Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
15. marta/ožujka 2023.

I razred

Zadatak 1. U skupu realnih brojeva riješiti jednačinu

$$\frac{x-1}{y^2+xy}\cdot\left(\frac{x+1}{1-\frac{1}{y}}-x-1\right)\cdot\frac{x-xy^3-y^4+y}{1-x^2}=3.$$

Zadatak 2. Odrediti sve trojke (p,q,n), gdje su p i q prosti brojevi i n prirodan broj, za koje vrijedi

$$\frac{1}{p}+\frac{2023}{q}=\frac{n}{5}.$$

Zadatak 3. Neka su a,b,c cijeli brojevi takvi da je $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ racionalan broj. Dokazati da je tada broj $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ cio.

Zadatak 4. Odrediti najveći prirodan broj n takav da je moguće u svako polje ploče dimenzije $4\times n$ (4 reda i n kolona) upisati po jedan prirodan broj tako da su brojevi u svakom redu po parovima različiti i da je zbir brojeva u svakoj koloni jednak 20.

Zadatak 5. Dat je četverougao $ABCD$ u kojem vrijedi $\angle DAB=60°$, $\angle ABC=90°$ i $\angle BCD=120°$. Tačka S je presjek dijagonala AC i BD, i vrijedi $2\cdot BS=DS=2$. Tačke P i Q su redom sredine dijagonala AC i BD.

a) Dokazati da je prava PC simetrala ugla $\angle QPB$.

b) Izračunati površinu četverougla $ABCD$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
15. marta/ožujka 2023.

II razred

Zadatak 1. Odrediti sve prirodne brojeve a, b, c takve da je $c = (a + bi)^3 - 107i$, pri čemu je i imaginarna jedinica.

Zadatak 2. Emil je na tabli napisao brojeve $1, 2, \ldots, 2023$. Nora je uzela n različitih bojica i njima obojila sve te brojeve. Nakon što je Nora završila sa bojanjem, Emil je primijetio da su za svaki par (a, b) brojeva takav da je $a < b$ i $a|b$, brojevi a i b obojeni različitim bojama. Odrediti najmanju vrijednost broja n za koju je ovakva situacija moguća.

Zadatak 3. Pozitivni realni brojevi a, b, c zadovoljavaju

$$\frac{a^6}{2b^3 + 2c^3} + \frac{b^6 + 2b^3c^3 + c^6}{2a^3} + \frac{2a^3b^3 + 2a^3c^3}{a^3 + b^3 + c^3} = a^3 + b^3 + c^3.$$

Koji od brojeva a^2 i $b^2 + c^2$ je veći?

Zadatak 4. Neka je tačka I centar upisane kružnice trougla ABC. Prava CI siječe opisanu kružnicu trougla ABC po drugi put u tački L, pri čemu vrijedi $CI = 2 \cdot IL$. Tačke P i Q su date na stranici AB tako da vrijedi $\angle AIP = \angle BIQ = 90°$. Dokazati da je $AB = 2 \cdot PQ$.

Zadatak 5. Odrediti sve prirodne brojeve $n > 1$ za koje postoji prirodan broj $a > 2$ takav da $a^d + 2^d$ dijeli $a^n - 2^n$ za svaki pravi djelioc d od n.

Napomena: Pravi djelioci prirodnog broja n su svi njegovi pozitivni djelioci osim n.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
15. marta/ožujka 2023.

III razred

Zadatak 1. Pokazati da za sve realne brojeve x, y, z i w vrijede identiteti:

a) $(x-w)(y-z)+(y-w)(z-x)+(z-w)(x-y)=0$;
b) $\sin(x-w)\sin(y-z)+\sin(y-w)\sin(z-x)+\sin(z-w)\sin(x-y)=0$.

Zadatak 2. Neka je $ABCD$ četverougao kod kojeg su uglovi kod tjemena B i D pravi. Označimo sa $a=|BC|$, $b=|CD|$, $c=|DA|$ i $d=|AB|$.

a) Pokazati da vrijedi nejednakost $bc+ad\leq ab+cd$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $ABCD$ pravougaonik.

b) Pokazati da vrijedi nejednakost $|AC|\geq|BD|$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $ABCD$ pravougaonik.

Zadatak 3. Skakavac se nalazi u centru koordinatnog sistema (u tački $(0,0)$). U prvom koraku, skakavac napravi horizontalni skok dužine 1, nakon toga u drugom koraku vertikalni skok dužine 2, u trećem koraku horizontalni skok dužine 3, u četvrtom koraku vertikalni skok dužine 4, i tako dalje. Na primjer, prvih pet koraka može biti $(0,0)\to(-1,0)\to(-1,2)\to(-4,2)\to(-4,-2)\to(1,-2)$. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje se skakavac može vratiti u koordinatni početak nakon tačno n koraka.

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve $n>1$ za koje postoji prirodan broj $a>2$ takav da a^d+2^d dijeli a^n-2^n za svaki pravi djelioc d od n.

Napomena: Pravi djelioci prirodnog broja n su svi njegovi pozitivni djelioci osim n.

Zadatak 5. Neka je n prirodan broj te neka su $a_0,a_1,a_2,\dots,a_n$ realni brojevi iz intervala $(0,\frac{\pi}{2})$ takvi da vrijedi

$$\operatorname{tg}\left(a_0-\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(a_1-\frac{\pi}{4}\right)+\cdots+\operatorname{tg}\left(a_n-\frac{\pi}{4}\right)\geq n-1.$$

Dokazati da je $\operatorname{tg}(a_0)\cdot\operatorname{tg}(a_1)\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}(a_n)\geq n^{n+1}$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

15. marta/ožujka 2023.

IV razred

Zadatak 1. Ako je f funkcija takva da je $f(1) = 2$ i $f(n+1) = \frac{3f(n)+1}{3}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, odrediti vrijednost $f(2023)$.

Zadatak 2. Izračunati broj načina na koje možemo postaviti 153 topa (kule) na šahovsku ploču dimenzije 2023×2023 tako da se međusobno ne napadaju.

Napomena: Top (kula) u šahu „napada“ na ploči red i kolonu u kojoj se nalazi.

Zadatak 3. Odrediti vrijednost broja $n \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi

$$i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + ni^n = 2022 + 2023i,$$

gdje je i imaginarna jedinica.

Zadatak 4. Neka je $k \neq 0$ cijeli broj.

a) Dokazati da je broj uređenih parova (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju uslov

$$k = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x + y}$$

konačan. Označimo taj broj sa $f(k)$.

b) Dokazati da je broj $f(k)$ neparan ako i samo ako je broj k djeljiv sa 7.

Zadatak 5. Neka je $ABCD$ tangentan četverougao. Njegova upisana kružnica k dodiruje stranice BC i DA u tačkama E i F, redom. Poznato je da se prave AB, FE i CD sijeku u istoj tački. Kružnice opisane oko trouglova ΔAED i ΔBFC sijeku kružnicu k po drugi put u tačkama G i H, redom. Dokazati da je $EF \parallel GH$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
15. marta/ožujka 2023.

I razred - Rješenja

Zadatak 1. U skupu realnih brojeva riješiti jednačinu

$$\frac{x-1}{y^2+xy}\cdot\left(\frac{x+1}{1-\frac{1}{y}}-x-1\right)\cdot\frac{x-xy^3-y^4+y}{1-x^2}=3.$$

Rješenje: Definiciono područje date jednačine je $y \neq 0, y \neq 1, x \neq -y$ i $x \neq \pm 1$. Imamo:

$$\frac{x-1}{y(x+y)}\cdot\left(\frac{(x+1)}{\frac{y-1}{y}}-(x+1)\right)\cdot\frac{x+y-y^3(x+y)}{(1-x)(1+x)}=3 \iff$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{y(x+y)}\cdot\left(\frac{y}{y-1}-1\right)\cdot\frac{(x+y)(1-y^3)}{(1-x)(1+x)}=3 \iff$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{y(x+y)}\cdot\frac{1}{y-1}\cdot\frac{(x+y)(1-y)(y^2+y+1)}{(1-x)(1+x)}=3 \iff$$

$$\frac{y^2+y+1}{y}=3 \iff$$

$$y^2-2y+1=0 \iff$$

$$(y-1)^2=0$$

Zbog definicionog područja ne može biti $y=1$ pa zaključujemo da data jednačina nema rješenja.

Šema bodovanja:

- Kompletno definiciono područje: 5 bodova
- Svođenje jednačine na oblik $\frac{y^2+y+1}{y}=3$: 8 bodova, od čega
    - Faktorizacija $x-xy^3-y^4+y=(x+y)(1-y^3)$: 3 boda
    - Faktorizacija $\frac{x+1}{1-\frac{1}{y}}-x-1=(x+1)\cdot\frac{1}{y-1}$: 2 boda
    - Skraćivanje x^2-1 u brojniku i $1-x^2$ u nazivniku: 2 boda
    - Ostale algebarske operacije koje vode do oblika $\frac{y^2+y+1}{y}=3$: 1 bod
- Zaključak da je jedina mogućnoct $y=1$: 3 boda
- Konstatacija da jednačina nema rješenja: 4 boda

Zadatak 2. Odrediti sve trojke (p, q, n), gdje su p i q prosti brojevi i n prirodan broj, za koje vrijedi

$$\frac{1}{p} + \frac{2023}{q} = \frac{n}{5}.$$

Rješenje: Množenjem date jednačine za $5pq$ dobijamo

$$5q + 5 \cdot 2023p = npq. \quad (*)$$

S obzirom da $p|5 \cdot 2023p$ i $p|npq$ zaključujemo da $p|5q$. Kako je p prost broj to mora vrijediti $p|5$ ili $p|q$.

Ako $p|5$, mora biti $p = 5$. Uvrštavanjem u jednačinu $(*)$ dobijamo

$$5q + 25 \cdot 2023q = 5nq \Leftrightarrow$$
$$q + 5 \cdot 2023 = nq \Leftrightarrow$$
$$(n-1)q = 5 \cdot 7 \cdot 17^2.$$

Kako je q prost broj zaključujemo da $q \in \{5, 7, 17\}$, te nakon direktnog uvrštavanja u prethodnu jednačinu dobijamo trojke $(5, 5, 2024)$, $(5, 7, 1446)$ i $(5, 17, 596)$.

Ako $p|q$ onda s obzirom da su p i q prosti brojevi zaključujemo da mora biti $p = q$. Uvrštavanjem $p = q$ u jednačinu $(*)$ dobijamo

$$5p + 5 \cdot 2023p = np^2 \Leftrightarrow$$
$$np = 5 \cdot 2024 = 8 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23.$$

Kako je p prost broj zaključujemo da $p \in \{2, 5, 11, 23\}$, te nakon direktnog uvrštavanja u prethodnu jednačinu dobijamo trojke $(2, 2, 5060)$, $(5, 5, 2024)$, $(11, 11, 920)$ i $(23, 23, 440)$.

Dakle, tražene trojke (p, q, n) su $(2, 2, 5060)$, $(5, 5, 2024)$, $(5, 7, 1446)$, $(5, 17, 596)$, $(11, 11, 920)$ i $(23, 23, 440)$.

