Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
10. marta/ožujka 2022.

I razred

Zadatak 1. Neka su a i b realni brojevi takvi da vrijedi $(a+b)^2+1=(a+1)(b+1)$. Dokazati da vrijedi $a^3-a^2=b^3-b^2$.

Zadatak 2. Riješiti u skupu realnih brojeva sljedeći sistem jednačina:

$$\frac{x-2y}{y}+\frac{2y-4}{x}+\frac{4}{xy}=0,$$
$$\frac{1}{x+y+z}+z+2=0.$$

Zadatak 3. Odrediti najveći zajednički djelilac brojeva $\underbrace{11\ldots11}_{8}$ i $\underbrace{11\ldots11}_{100}$.

Zadatak 4. Neka su A_1, B_1, C_1 redom sredine stranica BC, CA, AB trougla ΔABC u kojem vrijedi $AB > AC > BC$. Tačka C_2 je na stranici AB takva da je obim četverougla ACA_1C_2 jednak obimu trougla ΔBA_1C_2. Tačka C_3 je također na stranici AB takva da je obim četverougla BCB_1C_3 jednak obimu trougla ΔAB_1C_3. Tačka B_2 je na stranici AC takva da je obim četverougla BCB_2C_1 jednak obimu trougla ΔAB_2C_1. Dokazati da se prave A_1C_2, B_1C_3, C_1B_2 sijeku u jednoj tački.

Zadatak 5. Ploča formata 9×9 je podijeljena na jedinične kvadratiće. Na početku su svi kvadratići prazni. Dat je prirodan broj k. Emil i Lejla igraju igru. U svakom svom potezu Emil upisuje broj 0 u neki prazan kvadratić, dok u svakom svom potezu Lejla upisuje broj 1 u neki prazan kvadratić. Emil počinje igru, pri čemu nakon svakog Emilovog poteza slijedi tačno k Lejlinih poteza (nakon tih k Lejlinih poteza je opet Emil na potezu). Lejla je pobijedila ukoliko se nakon nekog poteza desi da je zbir brojeva u svakom redu i zbir brojeva u svakoj koloni neparan. Ukoliko popune čitavu ploču, a to se nije desilo, Emil pobjeđuje. Odrediti najmanje k za koje Lejla ima pobjedničku strategiju.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
10. marta/ožujka 2022.

II razred

Zadatak 1. Broj $t \neq 0$ je rješenje jednačine $x^3 - 12x + 8 = 0$. Dokazati da je i broj $2 - \frac{4}{t}$ rješenje ove jednačine.

Zadatak 2. Neka je $ABCD$ četverougao u kojem vrijedi $BC \parallel AD$ i $AB = CD$. Tačke X i Y su redom podnožja normala iz tjemena B i D na dijagonalu AC. Pretpostavimo da tačka X leži između tačaka A i Y, te da vrijedi $AX = 3, XY = 1, YC = 2$. Odrediti površinu četverougla $ABCD$.

Zadatak 3. Naći sve trojke (a, n, p) prirodnih brojeva a i n i prostog broja p koji zadovoljavaju jednačinu

$$2a^2 + 3a = 3p^n + 44$$

Zadatak 4. Za par kvadratnih trinoma $P(x) = x^2 + ax + b$ i $Q(x) = x^2 + cx + d$ kažemo da su *složni* ako su zadovoljeni sljedeći uslovi:

(i) $P(x)$ ima realne nule x_1 i x_2 za koje vrijedi $x_1 < x_2$
(ii) $Q(x)$ ima realne nule x_3 i x_4 za koje vrijedi $x_3 < x_4$
(iii) $x_1 + x_3$ i $x_2 + x_4$ su realne nule kvadratnog trinoma $x^2 + (a + c)x + (b + d)$

Neka je S skup kvadratnih trinoma takav da sadrži barem tri elementa i da svaka dva kvadratna trinoma iz S čine složan par. Dokazati da je broj 0 nula svakog trinoma iz S.

Zadatak 5. U razredu ima n dječaka i n djevojčica. Svaki dječak je barem jednoj djevojčici poslao čestitku za 8. mart. Pretpostavimo da je moguće na jedinstven način dječake i djevojčice podijeliti u n parova (svaki par čine jedan dječak i jedna djevojčica) tako da vrijedi da je svaki dječak poslao čestitku djevojčici s kojom je u paru. Koliko je najviše moglo biti ukupno poslanih čestitki?

