5. Odrediti sve funkcije $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takve da je $f(1) > 0$ i da za sve $x, y \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$f(x^2+3y^2) = \big(f(x)\big)^2 + 3\big(f(y)\big)^2.$$

Napomena: $\mathbb{N}_0$ označava skup nenegativnih cijelih brojeva.

Rješenje.

Označimo sa $P(x,y)$ iskaz $f(x^2+3y^2) = \big(f(x)\big)^2 + 3\big(f(y)\big)^2$.

Iz $P(0,0)$ imamo $f(0) = 4\big(f(0)\big)^2$, pa je $f(0) = 0$.

Iz $P(1,0)$ imamo $f(1) = \big(f(1)\big)^2$, a kako je $f(1) > 0$, to je $f(1) = 1$.

Iz $P(0,1)$ dobijamo $f(3) = 3$, a iz $P(1,1)$ dobijamo $f(4) = 4$. Konačno, iz $P(2,0)$ dobijamo $f(4) = \big(f(2)\big)^2$, odakle slijedi $f(2) = 2$.

Lako se provjerava da vrijedi $(3n-1)^2 + 3(n+1)^2 = (3n+1)^2 + (n-1)^2$, pa imamo

$$\begin{aligned}
&f((3n-1)^2+3(n+1)^2) = f((3n+1)^2+(n-1)^2) \Rightarrow \\
&\big(f(|3n-1|)\big)^2 + 3\big(f(n+1)\big)^2 = \big(f(3n+1)\big)^2 + 3\big(f(|n-1|)\big)^2 \Leftrightarrow \\
&\big(f(3n+1)\big)^2 = \big(f(|3n-1|)\big)^2 + 3\big(f(n+1)\big)^2 - 3\big(f(|n-1|)\big)^2.
\end{aligned}$$

Analogno dobijamo i

$$\begin{aligned}
\big(f(3n+2)\big)^2 &= \big(f(|3n-2|)\big)^2 + 3\big(f(n+2)\big)^2 - 3\big(f(|n-2|)\big)^2, \\
\big(f(3n+3)\big)^2 &= \big(f(|3n-3|)\big)^2 + 3\big(f(n+3)\big)^2 - 3\big(f(|n-3|)\big)^2.
\end{aligned}$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $f(n) = n$. Preciznije, dokazat ćemo da za svako $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $f(3n+1) = 3n+1, f(3n+2) = 3n+2$ i $f(3n+3) = 3n+3$. Dokazali smo da to vrijedi za $n = 0$, što predstavlja bazu indukcije. Pretpostavimo da za sve $k < 3n+1$ tvrdnja vrijedi, tj. da je $f(k) = k$ za sve $k < 3n+1$, te dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $3n+1, 3n+2$ i $3n+3$. Kako je svaki od brojeva $|3n-1|, n+1, |n-1|$ manji od $3n+1$, po induktivnoj pretpostavci imamo

$$\begin{aligned}
\big(f(3n+1)\big)^2 &= \big(f(|3n-1|)\big)^2 + 3\big(f(n+1)\big)^2 - 3\big(f(|n-1|)\big)^2 \\
&= (3n-1)^2 + 3(n+1)^2 - 3(n-1)^2 \\
&= 9n^2 - 6n + 1 + 3n^2 + 6n + 3 - 3n^2 + 6n - 3 = 9n^2 + 6n + 1 = (3n+1)^2,
\end{aligned}$$

odakle dobijamo $f(3n+1) = 3n+1$. Analogno dobijamo i $f(3n+2) = 3n+2$ i $f(3n+3) = 3n+3$. Ovim je indukcija završena, te za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $f(n) = n$. Direktnom provjerom dobijamo da ova funkcija zadovoljava uslov, pa je ona jedino rješenje.

Šema bodovanja

- Dobivanje jednakosti $f(0) = 0$: **1 bod**
- Dobivanje jednakosti $f(1) = 1$: **2 boda**
- Dobivanje jednakosti $f(2) = 2$ i $f(3) = 3$: **2 boda** (obje jednakosti po 1 bod)
- Navođenje jednakosti $(3n-1)^2 + 3(n+1)^2 = (3n+1)^2 + (n-1)^2$, ili slične jednakosti koja se može koristiti za dokaz matematičkom indukcijom: **4 boda**
- Navođenje preostalih jednakosti potrebnih za matematičku indukciju: **2 boda**
- Ideja da se dokaz da je $f(n) = n$ vrši matematičkom indukcijom: **1 bod**
- Dokaz da je $f(n) = n$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$: **7 bodova**
- Provjera da funkcija $f(n) = n$ zadovoljava uslov: **1 bod** (ovaj bod je moguće dobiti samo ukoliko je dokazano da nema drugih rješenja)