Šema bodovanja:

- Dobivanje oblika $5q + 5 \cdot 2023p = npq$: 1 bod
- Zaključak $p|5q$ (ili $q|5 \cdot 2023p$): 6 bodova
- Zaključak da vrijedi $p = 5$ ili $p = q$ (odnosno $q \in \{5, 7, 17\}$ ili $q = p$): 3 boda
- Rješavanje slučaja $p = 5$: 6 bodova
    - Ukoliko učenik razmatra slučajeve po q, svaki od slučajeva $q = 5, q = 7$ i $q = 17$ nosi po 2 boda
- Rješavanje slučaja $p = q$: 4 boda

Zadatak 3. Neka su a, b, c cijeli brojevi takvi da je $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ racionalan broj. Dokazati da je tada broj $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ cio.

Rješenje: Racionaliziranjem razlomka $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ nakon sređivanja dobijamo

$$\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c} = \frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c} \cdot \frac{b\sqrt{3}-c}{b\sqrt{3}-c} = \frac{3ab-bc+(b^2-ac)\sqrt{3}}{3b^2-c^2} = \frac{3ab-bc}{3b^2-c^2} + \frac{b^2-ac}{3b^2-c^2}\sqrt{3}$$

Kako su $\frac{3ab-bc}{3b^2-c^2}$ i $\frac{b^2-ac}{3b^2-c^2}$ racionalni brojevi, da bi posljednji broj bio racionalan, mora biti $\frac{b^2-ac}{3b^2-c^2} = 0$, odnosno $b^2 = ac$.

Napomena: Relacija $b^2 = ac$ može se dobiti i na sljedeći način:

Kako je $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$ racionalan broj, postoje cijeli brojevi p, q takvi da je $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c} = \frac{p}{q}$. Imamo

$$\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow$$
$$qa\sqrt{3} + qb - pb\sqrt{3} - pc = 0 \Leftrightarrow$$
$$(qb - pc) + (qa - pb)\sqrt{3} = 0$$

Ne može biti $qb - pc \neq 0$ i $qa - pb \neq 0$ jer bi tada slijedilo $\sqrt{3} = \frac{pc-qb}{qa-pb}$, što je nemoguće jer je $\sqrt{3}$ iracionalan broj. Dakle, bar jedan od ovih brojeva je jednak 0, odakle slijedi da su oba jednaka 0. Drugim riječima, vrijedi $qb = pc$ i $qa = pb$, odakle se dobija $b^2 = ac$.

Dalje iz

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac),$$

mijenjajući ac sa b^2 dobijamo

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab + bc + b^2) = (a+b+c)^2 - 2b(a+b+c) =$$
$$= (a+b+c)(a-b+c).$$

Sada je

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = \frac{(a+b+c)(a-b+c)}{a+b+c} = a - b + c.$$

Kako su a, b, c cijeli brojevi, to je i $a - b + c$ cijeli broj, pa zaključujemo da je i $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ cio.

Šema bodovanja:

- Zaključak $b^2 = ac$: 8 bodova
  - Ukoliko učenik nije izveo ovaj zaključak, 3 od ovih 8 bodova se dodjeljuje za racionalisanje nazivnika datog razlomka, a 2 boda za uvođenje cijelih brojeva p, q za koje vrijedi $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c} = \frac{p}{q}$. Pri tome, ti bodovi nisu aditivni.
- Relacija $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab + bc + ca)$: 4 boda
- Uvrštavanje $ac = b^2$ u posljednju relaciju: 5 bodova
- Privođenje dokaza kraju: 3 boda

Zadatak 4. Odrediti najveći prirodan broj n takav da je moguće u svako polje ploče dimenzije $4 \times n$ (4 reda i n kolona) upisati po jedan prirodan broj tako da su brojevi u svakom redu po parovima različiti i da je zbir brojeva u svakoj koloni jednak 20.

Rješenje: Označimo sa S ukupni zbir brojeva upisanih u polja ploče. S jedne strane, pošto je zbir brojeva u svakoj koloni jednak 20, vrijedi $S = 20n$. S druge strane, kako su brojevi u svakom redu po parovima različiti, zbir brojeva u svakom redu je najmanji kada su u tom redu upisani brojevi $1, 2, \dots, n$. Taj minimalni zbir brojeva u jednom redu iznosi $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Kako ploča ima 4 reda, zaključujemo da je $S \geq 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 2n(n+1)$. Sada imamo $20n = S \geq 2n(n+1)$, odakle nakon dijeljenja sa $2n$ dobijamo $n \leq 9$.

Pokažimo sada da se vrijednost $n = 9$ može dostići, tj. da u ploču dimenzije 4×9 mogu biti upisani prirodni brojevi tako da uslovi zadatka budu zadovoljeni:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1

Šema bodovanja:

- Posmatranje vrijednosti S (ukupnog zbira brojeva u ploči): 4 boda
- Zaključak $S = 20n$: 3 boda
- Zaključak da je minimalni zbir brojeva u jednom redu $\frac{n(n+1)}{2}$: 4 boda
- Zaključak $S \geq 2n(n+1)$: 1 bod
- Zaključak $n \leq 9$: 3 boda
- Konstrukcija za $n = 9$: 5 bodova

Zadatak 5. Dat je četverougao $ABCD$ u kojem vrijedi $\angle DAB = 60°$, $\angle ABC = 90°$ i $\angle BCD = 120°$. Tačka S je presjek dijagonala AC i BD, i vrijedi $2 \cdot BS = DS = 2$. Tačke P i Q su redom sredine dijagonala AC i BD.

a) Dokazati da je prava PC simetrala ugla $\angle QPB$.
b) Izračunati površinu četverougla $ABCD$.

Rješenje:

Imamo $\angle CDA = 360° - \angle DAB - \angle ABC - \angle BCD = 90°$. Iz $\angle ABC = \angle CDA = 90°$ zaključujemo da je četverougao $ABCD$ tetivan i da je AC prečnik njegove opisane kružnice. Označimo tu kružnicu sa k. Tačka P je sredina prečnika AC kružnice k, pa je to centar ove kružnice. Kako je Q sredina tetive BC kružnice k, prava PQ je simetrala te tetive, pa je $PQ \perp BD$. Također, vrijedi $BQ = DQ = \frac{BD}{2} = \frac{BS+SD}{2} = \frac{3}{2}$. Dalje, iz odnosa centralnog i periferijskog ugla imamo $\angle BPD = 2 \cdot \angle BAD = 120°$, a vrijedi i $PB = PD$, pa dobijamo $\angle PBD = \angle PDB = \frac{180° - \angle BPD}{2} = 30°$. Sada zaključujemo da trougao ΔBQP ima unutrašnje uglove $30°, 60°$ i $90°$, odakle slijedi $PQ = BQ \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $BP = 2 \cdot PQ = \sqrt{3}$. Kako je $SQ = BQ - BS = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, to iz Pitagorine teoreme na ΔPQS dobijamo $PS = \sqrt{PQ^2 + SQ^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$. Dakle, u ovom pravouglom trouglu hipotenuza PS je dva puta duža od katete SQ, pa su njegovi uglovi $\angle QPS = 30°$ i $\angle PSQ = 60°$. Sada je $\angle QPS = 30° = \angle \frac{QPB}{2}$, pa je PC simetrala ugla $\angle QPB$, čime je dokazan dio pod a).

Primijetimo da je $\angle SPB$ vanjski za jednakokraki trougao ΔPAB, pa je $\angle PAB = \angle PBA = \angle \frac{SPB}{2} = 15°$, što dalje daje $\angle DAC = \angle DAB - \angle PAB = 45°$. Dakle, trougao ΔDAC je jendakokraki pravougli. To znači da je DP njegova visina na hipotenuzu. Prethodno smo dobili $PB = \sqrt{3}$, pa je $PD = \sqrt{3}$ i $AC = PA + PC = 2\sqrt{3}$. Sada imamo

$$P_{\Delta ACD} = \frac{AC \cdot DP}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 3.$$

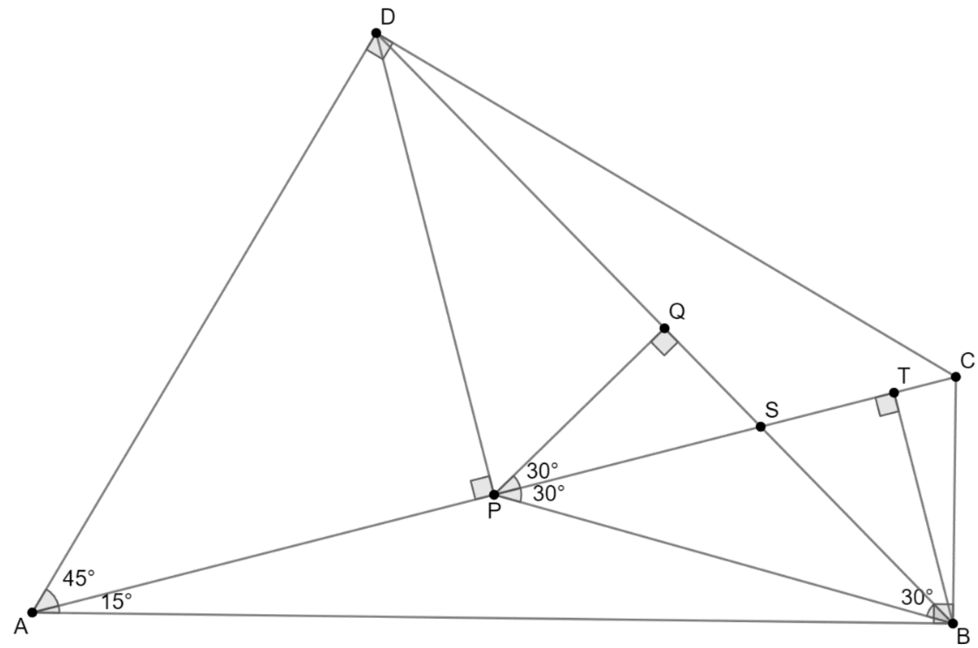
Neka je T podnožje normale iz B na pravu AC. Vrijedi $DP \perp AC$ i $BT \perp AC$, što implicira $DP \parallel BT$, pa iz Talesove teoreme imamo $\frac{BT}{DP} = \frac{BS}{DS} = \frac{1}{2}$. Dakle, $BT = \frac{1}{2} DP = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sada je

$$P_{\Delta ABC} = \frac{BT \cdot AC}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Konačno, $P_{ABCD} = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ACD} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da je $ABCD$ tetivan četverougao i da je P centar njegove opisane kružnice: 2 boda
- Zaključak $PQ \perp BD$: 2 boda
- Zaključak $\angle PBQ = \angle PDQ = 30°$: 2 boda
- Izračunavanje dužina duži PB i PQ: 4 boda
- Zaključak $\angle QPS = \angle SPB = 30°$: 2 boda
- Zaključak da je ΔDAC jednakokraki pravougli trougao i da mu je DP visina: 2 boda
- Izračunavanje dužine visine iz B na pravu AC: 4 boda
- Izračunavanje površine četverougla $ABCD$: 2 boda



D
Q
C
T
S
30°
30°
P
45°
15°
A
30°
B

Kantonalno takmičenje iz matematike učenika srednjih škola Kantona Sarajevo

15. 3. 2023.

ZADACI S RJEŠENJIMA I ŠEMOM BODOVANJA

II razred

Zadatak 1. Odrediti sve prirodne brojeve a, b, c takve da je $c = (a + bi)^3 - 107i$, pri čemu je i imaginarna jedinica.