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

10. marta/ožujka 2022.

III razred

Zadatak 1. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + ia$ i $z_2 = 1 + \frac{2i}{a}$, za $a \in \mathbb{R}$. Odrediti sve vrijednosti realnog parametra a za koje je u kompleksnoj ravni udaljenost broja z_1 od koordinatnog početka veća od udaljenosti broja z_2 od koordinatnog početka.

Zadatak 2. Dato je 169 lampi od kojih svaka ima prekidač pomoću kojeg sa pali, odnosno gasi. Koristeći daljinski upravljač moguće je u jednom potezu okrenuti prekidač na tačno 19 lampi, s tim da kad god se koristi daljinski upravljač, moguće je odabrati na kojih 19 lampi želimo okrenuti prekidač.

a) Ako su na početku neke lampe upaljene, da li je uvijek moguće postići da nakon nekoliko poteza sve lampe budu ugašene?

b) Ako su na početku sve lampe upaljene, koliko minimalno poteza je potrebno da se sve lampe ugase?

Zadatak 3. Neka je S skup svih parabola $y = x^2 + px + q$ u ravni, pri čemu su p i q realni brojevi, koje sijeku koordinatne ose u tačno tri različite tačke. Za svaku parabolu u S, posmatrajmo kružnicu opisanu oko trougla kojeg čine tri presječne tačke te parabole sa koordinatnim osama. Dokazati da postoji tačka u ravni koja leži na svim ovim kružnicma i odrediti koja je to tačka.

Zadatak 4. Neka je $p = \overline{abc}$ trocifren prost broj. Dokazati da jednačina $ax^2 + bx + c = 0$ nema racionalnih rješenja.

Zadatak 5. Neka su $a < b < c$ realni brojevi takvi da je $a + b + c = 6$ i $ab + bc + ca = 9$. Dokazati da vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 - a - 4b - 7c + 15 < 0$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.

Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA
10. marta/ožujka 2022.

IV razred

Zadatak 1. Dokazati da je $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ za sve prirodne brojeve n.

Zadatak 2. Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC. Ako je $AI = BC$ i $\measuredangle ACB = 2\measuredangle BAC$, odrediti uglove trougla ABC.

Zadatak 3. Neka je a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 permutacija brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6 koja zadovoljava sljedeći uslov: za bilo koji $j \in \{1,2,3,4,5\}$ svaka permutacija od $a_1, a_2, \dots, a_j$ nije permutacija od brojeva $1,2,\dots,j$. Pronađite ukupan broj permutacija koje zadovoljavaju dati uslov.

Zadatak 4. Naći sve parove (n, k) prirodnih brojeva n i k koji su rješenja jednadžbe

$$(n-1)! = n^k - 1.$$

Zadatak 5. Izračunati sumu

$$\sum_{\mathrm{j}=0}^{674} \binom{2022}{3\mathrm{j}} = \binom{2022}{0} + \binom{2022}{3} + \cdots + \binom{2022}{2019} + \binom{2022}{2022}.$$

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Rješenja zadataka za I razred

Zadatak 1. Neka su a i b realni brojevi takvi da vrijedi $(a+b)^2+1=(a+1)(b+1)$. Dokazati da vrijedi $a^3-a^2=b^3-b^2$.

Rješenje: Imamo

$$(a+b)^2+1=(a+1)(b+1) \quad \Leftrightarrow$$

$$a^2+2ab+b^2+1=ab+a+b+1 \quad \Leftrightarrow$$

$$a^2+ab+b^2=a+b.$$

Množenjem posljednje jednakosti sa $(a-b)$ dobijamo

$$(a^2+ab+b^2)(a-b)=(a+b)(a-b) \quad \Leftrightarrow$$

$$a^3-b^3=a^2-b^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$a^3-a^2=b^3-b^2,$$

što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- 5 bodova za dobijanje jednakosti $a^2+ab+b^2=a+b$;
- 10 bodova za zapisivanje jednakosti $a^3-a^2=b^3-b^2$ u obliku $(a^2+ab+b^2)(a-b)=(a+b)(a-b)$;
- 5 bodova za završetak dokaza.

Zadatak 2. Riješiti u skupu realnih brojeva sljedeći sistem jednačina:

$$\frac{x-2y}{y}+\frac{2y-4}{x}+\frac{4}{xy}=0,$$

$$\frac{1}{x+y+z}+z+2=0.$$

Rješenje: Definiciono područje datog sistema je $xy \neq 0$ i $x+y+z \neq 0$. Množeći prvu jednačinu sa xy dobijamo

$$x(x-2y)+y(2y-4)+4=0 \iff$$

$$x^2-2xy+2y^2-4y+4=0 \iff$$

$$(x^2-2xy+y^2)+(y^2-4y+4)=0 \iff$$

$$(x-y)^2+(y-2)^2=0.$$

Kako je kvadrat realnog broja uvijek nenegativan, to je prethodna jednakost moguća samo za $x=y=2$. Sada druga jednačina sistema postaje

$$\frac{1}{4+z}+z+2=0 \iff$$

$$1+4z+8+z^2+2z=0 \iff$$

$$z^2+6z+9=0 \iff$$

$$(z+3)^2=0 \iff$$

$$z=-3.$$

Provjerom dobijamo da je $x=y=2, z=-3$ zaista rješenje datog sistema.

Šema bodovanja:

- 9 bodova za dobijanje jednakosti $(x-y)^2+(y-2)^2=0$;
- 2 boda za zaključak $x=y=2$;
- 6 bodova za dobijanje jednakosti $(z+3)^2=0$;
- 2 boda za zaključak $z=-3$;
- 1 bod za konstatovanje da dobijeno rješenje zaista zadovoljava jednačine sistema (ili da pripada definicionom području).

Zadatak 3. Odrediti najveći zajednički djelilac brojeva $\underbrace{11\ldots11}_{8}$ i $\underbrace{11\ldots11}_{100}$.

Rješenje: Kako su brojevi 8 i 100 djeljivi sa 4, primijetimo da su oba broja djeljiva sa 1111 (to možemo dobiti prostim dijeljenjem tih brojeva sa 1111, ili ako uočimo da je $\underbrace{11\ldots11}_{8} = 1111 \cdot 10001$, a $\underbrace{11\ldots11}_{100} = 1111 \cdot \underbrace{10001001\ldots10001}_{97}$). Dokažimo da je to najveći zajednički djelilac datih brojeva.

S druge strane, na isti način dokazujemo da je broj $\underbrace{11\ldots11}_{96}$ djeljiv sa $\underbrace{11\ldots11}_{8}$ (jer je 96 djeljivo sa 8), pa je i broj $\underbrace{11\ldots11}_{96}0000$ djeljiv sa $\underbrace{11\ldots11}_{8}$. Odatle zaključujemo da broj $\underbrace{11\ldots11}_{100}$ daje ostatak 1111 pri dijeljenju sa $\underbrace{11\ldots11}_{8}$. Dakle, vrijedi $\underbrace{11\ldots11}_{100} = q \cdot \underbrace{11\ldots11}_{8} + 1111$, za neki prirodan broj q. Ako je d najveći zajednički djelilac brojeva $\underbrace{11\ldots11}_{8}$ i $\underbrace{11\ldots11}_{100}$, iz prethodne jednakosti zaključujemo da $d|1111$. Dakle, $d \leq 1111$. Kako smo već dokazali da 1111 dijeli oba broja, to je 1111 najveći zajednički djelilac datih brojeva.

Šema bodovanja:

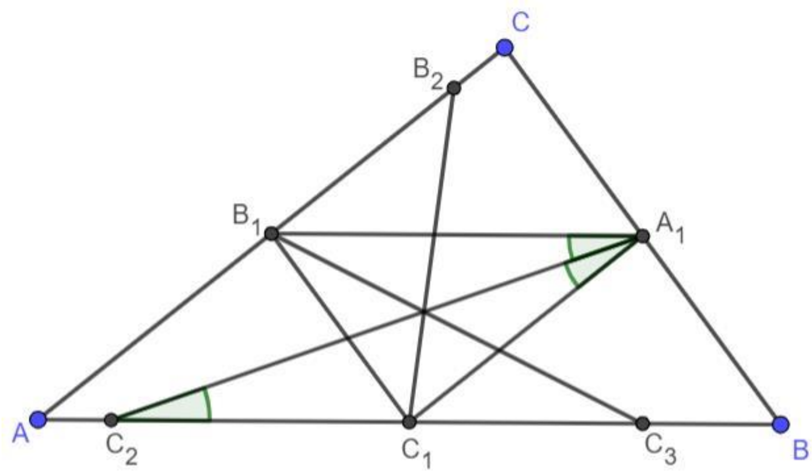
Oba dijela zadatka se mogu uraditi na dosta načina. Te dijelove bodujemo na sljedeći način:

- 4 boda za dokaz da broj 1111 dijeli oba data broja;
- 16 bodova za dokaz da ne postoji veći broj koji dijeli te brojeve.