Rješenje. Stepenujući izraz $(a + bi)^3$ i sabirajući, dobivamo

$$c = (a + bi)^3 - 107i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3 - 107)i. \ (*)$$

Zbog $c \in \mathbb{N}$, treba biti $3a^2b - b^3 - 107 = 0$, tj. $3a^2b - b^3 = 107$, odnosno $b(3a^2 - b^2) = 107$.

S obzirom da je 107 prost broj, jedan od faktora u izrazu $b(3a^2 - b^2)$ jednak je 1, a drugi 107 (ne mogu biti negativni, jer je $b > 0$, pa mora vrijediti i $3a^2 - b^2 > 0$).

1) Ako je $b = 1$ i $3a^2 - b^2 = 107$, dobivamo $a = 6$ i $c = 198$. Dakle,

$$(a, b, c) = (6,1,198).$$

2) Ako je $b = 107$ i $3a^2 - b^2 = 1$, dobivamo da a nije prirodan broj.

Dakle, jedino rješenje je $(a, b, c) = (6,1,198)$.

Shema bodovanja.

- Dobivanje jednakosti $(*)$**: 6 bodova**
- Postavljanje uvjeta $3a^2b - b^3 - 107 = 0$: **3 boda**
- Zaključak da je , jedan od faktora u izrazu $b(3a^2 - b^2)$ jednak je 1, a drugi 107: **2 boda**
- Rješavanje prvog slučaja i dobivanje rješenja: $(a, b, c) = (6,1,198)$: **5 bodova**
- Rješavanje drugog slučaja i pokazivanje da nema drugih rješenja: **4 boda**

Zadatak 2. Emil je na tabli napisao brojeve $1, 2, \dots, 2023$. Nora je uzela n različitih bojica i njima obojila sve te brojeve. Nakon što je Nora završila sa bojanjem, Emil je primijetio da su za svaki par (a, b) brojeva takav da je $a < b$ i $a|b$, brojevi a i b obojeni različitim bojama. Odrediti najmanju vrijednost broja n za koju je ovakva situacija moguća.

Rješenje. Primijetimo prvo da svaki od brojeva $1 = 2^0, 2^1, \dots, 2^{10} = 1024$ mora biti obojen različitim bojama. Dakle, $n \geq 11$. Pokažimo da je dovoljno tih 11 boja.

Posmatrajmo sljedeće bojanje: broj 1 obojimo bojom 1, brojeve 2,3 obojimo bojom 2, brojeve 4,5,6,7 obojimo bojom 3, i tako dalje. Općenito, brojeve između 2^{k-1} i $2^k - 1$ (uključujući i njih) obojimo bojom k za sve $1 \leq k \leq 11$, s tim da za $k = 11$ bojanje vršimo samo do $2023 < 2^{11} = 2048$.

Neka su a i b, $a < b$, dva broja iste boje. Vidimo da za takve parove (a, b) vrijedi $\frac{b}{a} < 2$, tj. ne može vrijediti $a|b$. Dakle, ako vrijedi $a|b$ onda su a i b obojeni različitim bojama. Prema tome, bojanje se može izvršiti sa 11 različitih bojica.

Shema bodovanja.

- Dokaz da je $n \geq 11$: **9 bodova**
- Navođenje (bez dokaza) ispravnog bojanja za $n = 11$: **6 bodova**
- Dokazivanje da je bojanje za $n = 11$ ispravno: **5 boda**

Zadatak 3. Pozitivni realni brojevi a, b, c zadovoljavaju

$$\frac{a^6}{2b^3+2c^3}+\frac{b^6+2b^3c^3+c^6}{2a^3}+\frac{2a^3b^3+2a^3c^3}{a^3+b^3+c^3}=a^3+b^3+c^3.$$

Koji od brojeva a^2 i b^2+c^2 je veći?

Rješenje. Dokazat ćemo da je $a^2<b^2+c^2$. Uvedimo smjenu $u=a^3$ i $v=b^3+c^3$. Tada se izraz iz zadatka svodi na:

$$\frac{u^2}{2v}+\frac{v^2}{2u}+\frac{2uv}{u+v}=u+v.$$

Nakon množenja obe strane sa $2uv(u+v)\neq 0$ i faktorisanja, dati izraz svodi se na:

$$(u-v)(u^3-v^3)=0.$$

Dakle imamo da je $u=v$ ili $u^3=v^3$, što se opet svodi na $u=v$. Odnosno imamo da je $a^3=b^3+c^3$. Sada je $a^2<b^2+c^2 \Leftrightarrow a^3<ab^2+ac^2 \Leftrightarrow b^3+c^3<ab^2+ac^2 \Leftrightarrow b^2(b-a)+c^2(c-a)<0$, što vrijedi, jer je $a>b$ i $a>c$ (slijedi iz $a^3=b^3+c^3>\max(b^3,c^3)$, tj. $a>\max(b,c)$).

Shema bodovanja.

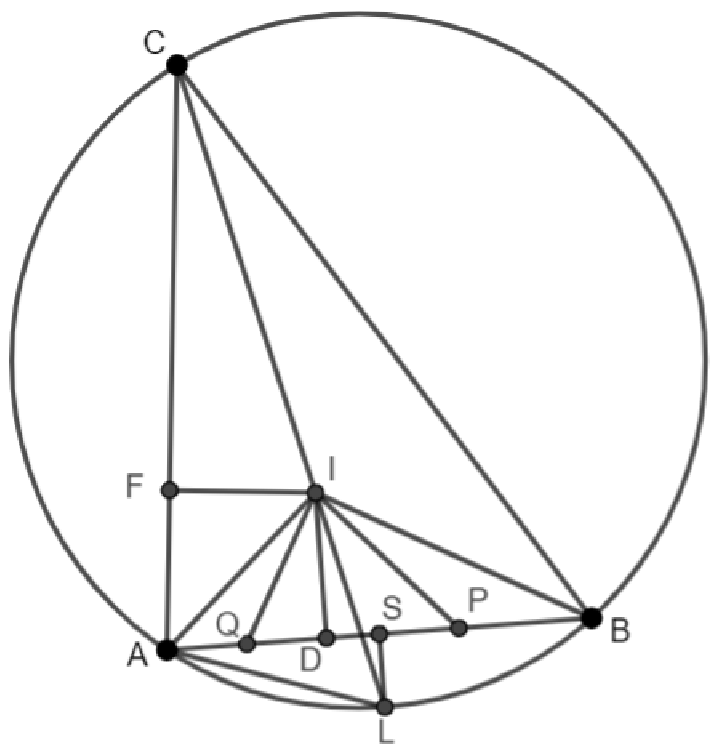
- Uvođenje smjene $u=a^3$ i $v=b^3+c^3$ i izražavanje izraza iz zadatka preko u i v: **5 bodova**
- Faktorizacija izraza na $(u-v)(u^3-v^3)=0$: **5 bodova**
- Zaključak $u=v$: **1 bod**
- Završetak dokaza: **9 bodova**

Zadatak 4. Neka je tačka I centar upisane kružnice trougla ABC. Prava CI siječe opisanu kružnicu trougla ABC po drugi put u tački L, pri čemu vrijedi $CI = 2 \cdot IL$. Tačke P i Q su date na stranici AB tako da vrijedi $\angle AIP = \angle BIQ = 90°$. Dokazati da je $AB = 2 \cdot PQ$.

Rješenje I. Neka upisana kružnica trougla ABC dodiruje AB u D. Kako je ID visina pravouglog trougla API, to je $AD \cdot DP = ID^2 = r^2 = \frac{P^2}{s^2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$. Kako je $AD = s - a$, to je $DP = \frac{(s-b)(s-c)}{s}$. Analogno je $DQ = \frac{(s-a)(s-c)}{s}$, pa sabiranjem dobijamo $PQ = \frac{c(s-c)}{s}$. Da bismo dokazali da je $PQ = \frac{c}{2}$, dovoljno je dokazati $s = 2(s-c)$, tj. $s = 2c$.

S druge strane, kako je $\angle AIL = \angle ACI + \angle CAI = \angle LAB + \angle BAI = \angle LAI$, to je $LA = LI$.

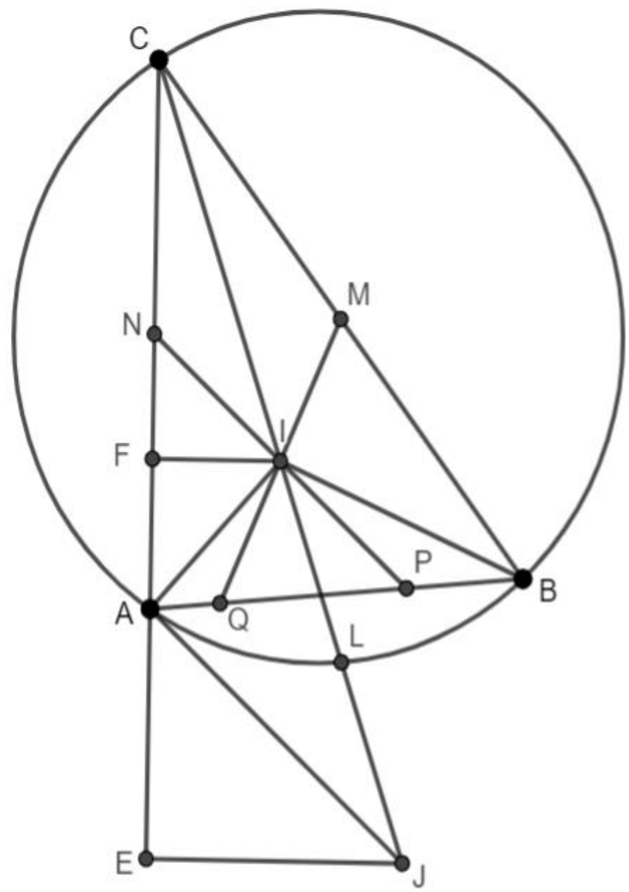
Iz uslova zadatka je $CI = 2LA$. Neka je F tačka dodira upisane kružnice trougla ABC sa AC, a S sredina stranice AB. Tada je $\angle IFC = 90° = \angle LSA$ (jer je L sredina luka AB) i $\angle ICF = \angle ACL = \angle BCL = \angle BAL = \angle LAS$, pa su trouglovi IFC i LAS slični, odakle je $CF = 2AS$, tj. $s - c = c$, odnosno $s = 2c$, što je i trebalo dokazati.



Shema bodovanja za rješenje I.

- dobijanje jednakosti $AD \cdot DP = ID^2$: **3 boda**
- dobijanje jednakosti $DP = \frac{(s-b)(s-c)}{s}$: **4 boda**
- dokaz da je dovoljno dokazati $s = 2c$ (ili ekvivalentno $a + b = 3c$): **3 boda**
- dokaz da vrijedi $s = 2c$ (ili ekvivalentno $a + b = 3c$): **10 bodova** (ovaj dio se može uraditi na dosta načina, na primjer uočavanjem sličnosti trouglova ALC i BCT, gdje je T presjek CI sa AB, te se s obzirom na $CL = 3AL$ dobija se $BC = 3BT$, a BT se može izraziti preko stranica trougla na osnovu teoreme o simetrali ugla, iz čega se dobija potrebna jednakost)

Rješenje II. Neka je J centar pripisane kružnice trougla ABC naspram vrha C. Kako je AI unutrašnja, a AJ vanjska simetrala ugla kod vrha A, one su okomite, pa je $\angle IAJ = 90°$. Kako je $\angle AIL = \angle ACI + \angle CAI = \angle LAB + \angle BAI = \angle LAI$, to je $LA = LI$, pa L mora biti centar opisane kružnice pravouglog trougla AJI, odakle je $LI = LJ$. Sada iz uslova zadatka slijedi $CI = IJ$. Kako je prava PI okomita na AI, to je ona paralelna sa AJ, pa je to ustvari srednja linija trougla CAJ, što znači da polovi AC. Ako sa N označimo sredinu duži AC, primijetimo da je trougao APN jednakokraki (AI je i simetrala ugla i visina), pa vrijedi $AN = AP$. Analogno je $BQ = BM$, gdje je M sredina stranice BC. Međutim, kako vrijedi $PQ = AP + BQ - AB = \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2} - AB$, da bismo dokazali $PQ = \frac{AB}{2}$, dovoljno je dokazati da vrijedi $AC + BC = 3AB$, tj. $b + a = 3c$.



S druge strane, ako sa F označimo tačku u kojoj upisana kružnica dodiruje AC, a sa E tačku u kojoj pripisana kružnica dodiruje AC, tada je očigledno F sredina duži CE (IF je srednja linija trougla CEJ). Dakle, $CE = 2 \cdot CF$. Međutim, poznato je da vrijedi (i lako se dokazuje) $CF = s - c$ i $CE = s$, odakle dobijamo $s = 2(s - c)$ što se svodi na $b + a = 3c$, što je i trebalo dokazati.

Shema bodovanja za rješenje II.

- uvođenje tačke J i zaključak $CI = IJ$: **4 boda**
- zaključak da PI polovi AC : **3 boda**
- zaključak $AN = AP$: **3 boda**
- zaključak da je dovoljno dokazati $b + a = 3c$: **3 boda**
- završetak dokaza: **7 bodova**

Zadatak 5. Odrediti sve prirodne brojeve $n > 1$ za koje postoji prirodan broj $a > 2$ takav da $a^d + 2^d$ dijeli $a^n - 2^n$ za svaki pravi djelioc d od n.

Napomena: Pravi djelioci prirodnog broja n su svi njegovi pozitivni djelioci osim n.

Rješenje. Neka je n prost broj. Tada je jedini pravi djelilac broja n jednak 1, pa se uslov zadatka svodi na $a + 2 | a^n - 2^n$. Dokažimo da $a = 6$ zadovoljava uslove zadatka (možemo uzeti $a = 2^k - 2$ za bilo koje $k, 3 \le k \le n + 1$). Treba dokazati da $8 | 6^n - 2^n = 2^n(3^n - 1)$. Kako je broj $3^n - 1$ paran, to $2^{n+1} | 2^n(3^n - 1)$, pa i $8 = 2^3 | 2^n(3^n - 1)$ (jer je $n \ge 2$).

Neka je sada n stepen broja 2, tj. $n = 2^k$. Sada su svi pravi djelioci od n oblika 2^t, gdje je $0 \le t < k$. Kako je broj

$$\begin{aligned} a^n - 2^n = a^{2^k} - 2^{2^k} &= \left(a^{2^{k-1}} - 2^{2^{k-1}}\right)\left(a^{2^{k-1}} + 2^{2^{k-1}}\right) \\ &= \left(a^{2^{k-2}} - 2^{2^{k-2}}\right)\left(a^{2^{k-2}} + 2^{2^{k-2}}\right)\left(a^{2^{k-1}} + 2^{2^{k-1}}\right) = \cdots \\ &= (a-2)(a+2)(a^2+2^2)(a^4+2^4)\dots(a^{2^{k-1}} + 2^{2^{k-1}}) \end{aligned}$$

djeljiv sa svim brojevima oblika $a^{2^t} + 2^{2^t}, 0 \le t < k$, to tvrdnja vrijedi za svako $a > 2$.

Neka sada n nije ni prost ni stepen dvice. Ako je e neparan prost djelioc od n, tada je $n = de$, gdje je $d > 1$ pravi djelioc od n. Sada je $a^n - 2^n = a^n + 2^n - 2^{n+1} = \left(a^d\right)^e + \left(2^d\right)^e - 2^{n+1}$, pa kako je $\left(a^d\right)^e + \left(2^d\right)^e$ djeljivo sa $a^d + 2^d$, to $a^d + 2^d | 2^{n+1}$, pa je $a^d + 2^d = 2^k$, gdje je $d < k \le n + 1$. Očigledno je broj a paran, pa dijeljenjem sa 2^d imamo $\left(\frac{a}{2}\right)^d + 1 = 2^{k-d}$. Jasno je da je broj $\frac{a}{2}$ neparan. Ako je d paran broj, onda je $\left(\frac{a}{2}\right)^d + 1 \equiv 2 (mod\ 4)$, pa je $k - d = 2$. Međutim, onda je $\left(\frac{a}{2}\right)^d = 1$, što je nemoguće zbog $a > 2$. Ako je d neparan broj, onda imamo

$$2^{k-d} = \left(\frac{a}{2}\right)^d + 1 = \left(\frac{a}{2} + 1\right)\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{d-1} - \left(\frac{a}{2}\right)^{d-2} + \cdots + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a}{2} + 1\right).$$

U drugoj zagradi imamo neparan broj neparnih sabiraka (ukupno d), pa je ona neparna. S druge strane, kako je $\frac{a}{2} > 1$, to je $\left(\frac{a}{2}\right)^k > \left(\frac{a}{2}\right)^{k-1}$, pa je za $d > 1$ i ta zagrada veća od 1. Međutim, to je očigledna kontradikcija, jer broj 2^{k-d} nema neparan djelioc veći od 1.

Dakle, rješenja su svi prosti brojevi i svi stepeni broja dva.

Shema bodovanja.

- dokaz da prosti brojevi zadovoljavaju uslove zadatka: **3 boda**
- dokaz da stepeni broja dva zadovoljavaju uslove zadatka: **3 boda**
- dokaz da ako n nije stepen dvice i ako je d djelilac takav da je $\frac{n}{d}$ neparan, tada je $a^d + 2^d = 2^k$, gdje je $d < k \le n + 1$: **6 bodova** (**4 boda** ako se samo zaključi da $a^d + 2^d | 2^{n+1}$)
- završetak dokaza: **8 bodova** (**3 boda** za parno d i **5 bodova** za neparno d, pri čemu učenik gubi **2 boda** ukoliko nije objasnio zašto može odabrati $d > 1$)

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
15. marta/ožujka 2023.

Rješenja zadataka i šema bodovanja za III razred

Zadatak 1. Pokazati da za sve realne brojeve x, y, z i w vrijede identiteti:

a) $(x-w)(y-z)+(y-w)(z-x)+(z-w)(x-y)=0$;
b) $\sin(x-w)\sin(y-z)+\sin(y-w)\sin(z-x)+\sin(z-w)\sin(x-y)=0$.

Rješenje. a) Nakon množenja zagrada dobijamo

$$\begin{aligned}&(x-w)(y-z)+(y-w)(z-x)+(z-w)(x-y)=\\&=(xy-xz-wy+wz)+(yz-yx-wz+wx)+(zx-zy-wx+wy)=\\&=(xy+wz+yz+wx+zx+wy)-(xz+wy+yx+wz+zy+wx)=0.\end{aligned}$$

b) Za sve realne brojeve A i B vrijedi formula

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B).$$

Koristeći navedenu formulu dobijamo

$$\begin{aligned}2\sin(x-w)\sin(y-z)&=\cos\big((x-w)-(y-z)\big)-\cos\big((x-w)+(y-z)\big)\\&=\cos(x-y+z-w)-\cos(x+y-z-w),\end{aligned}$$

te slično

$$2\sin(y-w)\sin(z-x)=\cos(x+y-z-w)-\cos(x-y-z+w) \text{ i}$$

$$2\sin(z-w)\sin(x-y)=\cos(x-y-z+w)-\cos(x-y+z-w).$$

Sabiranjem posljednje tri jednakosti i poništavanjem istih članova dobija se 0, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

Dio pod a) nosi 4 boda (moguće je dobiti samo 0 ili 4 boda na ovom dijelu).

Dio pod b) nosi 16 bodova:

- navođenje formule $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$: 1 bod
- primjena formule na $\sin(x-w)\sin(y-z)$, $\sin(y-w)\sin(z-x)$, $\sin(z-w)\sin(x-y)$: $3\times 3=9$ bodova
- zaključak da će se sabiranjem pokratiti članovi: 6 bodova

Zadatak 2. Neka je $ABCD$ četverougao kod kojeg su uglovi kod tjemena B i D pravi. Označimo sa $a = |BC|$, $b = |CD|$, $c = |DA|$ i $d = |AB|$.

a) Pokazati da vrijedi nejednakost $bc + ad \leq ab + cd$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $ABCD$ pravougaonik.

b) Pokazati da vrijedi nejednakost $|AC| \geq |BD|$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $ABCD$ pravougaonik.

Rješenje. a) Dio pod a) ćemo dokazati na dva načina:

I način:
Označimo sa α ugao kod tjemena A. Ugao kod tjemena C je tada jednak $180° - \alpha$. Površina četverougla $ABCD$ se može izračunati na dva načina:

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ADC} = \frac{1}{2}(bc + da),$$

$$P_{ABCD} = P_{BAD} + P_{BCD} = \frac{1}{2}cd \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}ab \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}(cd + ab)\sin\alpha.$$

Izjednačavanjem ovih formula dobijamo

$$\sin\alpha = \frac{bc + da}{cd + ab}.$$

Kako je sinus bilo kojeg ugla manji ili jednak 1, vrijedi

$$bc + da \leq cd + ab,$$

što je i trebalo dokazati. Jednakost vrijedi kada je $\sin\alpha = 1$, tj. kada je $\alpha = 90°$, odakle slijedi da je četverougao $ABCD$ pravougaonik.

II način:
Iz Pitagorine teoreme imamo $d^2 + a^2 = |AC|^2 = b^2 + c^2$, pa je

$$a^2 - c^2 = b^2 - d^2,$$

odnosno

$$(a - c)(a + c) = (b - d)(b + d).$$

Kako su $a + c > 0$ i $b + d > 0$, to $a - c$ i $b - d$ imaju isti predznak (ili su oba nula). Odavde direktno slijedi $(b - d)(c - a) \leq 0$, što nakon množenja postaje $bc + da \leq cd + ab$, što je i trebalo dokazati. Jednakost vrijedi kada je $a = c$ i $b = d$. Tada su trouglovi ABC i ADC podudarni ($|AB| = |CD|, |BC| = |AD|$ i $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 90°$), pa je $\measuredangle ACD = \measuredangle CAB$. Kako je $\measuredangle DAC = 90° - \measuredangle ACD$, slijedi da je $\measuredangle DAB = 90°$, odnosno da je četverougao $ABCD$ pravougaonik.

b) Četverougao $ABCD$ je tetivni četverougao ($\measuredangle ABC + \measuredangle ADC = 180°$) sa centrom opisane kružnice na sredini hipotenuze AC pravouglih trouglova ABC i ADC. Očigledno je AC prečnik te kružnice, a BD je njena tetiva, pa mora vrijediti $|AC| \geq |BD|$. Jednakost vrijedi kada je i BD prečnik opisane kružnice, odnosno kada su uglovi $\measuredangle BAD$ i $\measuredangle BCD$ kao uglovi nad prečnikom jednaki $90°$, tj. kada je četverougao $ABCD$ pravougaonik.