Zadatak 4. Neka su A_1, B_1, C_1 redom sredine stranica BC, CA, AB trougla ΔABC u kojem vrijedi $AB > AC > BC$. Tačka C_2 je na stranici AB takva da je obim četverougla ACA_1C_2 jednak obimu trougla ΔBA_1C_2. Tačka C_3 je također na stranici AB takva da je obim četverougla BCB_1C_3 jednak obimu trougla ΔAB_1C_3. Tačka B_2 je na stranici AC takva da je obim četverougla BCB_2C_1 jednak obimu trougla ΔAB_2C_1. Dokazati da se prave A_1C_2, B_1C_3, C_1B_2 sijeku u jednoj tački.

Rješenje: Kako je obim četverougla ACA_1C_2 jednak obimu trougla ΔBA_1C_2, te uz to vrijedi $CA_1 = BA_1$, to dobijamo $AC + CA_1 + A_1C_2 + C_2A = BA_1 + A_1C_2 + C_2B \iff AC + C_2A = C_2B \iff AC + AB - C_2B = C_2B \iff C_2B = \frac{AB+AC}{2}$.

Kako je $C_2B = C_2C_1 + C_1B = C_2C_1 + \frac{AB}{2}$, to je $C_2C_1 = \frac{AC}{2}$. Međutim, kako je C_1A_1 srednja linija trougla ΔABC, to je $C_1A_1 = \frac{AC}{2} = C_2C_1$, pa je $\measuredangle C_1C_2A_1 = \measuredangle C_1A_1C_2$. S druge strane, i B_1A_1 je srednja linija trougla ΔABC, pa je $B_1A_1 || AB$. Tada zbog jednakosti uglova na transverzali vrijedi $\measuredangle B_1A_1C_2 = \measuredangle C_1C_2A_1 = \measuredangle C_1A_1C_2$, pa je A_1C_2 simetrala ugla $\angle B_1A_1C_1$. Analogno pokazujemo da je C_1B_2 simetrala ugla $\angle B_1C_1A_1$, te da je B_1C_3 simetrala ugla $\angle A_1B_1C_1$. Kako se simetrale uglova trougla sijeku u jednoj tački (centru upisane kružnice tog trougla), to zaključujemo da se prave A_1C_2, B_1C_3, C_1B_2 sijeku u jednoj tački, što je i trebalo dokazati.

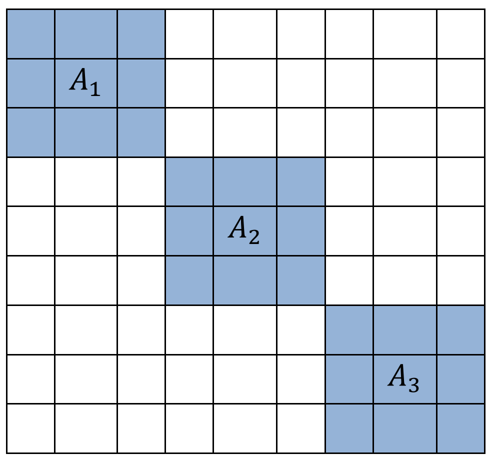


Šema bodovanja:

- 5 bodova za $C_2C_1 = \frac{AC}{2}$;
- 3 boda za $C_1A_1 = C_2C_1$;
- 2 boda za $\measuredangle C_1C_2A_1 = \measuredangle C_1A_1C_2$;
- 3 boda za $\measuredangle B_1A_1C_2 = \measuredangle C_1C_2A_1$;
- 2 boda za zaključak da je C_1B_2 simetrala ugla $\angle B_1C_1A_1$;
- 5 bodova za zaključak da se prave sijeku u jednoj tački.