Šema bodovanja:

Dio pod a), Rješenje I:

- izraz za površinu četverougla $P_{ABCD} = \frac{1}{2}(bc + da)$: 2 boda
- izraz za površinu četverougla $P_{ABCD} = \frac{1}{2}(cd + ab)\sin\alpha$: 3 boda
- izraz $\sin\alpha = \frac{bc+da}{cd+ab}$: 3 boda
- tvrdnja da je sinus manji ili jednak od 1 i nejednakost $bc + da \leq cd + ab$: 4 boda
- dokaz da jednakost vrijedi ako i samo ako je $ABCD$ pravougaonik: 2 boda

Dio pod a), Rješenje II:

- dokaz da je nejednakosti ekvivalentna sa $(b - d)(c - a) \leq 0$: 2 boda
- jednakost $d^2 + a^2 = |AC|^2 = b^2 + c^2$ dobijena iz Pitagorine teoreme: 1 bod
- zapis prethodne jednakosti u obliku $(a - c)(a + c) = (b - d)(b + d)$: 3 boda
- zaključak da $a - c$ i $b - d$ imaju isti predznak (ili su oba nula): 4 boda
- dokaz da $(b - d)(c - a) \leq 0$ iz prethodnog zaključka: 2 boda
- dokaz da jednakost vrijedi ako i samo ako je $ABCD$ pravougaonik: 2 boda

Dio pod b):

- zaključak da je AC prečnik kružnice opisane oko četverougla $ABCD$: 2 boda
- zaključak da je dužina prečnika AC veća ili jednaka od dužine tetive BD: 2 boda
- dokaz da jednakost vrijedi ako i samo ako je $ABCD$ pravougaonik: 2 boda

Zadatak 3. Skakavac se nalazi u centru koordinatnog sistema (u tački $(0,0)$). U prvom koraku, skakavac napravi horizontalni skok dužine 1, nakon toga u drugom koraku vertikalni skok dužine 2, u trećem koraku horizontalni skok dužine 3, u četvrtom koraku vertikalni skok dužine 4, i tako dalje. Na primjer, prvih pet koraka može biti $(0,0) \to (-1,0) \to (-1,2) \to (-4,2) \to (-4,-2) \to (1,-2)$. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje se skakavac može vratiti u koordinatni početak nakon tačno n koraka.

Rješenje. Primijetimo najprije da su vertikalni skokovi parne dužine, pa je mogućnost vraćanja na x- osu ekvivalentna sa mogućnošću izbora znakova " $+$ " i " $-$ " tako da vrijedi $\pm 2 \pm 4 \pm \cdots \pm 2k = 0$, gdje je $2k$ najveći paran broj manji ili jednak n, a to je ekvivalentno sa mogućnošću izbora znakova " $+$ " i " $-$ " tako da vrijedi $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm k = 0$, gdje je $k = \left[\frac{n}{2}\right]$. Kako je parnost razlike ista kao parnost zbira, da bi ovo bilo moguće neophodno je da broj $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ bude paran, tj. da $4|k(k+1)$, što je zadovoljeno za $k \equiv 0(mod\ 4)$ i $k \equiv -1(mod\ 4)$. S druge strane, kako je $1 - 2 - 3 + 4 = 0$ i $1 + 2 - 3 = 0$, to za $k = 3$ i $k = 4$ tvrdnja vrijedi. Pored toga, kako za 4 uzastopna broja uvijek možemo dobiti nulu kao $t - (t+1) - (t+2) + (t+3)$, to možemo odabrati znakove tako da vrijedi $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm k = 0$ za sve $k \equiv 0(mod\ 4)$ i $k \equiv -1(mod\ 4)$. Dakle, najveći paran broj manji ili jednak od n je kongruentan 0 ili -2 po modulu 8. To znači da je najveći neparan broj manji ili jednak n kongruentan $-3, -1$ ili 1 po modulu 8.

Kako su svi horizontalni skokovi neparne dužine, da bismo se vratili na y-osu moramo napraviti paran broj horizontalnih skokova (jer je zbir neparnog broja neparnih brojeva neparan, a zbir parnog broja neparnih brojeva paran). To znači da među brojevima $1,2, \dots, n$ mora biti paran broj neparnih brojeva, što nije slučaj ako je najveći neparan broj manji ili jednak n kongruentan -3 ili 1 po modulu 8. Dakle, najveći neparan broj manji ili jednak n je kongruentan -1 po modulu 8, pa je $n \equiv 0(mod\ 8)$ ili $n \equiv -1(mod\ 8)$. Dokažimo da ovakvi n zadovoljavaju uslove zadatka. Primijetimo da je dovoljno dokazati da možemo odabrati znakove " $+$ " i " $-$ " tako da vrijedi $\pm 1 \pm 3 \pm \cdots \pm (8t-1) = 0$ (jer za vertikalne skokove smo već vidjeli da se u ovim slučajevima moguće vratiti na x-osu, a vertikalni i horizontalni skokovi su nezavisni). Međutim, broj neparnih brojeva nam je djeljiv sa 4, a u svakoj četvorki možemo odabrati znakove " $+$ " i " $-$ " tako da dobijemo nulu, i to na sljedeći način: $(8i+1) - (8i+3) - (8i+5) + (8i+7) = 0$. Ako ovo uradimo za svaku četvorku, jasno je da ćemo dobiti nulu.

Dakle, rješenje su svi brojevi n koji su kongruenti -1 ili 0 po modulu 8.

Šema bodovanja:

- dokaz da je vraćanje na x —osu moguće ako i samo ako je najveći parni broj manji ili jednak n kongruentan 0 ili -2 po modulu 8: 8 bodova
- konstatacija da među brojevima $1,2, \dots, n$ mora biti neparan broj neparnih brojeva: 3 boda
- zaključak da brojevi koji nisu kongruentni -1 ili 0 po modulu 8 ne zadovoljavaju uslove zadatka: 4 boda
- dokaz da tvrnjda vrijedi ako je broj n kongruentan -1 ili 0 po modulu 8: 5 bodova

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve $n > 1$ za koje postoji prirodan broj $a > 2$ takav da $a^d + 2^d$ dijeli $a^n - 2^n$ za svaki pravi djelioc d od n.

Napomena: Pravi djelioci prirodnog broja n su svi njegovi pozitivni djelioci osim n.

Rješenje. Neka je n prost broj. Tada je jedini pravi djelilac broja n jednak 1, pa se uslov zadatka svodi na $a + 2 | a^n - 2^n$. Dokažimo da $a = 6$ zadovoljava uslove zadatka (možemo uzeti $a = 2^k - 2$ za bilo koje $k, 3 \leq k \leq n + 1$). Treba dokazati da $8 | 6^n - 2^n = 2^n(3^n - 1)$. Kako je broj $3^n - 1$ paran, to $2^{n+1} | 2^n(3^n - 1)$, pa i $8 = 2^3 | 2^n(3^n - 1)$ (jer je $n \geq 2$).

Neka je sada n stepen broja 2, tj. $n = 2^k$. Sada su svi pravi djelioci od n oblika 2^t, gdje je $0 \leq t < k$. Kako je broj

$$\begin{aligned} a^n - 2^n = a^{2^k} - 2^{2^k} &= \left(a^{2^{k-1}} - 2^{2^{k-1}}\right)\left(a^{2^{k-1}} + 2^{2^{k-1}}\right) \\ &= \left(a^{2^{k-2}} - 2^{2^{k-2}}\right)\left(a^{2^{k-2}} + 2^{2^{k-2}}\right)\left(a^{2^{k-1}} + 2^{2^{k-1}}\right) = \cdots \\ &= (a-2)(a+2)(a^2 + 2^2)(a^4 + 2^4) \ldots (a^{2^{k-1}} + 2^{2^{k-1}}) \end{aligned}$$

djeljiv sa svim brojevima oblika $a^{2^t} + 2^{2^t}, 0 \leq t < k$, to tvrdnja vrijedi za svako $a > 2$.

Neka sada n nije ni prost ni stepen dvice. Ako je e neparan prost djelioc od n, tada je $n = de$, gdje je $d > 1$ pravi djelioc od n. Sada je $a^n - 2^n = a^n + 2^n - 2^{n+1} = \left(a^d\right)^e + \left(2^d\right)^e - 2^{n+1}$, pa kako je $\left(a^d\right)^e + \left(2^d\right)^e$ djeljivo sa $a^d + 2^d$, to $a^d + 2^d | 2^{n+1}$, pa je $a^d + 2^d = 2^k$, gdje je $d < k \leq n + 1$. Očigledno je broj a paran, pa dijeljenjem sa 2^d imamo $\left(\frac{a}{2}\right)^d + 1 = 2^{k-d}$. Jasno je da je broj $\frac{a}{2}$ neparan. Ako je d paran broj, onda je $\left(\frac{a}{2}\right)^d + 1 \equiv 2 (mod\ 4)$, pa je $k - d = 2$. Međutim, onda je $\left(\frac{a}{2}\right)^d = 1$, što je nemoguće zbog $a > 2$. Ako je d neparan broj, onda imamo

$$2^{k-d} = \left(\frac{a}{2}\right)^d + 1 = \left(\frac{a}{2} + 1\right)\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{d-1} - \left(\frac{a}{2}\right)^{d-2} + \cdots + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a}{2} + 1\right).$$

U drugoj zagradi imamo neparan broj neparnih sabiraka (ukupno d), pa je ona neparna. S druge strane, kako je $\frac{a}{2} > 1$, to je $\left(\frac{a}{2}\right)^k > \left(\frac{a}{2}\right)^{k-1}$, pa je za $d > 1$ i ta zagrada veća od 1. Međutim, to je očigledna kontradikcija, jer broj 2^{k-d} nema neparan djelioc veći od 1.

Dakle, rješenja su svi prosti brojevi i svi stepeni broja dva.

Šema bodovanja:

- dokaz da prosti brojevi zadovoljavaju uslove zadatka: 3 boda
- dokaz da stepeni broja dva zadovoljavaju uslove zadatka: 3 boda
- dokaz da ako n nije stepen dvice i ako je d djelilac takav da je $\frac{n}{d}$ neparan, tada je $a^d + 2^d = 2^k$, gdje je $d < k \leq n + 1$: 6 bodova (4 boda ako se samo zaključi da $a^d + 2^d | 2^{n+1}$)
- završetak dokaza: 8 bodova (3 boda za parno d i 5 bodova za neparno d, pri čemu učenik gubi 2 boda ukoliko nije objasnio zašto može odabrati $d > 1$)

Zadatak 5. Neka je n prirodan broj te neka su $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ realni brojevi iz intervala $(0, \frac{\pi}{2})$ takvi da vrijedi

$$\operatorname{tg}\left(a_0 - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(a_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \cdots + \operatorname{tg}\left(a_n - \frac{\pi}{4}\right) \geq n - 1.$$

Dokazati da je $\operatorname{tg}(a_0) \cdot \operatorname{tg}(a_1) \cdot \dots \cdot \operatorname{tg}(a_n) \geq n^{n+1}$.

Rješenje. Neka je $b_i = \operatorname{tg}\left(a_i - \frac{\pi}{4}\right)$, za $i \in \{0,1,\dots,n\}$. Kako $a_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to $a_i - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, pa $b_i \in (-1,1)$. Kako je $b_i = \operatorname{tg}\left(a_i - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}(a_i) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg}(a_1) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\operatorname{tg}(a_1) - 1}{1 + \operatorname{tg}(a_1)}$, dobijamo $\operatorname{tg}(a_1) = \frac{1+b_i}{1-b_i}$. Dakle, trebamo dokazati da ako $b_i \in (-1,1)$ za sve $i \in \{0,1,\dots,n\}$ i pritom vrijedi

$$b_0 + b_1 + \cdots + b_n \geq n - 1, \quad (*)$$

da tada vrijedi $\frac{1+b_0}{1-b_0} \cdot \frac{1+b_1}{1-b_1} \cdot \dots \cdot \frac{1+b_n}{1-b_n} \geq n^{n+1}$.

Primijetimo da $(*)$ možemo napisati u obliku

$$1 + b_i \geq (1 - b_0) + (1 - b_1) + \cdots + (1 - b_{i-1}) + (1 - b_{i+1}) + \cdots (1 - b_n).$$

Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine (brojevi $1 - b_i$ su pozitivni za sve i) dobijamo

$$\begin{aligned} 1 + b_i &\geq (1 - b_0) + (1 - b_1) + \cdots + (1 - b_{i-1}) + (1 - b_{i+1}) + \cdots (1 - b_n) \geq \\ &\geq n \cdot \sqrt[n]{(1 - b_0) \cdot (1 - b_1) \cdot \dots \cdot (1 - b_{i-1}) \cdot (1 - b_{i+1}) \cdot \dots \cdot (1 - b_n)}. \end{aligned}$$

Množenjem ovih nejednakosti za $i = 0,1,2,\dots,n$ (smijemo množiti jer su i brojevi $1 + b_i$ pozitivni) dobijamo

$$(1 + b_0)(1 + b_1) \dots (1 + b_n) \geq n^{n+1} \cdot (1 - b_0)(1 - b_1) \dots (1 - b_n).$$

Dijeljenjem prethodne nejednakosti sa $(1 - b_0)(1 - b_1) \dots (1 - b_n) > 0$ dobijamo traženu nejednakost.

Šema bodovanja:

- uvođenje smjene te zapisivanje zadatka samo u funkciji od brojeva $b_0, b_1, \dots, b_n$ (uz navođenje kojem intervalu pripadaju ovi brojevi): 4 boda
- zapisivanje uslova $(*)$ u obliku $1 + b_i \geq (1 - b_0) + \cdots + (1 - b_{i-1}) + (1 - b_{i+1}) + \cdots (1 - b_n)$: 3 boda
- dobijanje nejednakosti (za bilo koje i) $1 + b_i \geq n \cdot \sqrt[n]{(1 - b_0) \cdot \dots \cdot (1 - b_{i-1}) \cdot (1 - b_{i+1}) \cdot \dots \cdot (1 - b_n)}$: 6 bodova
- završetak dokaza: 7 bodova

Napomena: Ako je učenik zaključio kojem intervalu pripadaju brojevi b_i, ali nije naglasio da su brojevi $1 - b_i$ pozitivni prilikom korištenja nejednakosti, gubi 1 bod. Isto vrijedi za brojeve $1 + b_i$ prilikom množenja nejednakosti. Međutim, ako učenik nije razmatrao kojem intervalu pripadaju brojevi b_i, umjesto jednog boda, gubi 3 boda (ukupno 6).

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
15. marta/ožujka 2023.

Rješenja zadataka i šema bodovanja za IV razred

Zadatak 1. Ako je f funkcija takva da je $f(1)=2$ i $f(n+1)=\frac{3f(n)+1}{3}$ za sve $n\in\mathbb{N}$, odrediti vrijednost $f(2023)$.

Rješenje 1: Napišimo nekoliko prvih vrijednosti funkcije f. Imamo:
$f(1)=2=\frac{6}{3},\ f(2)=\frac{3f(1)+1}{3}=\frac{7}{3},\ f(3)=\frac{3f(2)+1}{3}=\frac{8}{3},\ f(4)=\frac{3f(3)+1}{3}=\frac{9}{3}$.
Možemo pretpostaviti da je $f(n)=\frac{n+5}{3}$ za sve $n\in\mathbb{N}$. Dokažimo ovu formulu matematičkom indukcijom.
Za $n=1$ je $f(1)=\frac{1+5}{3}=2$, što je tačno.
Pretpostavimo da formula vrijedi za neki $n\in\mathbb{N}$, tj. da vrijedi da je $f(n)=\frac{n+5}{3}$ za neki prirodan broj n.
Pokažimo da formula vrijedi i za $n+1$. Imamo

$$f(n+1)=\frac{3f(n)+1}{3}=\frac{3\cdot\frac{n+5}{3}+1}{3}=\frac{n+6}{3}=\frac{(n+1)+5}{3}.$$

Na osnovu principa matematičke indukcije vidimo da formula $f(n)=\frac{n+5}{3}$ vrijedi za svaki prirodan broj n.
Sada imamo

$$f(2023)=\frac{2023+5}{3}=\frac{2028}{3}=676.$$

Šema bodovanja:

- računanje nekoliko prvih vrijednosti, npr. $f(2)=\frac{3f(1)+1}{3}=\frac{7}{3},\ f(3)=\frac{3f(2)+1}{3}=\frac{8}{3}$, ...: **1 bod**
- pretpostavka da je $f(n)=\frac{n+5}{3}$ za sve $n\in\mathbb{N}$: **5 bodova**
- prva dva tačno izvedena/postavljena koraka indukcije: **6 bodova** (3+3 boda)
- ispravno proveden korak indukcije za $n+1$: **6 bodova**
- dobijanje broja 676: **2 boda**

Rješenje 2: Iz uslova koji je dat slijedi da za sve $n\in\mathbb{N}$ vrijedi

$$3f(n+1)-3f(n)=1.$$

Odavde vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned}&3f(2023)-3f(2022)=1,\\&3f(2022)-3f(2021)=1,\\&3f(2021)-3f(2020)=1,\\&\ldots\\&3f(3)-3f(2)=1,\\&3f(2)-3f(1)=1.\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih 2022 jednakosti i poništavanjem članova koji dolaze naizmjenično sa znakom – i +, dobijemo

$$3f(2023) - 3f(1) = 2022.$$

Uvrštavanjem $f(1) = 2$ u posljednju jednakost lako dobijemo $f(2023) = 676$.

Šema bodovanja:

- zapisivanje uslova u obliku $3f(n+1) - 3f(n) = 1$: **3 boda**
- raspisivanje uslova za konkretne smislene vrijednosti od n: **5 bodova**
- dobijanje jednakosti $3f(2023) - 3f(1) = 2022$: **10 bodova**
- dobijanje broja 676: **2 boda**

Zadatak 2. Izračunati broj načina na koje možemo postaviti 153 topa (kule) na šahovsku ploču dimenzije 2023×2023 tako da se međusobno ne napadaju.

Napomena: Top (kula) u šahu „napada“ na ploči red i kolonu u kojoj se nalazi.

Rješenje 1: Kako topovi ne bi napadali jedni druge moraju koristiti 153 različita reda i 153 različite kolone. 153 reda od 2023 redova možemo izabrati na $\binom{2023}{153}$ načina i isto tako 153 kolone od 2023 kolone možemo izabrati na $\binom{2023}{153}$ načina. Dakle, imamo $\binom{2023}{153}^2$ načina da izaberemo 153 različita reda i 153 različite kolone. Zatim moramo svakom redu dodijeliti odgovarajuću kolonu gdje će se postaviti top. To možemo učiniti na $153!$ načina. Dakle, za postavljenje topova postoji ukupno $\binom{2023}{153}^2 \cdot 153!$ načina.

Šema bodovanja:

- zaključak da za razmještaj topova moramo koristiti 153 različita reda i 153 različite kolone: **2 boda** (po 1 bod za svaki zaključak)
- zaključak da 153 reda od 2023 redova možemo izabrati na $\binom{2023}{153}$ načina: **3 boda**
- zaključak da 153 kolone od 2023 kolone možemo izabrati na $\binom{2023}{153}$ načina: **3 boda**
- zaključak da imamo $\binom{2023}{153}^2$ načina da izaberemo 153 različita reda i 153 različite kolone: **5 boda**
- zaključak da svakom redu moramo dodijeliti odgovarajuću kolonu gdje će se postaviti top: **3 boda**
- zaključak da se prethodno može učiniti na $153!$ načina: **2 boda**
- zaključak da imamo ukupno $\binom{2023}{153}^2 \cdot 153!$ načina: **2 boda**

Rješenje 2: Primijetimo prvo da postoji 2023^2 polja (načina) na koje možemo postaviti prvog topa na ploču. Postavljanjem prvog topa, na $2 \cdot 2023 - 1$ polja na ploči (polja koja su u istom redu ili koloni kao i prvi top) ne smijemo postaviti novog topa, tako da ostaje $2023^2 - 2 \cdot 2023 + 1 = 2022^2$ polja (načina) na koje možemo postaviti drugog topa. Sada nam ostaje $2022^2 - 2 \cdot 2022 + 1 = 2021^2$ polja (načina) za postavljanje trećeg topa. Nastavljajući ovaj postupak, za 153. topa nam ostaje $(2023 - 153 + 1)^2 = 1871^2$ polja (načina) na koja ga možemo postaviti. Ukupan broj ovakvih rasporeda je

$$2023^2 \cdot 2022^2 \cdot \cdots \cdot (2023 - 153 + 1)^2.$$

Primijetimo da bi nam ovo bio broj načina u slučaju da nam je bitan poredak, ili, što je ekvivalentno, da se topovi međusobno razlikuju. Pošto se topovi međusobno ne razlikuju, tj. nije nam bitan poredak kojim ih postavljamo na ploču već samo njihova konfiguracija (raspored) na ploči, posljednji broj trebamo podijeliti sa 153!. Dakle, ukupan broj načina na koji možemo postaviti 153 topa na ploču 2023×2023 tako da se međusobno ne napadaju dat je sa

$$\frac{2023^2 \cdot 2022^2 \cdot \cdots \cdot (2023-153+1)^2}{153!} = \left(\frac{2023 \cdot 2022 \cdot \cdots \cdot (2023-153+1)}{153!}\right)^2 \cdot 153! = \binom{2023}{153}^2 \cdot 153!.$$

Šema bodovanja:

- zaključak da ima 2023^2 mogućnosti za raspoređivanje prvog topa: **2 boda**
- zaključak koliko ostaje polja za raspoređivanje drugog topa i generalizacija na slučaj za n-tog topa: **6 bodova**
- dolazak do broja $2023^2 \cdot 2022^2 \cdot \cdots \cdot (2023-153+1)^2$: **4 boda**
- zaključak da nam nije bitan poredak postavljanja topova, tj. da se topovi međusobno ne razlikuju: **4 boda**
- zaključak da se prethodno može učiniti na 153! načina ako se topovi razlikuju: **2 boda**
- zaključak da imamo ukupno $\frac{2023^2 \cdot 2022^2 \cdot \cdots \cdot (2023-153+1)^2}{153!}$ načina: **2 boda**

Zadatak 3. Odrediti vrijednost broja $n \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi

$$i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + ni^n = 2022 + 2023i,$$

gdje je i imaginarna jedinica.

Rješenje 1: Stepeni imaginarne jedinice iznose

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$$

Vrijedi da je

$$i^{4k+l} = i^l, \text{ za sve } k, l \in \mathbb{N}.$$

Dakle, parni stepeni od i su realni, a neparni su čisto imaginarni. Dakle, realni dio tražene sume dat je sa $2i^2 + 4i^4 + 6i^6 + \cdots$, a čisto imaginarni dio tražene sume sa $i^1 + 3i^3 + 5i^5 + \cdots$.

Vidimo da je realni dio jednak $-2 + 4 - 6 + 10 - \cdots$. Ako imamo neparan broj članova u posljednjem brojevnom izrazu, onda ovaj izraz ima negativan znak jer je

$$-2 + 4 - 6 + 8 - 10 + \cdots = -2 + (4 - 6) + (8 - 10) + \cdots < 0.$$

Pošto nam realni dio mora biti jednak 2022, to u izrazu moramo imati paran broj članova, tako da ih možemo združiti na sljedeći način:

$$(-2 + 4) + (-6 + 8) + \cdots$$

Pošto je zbir u svakoj zagradi jednak 2, to nam ih treba 1011 i posljednji broj koji koristimo je 4044. Dakle, $n = 4044$ ili $n = 4045$ (za $n = 4046$, imali bismo da je realni dio negativan, a za $n = 4047$ realni dio bi bio za 2 veći od 2022). Kako je za $n = 4044$ imaginarni dio jednak

$$1 - 3 + 5 - \cdots - 4043 = (1 - 3) + (5 - 7) + \cdots + (4041 - 4043) = -2022,$$

a za $n = 4045$ imaginarni dio jednak

$$1 - 3 + 5 - \cdots - 4043 + 4045 = -2022 + 4045 = 2023,$$

to je traženo rješenje $n = 4045$.

Šema bodovanja:

- zaključak da je $i^{4k+l} = i^l$, za sve $k, l \in \mathbb{N}$ ili sličan zaključak o periodičnosti stepena imaginarne jedinice: **2 boda**
- razdvajanje sume na realni i imaginarni dio: **2 boda**
- zaključak da realni dio mora imati paran broj članova u sumi ili ekvivalentna tvrdnja za imaginarni dio: **7 bodova**
- zaključak da je $n = 4044$ ili $n = 4045$: **4 boda**
- razmatranje slučaja $n = 4044$: **2 boda**
- razmatranje slučaja $n = 4045$ i ispravan zaključak: **3 boda**

Rješenje 2: Kako je $i^{4k+l} = i^l$, za sve $k, l \in \mathbb{N}$, vidimo da vrijedi

$$i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 = i - 2 - 3i + 4 = 2 - 2i,$$

$$(4k+1)i^{4k+1} + (4k+2)i^{4k+2} + (4k+3)i^{4k+3} + (4k+4)i^{4k+4} =$$
$$= 4k(i + i^2 + i^3 + i^4) + i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 = 0 + 2 - 2i = 2 - 2i.$$

Možemo zaključiti da je zbir svake grupe od po 4 sabirka jednak $2 - 2i$. Razlikujemo sljedeća četiri slučaja:

1) Ako je $n = 4k$, onda je

$$2022 + 2023i = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 4ki^{4k} = k \cdot (2 - 2i) = 2k - 2ki.$$

Izjednačavanjem realnog i imaginarnog dijela nalazimo da ne postoji k takvo da istovremeno vrijedi $2k = 2022$ i $-2k = 2023$.

2) Ako je $n = 4k + 1$, onda je

$$2022 + 2023i = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 4ki^{4k} + (4k+1)i^{4k+1} =$$
$$= 2k - 2ki + (4k+1)i = 2k + (2k+1)i.$$

Izjednačavanjem realnog i imaginarnog dijela dobijemo $2k = 2022$ i $2k + 1 = 2023$, odakle je $k = 1011$. Dakle, $n = 4 \cdot 1011 + 1 = 4045$ je rješenje.

3) Ako je $n = 4k + 2$, onda je

$$2022 + 2023i = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + (4k+1)i^{4k+1} + (4k+2)i^{4k+2} =$$
$$= 2k + (2k+1)i - (4k+2) = (-2k-2) + (2k+1)i.$$

Izjednačavanjem realnog i imaginarnog dijela nalazimo da ne postoji k takvo da istovremeno vrijedi $-2k - 2 = 2022$ i $2k + 1 = 2023$.

4) Ako je $n = 4k + 3$, onda je

$$2022 + 2023i = i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + (4k+2)i^{4k+2} + (4k+3)i^{4k+3} =$$
$$= (-2k-2) + (2k+1)i - (4k+3)i = (-2k-2) + (-2k-2)i.$$

Izjednačavanjem realnog i imaginarnog dijela nalazimo da ne postoji k takvo da istovremeno vrijedi $-2k - 2 = 2022$ i $-2k - 2 = 2023$.

Dakle, jedino rješenje je $n = 4045$.

Šema bodovanja:

- zaključak da je $i^{4k+l} = i^l$, za sve $k, l \in \mathbb{N}$ ili sličan zaključak o periodičnosti stepena imaginarne jedinice: **2 boda**
- zaključak da je $(4k+1)i^{4k+1} + (4k+2)i^{4k+2} + (4k+3)i^{4k+3} + (4k+4)i^{4k+4} = 2 - 2i$: **5 bodova**

  (samo zaključak da je $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 = 2 - 2i$ vrijedi 1 bod i nije aditivan sa prethodnih 5 bodova)
- razmatranje slučajeva 1) -4): **12 bodova** (4 puta po **3 boda**)
- zaključak da je jedino rješenje $n = 4045$: **1 bod**

Zadatak 4. Neka je $k \neq 0$ cijeli broj.

a) Dokazati da je broj uređenih parova (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju uslov

$$k = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x + y}$$

konačan. Označimo taj broj sa $f(k)$.

b) Dokazati da je broj $f(k)$ neparan ako i samo ako je broj k djeljiv sa 7.

Rješenje: Množenjem sa $x + y$ dobijemo

$$x^2 - xy + 2y^2 = k(x + y).$$

Bilo koji uređeni par koji zadovoljava uslov $k = \frac{x^2-xy+2y^2}{x+y}$ je rješenje posljednje jednačine, ali jednačina $x^2 - xy + 2y^2 = k(x + y)$ može imati dodatnih rješenja koja zadovoljavaju $x + y = 0$, tj. $y = -x$.

Par $(x, -x)$ je rješenje jednačine $x^2 - xy + 2y^2 = k(x + y)$ ako i samo ako je $x^2 + x^2 + 2x^2 = 0$, tj. $x = 0$. Dakle, jednačina $x^2 - xy + 2y^2 = k(x + y)$ ima tačno jedno rješenje više od broja rješenja polazne jednačine, pa je dovoljno dokazati da jednačina $x^2 - xy + 2y^2 = k(x + y)$ ima paran broj rješenja ako i samo ako je broj k djeljivih brojem 7.

Napišimo posljednju jednačinu kao kvadratnu jednačinu po x:

$$x^2 - (y + k)x + 2y^2 - ky = 0.$$

Njena diskriminatna je data sa

$$\begin{aligned} D(y) &= (y + k)^2 - 4(2y^2 - ky) = -7y^2 + 6ky + k^2 \\ &= -7\left(y - \frac{3}{7}k\right)^2 + \frac{16}{7}k^2 = -7(y - k)(y + \frac{k}{7}). \end{aligned}$$

Vidimo da je za fiksno k diskriminanta ograničena odozgo, pa je za proizvoljan cijeli broj k diskriminanta $D(y)$ nenegativna za konačno mnogo vrijednosti y, i jednačina ima samo konačno mnogo cjelobrojnih rješenja (x, y). Ovim je dokazan dio pod a).

Ako je $D(y) > 0$ za neki cijeli broj y, onda jednačina $x^2 - (y + k)x + 2y^2 - ky = 0$ ima tačno dva realna rješenja koja mogu biti cjelobrojna samo istovremeno jer je $y + k$

cijeli broj (prema Vieteovim pravilima je $x_1 + x_2 = y + k$, pa ako je jedno od rješenja cijeli broj, mora biti i drugo). Za bilo koji takav broj y dobijemo paran broj rješenja jednačine $x^2 - (y+k)x + 2y^2 - ky = 0$.

Dalje, $D(y) = 0$ je za $y = k$ ili $y = -\frac{1}{7}k$. U prvom slučaju jednačina se svodi na $(x-k)^2 = 0$ koja ima dvostruko rješenje $x = k$ i polazna jednačina $k = \frac{x^2-xy+2y^2}{x+y}$ ima samo jedno rješenje (k,k) za koje je $y = k$. U drugom slučaju y je cijeli broj ako i samo ako je k djeljivo sa 7 i jednačina $x^2 - (y+k)x + 2y^2 - ky = 0$ ima dvostruko rješenje $x = \frac{3}{7}k$, pa je $\left(\frac{3}{7}k, -\frac{1}{7}k\right)$ jedino rješenje polazne jednačine za koje je $y = -\frac{1}{7}k$. Štaviše, dva rješenja (k,k) i $\left(\frac{3}{7}k, -\frac{1}{7}k\right)$ su različita za $k \neq 0$.

Odavde vidimo da polazna jednačina $k = \frac{x^2-xy+2y^2}{x+y}$ ima neparan broj rješenja ako i samo ako je broj k djeljivih brojem 7. Ovim je dokaz završen.

Šema bodovanja:

- Razmatranje slučaja $y = -x$, te zaključak da postoji tačno jedno dodatno rješenje nakon množenja sa $x+y$: **3 boda**
- Dokaz dijela pod a), koristeći diskriminantu ili na neki drugi način **5 bodova**
- Dokazivanje da je broj rješenja svedene kvadratne jednačine paran za $D(y) > 0$: **5 bodova**
- Dobivanje uređenih parova (k,k) i $\left(\frac{3}{7}k, -\frac{1}{7}k\right)$ kao jedinih rješenja svedene kvadratne jednačine za $D(y) = 0$: **4 boda (po 2 boda za svaki par).**
- Dokazivanje da su navedena rješenja različita za cjelobrojno $k \neq 0$ i korektan zapis zaključka o riješenom zadatku: **3 boda.**

Zadatak 5. Neka je $ABCD$ tangentni četverougao i neka njegova upisana kružnica k dodiruje stranice BC i DA u tačkama E i F, redom. Poznato je da se prave AB, FE i CD sijeku u istoj tački. Kružnice opisane oko trouglova ΔAED i ΔBFC sijeku kružnicu k po drugi put u tačkama G i H, redom. Dokazati da je $EF \parallel GH$.

Rješenje 1: Neka se prave AB, CD, EF sijeku u S, a prave AD i BC u R, te neka upisana kružnica četverougla $ABCD$ dodiruje prave AB i CD u P i Q, redom. Dokažimo najprije dvije leme:

Lema 1: Prave AC, BD, PQ i EF se sijeku u jednoj tački.

Dokaz Leme 1: Neka prava EF siječe AC u tački J_1. Tada iz sinusne teoreme na trougao AJ_1F vrijedi $\frac{AF}{AJ_1} = \frac{\sin\angle FJ_1A}{\sin\angle AFJ_1}$, a iz sinusne teoreme na trougao ECJ_1 dobijamo $\frac{CE}{CJ_1} = \frac{\sin\angle CJ_1E}{\sin\angle CEJ_1}$. Kako je $\angle FJ_1A = \angle CJ_1E$, te $\angle AFJ_1 = \angle RFE = \angle REF = 180^\circ - \angle CEF = 180^\circ - \angle CEJ_1$, to je $\frac{\sin\angle FJ_1A}{\sin\angle AFJ_1} = \frac{\sin\angle CJ_1E}{\sin\angle CEJ_1}$, pa je $\frac{AF}{AJ_1} = \frac{CE}{CJ_1}$, tj. $\frac{AJ_1}{CJ_1} = \frac{AF}{CE}$. Slično, ako prava PQ siječe AC u tački J_2, dobijamo $\frac{AJ_2}{CJ_2} = \frac{AP}{CQ}$. Kako je $AF = AP$ i $CE = CQ$, to je $\frac{AJ_1}{CJ_1} = \frac{AJ_2}{CJ_2}$, pa se tačke J_1 i J_2 poklapaju. Dakle, prave AC, PQ i EF se sijeku u jednoj tački. Analogno se dokazuje da se prave BD, PQ i EF sijeku u jednoj tački, pa se sve četiri prave sijeku u jednoj tački, što je i trebalo dokazati. Označimo tu tačku sa J.

Lema 2: Neka je $AP = AF = x, BP = BE = y, CE = CQ = z, DQ = DF = t$. Tada vrijedi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}.$$

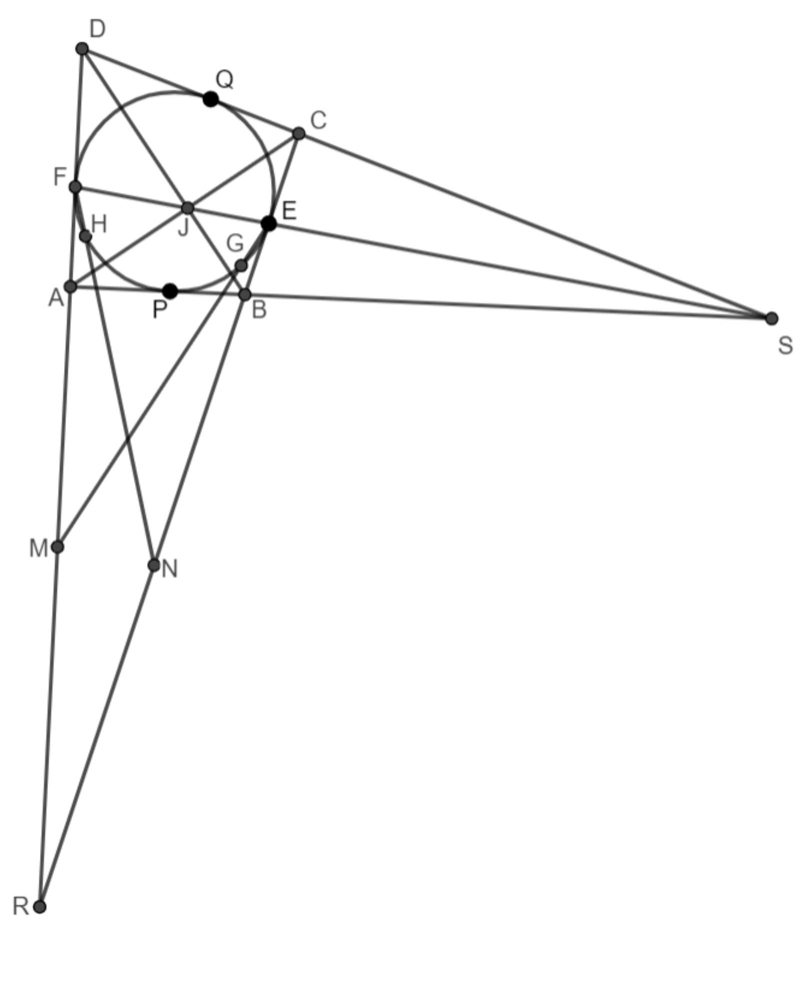
Dokaz Leme 2: Primjenjujući Menelajevu teoremu na trougao ABD i pravu $F - J - S$ (ili primjenjujući sinusne teoreme na trouglove DFJ, BJS, ASF) imamo

$$\frac{AF}{FD} \cdot \frac{DJ}{JB} \cdot \frac{BS}{AS} = 1.$$

U dokazu leme 1 smo vidjeli da je $\frac{DJ}{JB} = \frac{t}{y}$. Uz oznaku $SP = SQ = u$ dobijamo

$$\frac{x}{t} \cdot \frac{t}{y} \cdot \frac{u - y}{u + x} = 1.$$

Dakle, $\frac{u-y}{y} = \frac{u+x}{x}$, pa je $\frac{u}{y} - \frac{u}{x} = 2$, tj. $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{2}{u}$. Analogno dobijamo $\frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{u} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$, odakle slijedi tražena jednakost.



Ako je $x = t$, onda iz leme 2 slijedi $y = z$. Međutim, u ovom slučaju se lako dobija da su trouglovi SBC i SAD jednakokraki, te kako su E i F sredine AD i BC, to se zbog simetrije kružnica oko trougla AED i kružnica k dodiruju u E, tj. tačke G i E se poklapaju. Slično, tačke H i F se poklapaju, pa tvrdnja očigledno vrijedi u ovom slučaju.

Neka je bez umanjenja opštosti $t > x$. Tada je $z > y$. Neka se prave EG i AD sijeku u M (kasnije ćemo prokomentarisati zašto se sigurno sijeku, tj. zašto ne mogu biti paralelne). Iz potencije tačke M na kružnicu k imamo $MF^2 = ME \cdot MG$, dok iz potencije tačke M na kružnicu opisanu oko trougla ADE vrijedi $MA \cdot MD = ME \cdot MG$. Dakle, vrijedi $MF^2 = MA \cdot MD$. Jasno je da tačka M nije na duži AD (inače bi prava EG u tri tačke sijekla kružnicu opisanu oko trougla AED, u tačkama E, G i još jednom sa druge strane prave AD). Pretpostavimo da je poredak tačaka $M - D - F - A$. Tada je $MD \cdot MA = (MF - t)(MF + x) < (MF - t)(MF + t) = MF^2 - t^2 < MF^2 = MA \cdot MD$, što je kontradikcija. Dakle, poredak tačaka mora biti $M - A - F - D$, pa je $MF^2 = MA \cdot MD = (MF - x)(MF + t)$, odakle se dobija $MF = \frac{tx}{t-x}$. Kako je $\frac{tx}{t-x} > x$ za $t > x$, to na pravoj AD uvijek postoji tačka M takva da je $MF = \frac{tx}{t-x}$ i poredak tačaka je $M - A - F - D$, a za takvu tačku M vrijedi $MF^2 = MA \cdot MD$, tj. ona ima istu potenciju u odnosu na opisanu kružnicu trougla ADE i kružnicu k. To znači da ona pripada njihovoj radikalnoj osi, te zbog toga prava EG (koja je radikalna osa ove dvije kružnice) ne može biti paralelna pravoj AD u ovom slučaju.

Slično, zbog $z > y$ dobijamo da prave BC i FH nisu paralelne, te ako njihov presjek označimo sa N, dobijamo da je poredak tačaka $N - B - E - C$ i da vrijedi $NE = \frac{zy}{z-y}$. Međutim, zbog leme 2 je $\frac{tx}{t-x} = \frac{zy}{z-y}$, tj. $MF = NE$.

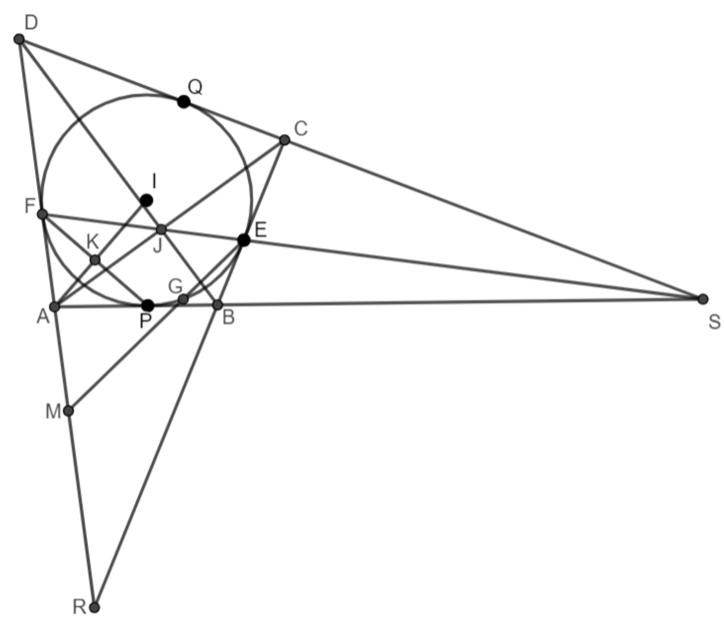
Sada su trouglovi MFE i NFE podudarni, pa je $\angle FEM = \angle EFN$, tj. $\angle FEG = \angle EFH$, odakle slijedi da je $EFHG$ jednakokraki trapez, pa je $EF || GH, q.e.d.$

Šema bodovanja:

- Navođenje i dokaz Leme 1: **3 boda**
- Navođenje i dokaz Leme 2: **6 boda**
- Uvođenje tačke M i dokazivanje redoslijeda tačaka $M - A - F - D$: **2 boda**
- Dokazivanje pripadnosti tačke M odgovarajućoj radikalnoj osi i ispravan zaključak u navedenom slučaju: **3 boda**
- Uvođenje tačke N i dokazivanje redoslijeda tačaka $N - B - E - C$: **2 boda**
- Dokazivanje podudarnosti trouglova MFE i NFE: **2 boda**
- Ispravno izvođenje i zapis traženog finalnog zaključka iz navedene podudarnosti: **2 boda.**

Rješenje 2: Uz iste oznake kao u prvom rješenju, imamo da je EF polara tačke R, pa kako S pripada polari tačke R, to i R pripada polari tačke S, tj. tačke R, P, Q su kolinearne.

Neka se prave AI i FP sijeku u K. Kako je četverougao $APIF$ tetivni, to je $KA \cdot KI = KP \cdot KF$, pa tačka K pripada radikalnoj osi kružnice opisane oko trougla ADI i kružnice k. S druge strane, kako je četverougao $APIF$ ustvari deltoid, to je K sredina duži FP. Analogno pokazujemo da sredina duži FQ pripada radikalnoj osi ove dvije kružnice, pa je radikalna os ovih kružnica ustvari srednja linija trougla FPQ, što je ujedno i srednja linija trougla FQR, zbog čega će prolaziti kroz sredinu duži FR. Označimo tu tačku sa M. Kako je AD radikalna os kružnica AED i ADI, to je M ustvari radikalni centar kružnice k i kružnica opisanih oko trouglova AED i ADI, pa su tačke $M - G - E$ kolinearne. Slično, prava FH prolazi kroz sredinu N duži RE. Sada je $MF = \frac{RF}{2} = \frac{RE}{2} = NE$, nakon čega završavamo kao u prvom rješenju.



Šema bodovanja:

- Dokazivanje da su tačke R, P, Q kolinearne: **2 boda**
- Uvođenje tačke K i dokazivanje da pripada navedenoj radikalnoj osi : **2 boda**
- Dokazivanje da je K središte duži FP: **2 boda**
- Dokazivanje da radikalna osa dvije kružnice prolazi kroz središte duži FR : **4 boda**
- Uvođenje tačke M i dokazivanje kolinearnosti $M - G - E$: **4 boda**
- Analogni dokaz (ili dobro objašnjena konstatacija) o prolasku prave FH kroz sredinu duži RE: **2 boda**
- Dokazivanje jednakosti duži MF i NE: **2 boda**
- Ispravno izvođenje i zapis traženog finalnog zaključka iz navedene podudarnosti: **2 boda.**