Zadatak 5. Ploča formata 9×9 je podijeljena na jedinične kvadratiće. Na početku su svi kvadratići prazni. Dat je prirodan broj k. Emil i Lejla igraju igru. U svakom svom potezu Emil upisuje broj 0 u neki prazan kvadratić, dok u svakom svom potezu Lejla upisuje broj 1 u neki prazan kvadratić. Emil počinje igru, pri čemu nakon svakog Emilovog poteza slijedi tačno k Lejlinih poteza (nakon tih k Lejlinih poteza je opet Emil na potezu). Lejla je pobijedila ukoliko se nakon nekog poteza desi da je zbir brojeva u svakom redu i zbir brojeva u svakoj koloni neparan. Ukoliko popune čitavu ploču, a to se nije desilo, Emil pobjeđuje. Odrediti najmanje k za koje Lejla ima pobjedničku strategiju.

Rješenje: Dokažimo prvo da Lejla ima pobjedničku strategiju za $k = 3$. Posmatrajmo tri 3×3 kvadrata A_1, A_2, A_3 (pogledati sliku ispod). Nazovimo neki 3×3 kvadrat pokrivenim ako se u svakom njegovom redu i svakoj njegovoj koloni nalazi po tačno jedna jedinica. Ako Lejla pokrije kvadrate A_1, A_2, A_3, bez upisivanja brojeva u ostale kvadratiće, pobijedila je, jer će se u svakom redu i svakoj koloni cijele ploče nalaziti po jedna, tj. neparan broj jedinica.



Očito je da ako se nakon nekog Emilovog poteza u nekom 3×3 kvadratu nalazi najviše jedna 0 (i nijedna 1), Lejla može pokriti taj 3×3 kvadrat (jer je $k = 3$, pa u tri poteza neovisno od pozicije eventualne 0 u tom kvadratu, ona može pokriti taj kvadrat). Lejlina strategija je sada sljedeća: ako Emil upiše 0 u neki nepokriveni kvadrat A_1, A_2 ili A_3, Lejla taj kvadrat odmah pokrije, a u suprotnom pokrije bilo koji nepokriveni kvadrat među A_1, A_2 i A_3. Dakle, Lejla će pobijediti nakon 3 runde.

Dokažimo sada da Emil ima pobjedničku strategiju za $k = 1$ i $k = 2$. Primijetimo prvo da ako Lejla ima pobjedničku strategiju, onda se u trenutku prije njenog pobjedničkog poteza (pobjednički potez za Lejlu mora biti neki njen potez, pošto se upisivanjem 0 na ploču ne mijenja parnost zbirova redova i kolona) na ploči nalazi 8 redova i 8 kolona sa neparnim zbirom, a red i kolona u koje je upisala pobjedničku jedinicu imaju paran zbir. Dakle, ako Lejla ima pobjednički potez, taj potez je jedinstven (tj. ona jedinicu mora upisati u presjek reda i kolone sa parnim zbirom, naravno ako je to polje slobodno).

Sada je očigledno da Emil ima pobjedničku strategiju za $k = 1$. Naime, dovoljno je da u svom potezu odigra na polje koje je eventualno pobjedničko za Lejlu (dokazali da je to polje jedinstveno) i na taj način bi spriječio Lejlu da pobijedi. Nastavljajući ovako, cijela ploča će se popuniti bez da Lejla pobijedi, tj. u slučaju $k = 1$ Emil ima pobjedničku strategiju.

U slučaju $k = 2$, Emil će koristiti istu strategiju kao i za $k = 1$. Ova strategija ne dopušta Lejli da pobijedi u svom prvom od dva poteza. Međutim, Lejla ne može pobijediti ni nakon svog drugog poteza, pošto bi u tom trenutku na ploči bio ukupno paran broj jedinica, a kako ploča ukupno ima neparan broj redova, neki red bi morao sadržati paran broj jedinica. Dakle, i za $k = 2$ Emil ima pobjedničku strategiju.

Zaključujemo da je $k = 3$ najmanja vrijednost broja k za koju Lejla ima pobjedničku strategiju.

Šema bodovanja:

- 7 bodova za dokaz da za $k = 3$ Lejla ima pobjedničku strategiju;
- 5 bodova za dokaz da za $k = 1$ Emil ima pobjedničku strategiju;
- 8 bodova za dokaz da za $k = 2$ Emil ima pobjedničku strategiju.

Rješenja zadataka za II razred

Zadatak 1. Broj $t \neq 0$ je rješenje jednačine $x^3 - 12x + 8 = 0$. Dokazati da je i broj $2 - \frac{4}{t}$ rješenje ove jednačine.

Rješenje:

Označimo $P(x) = x^3 - 12x + 8$. Kako je t rješenje date jednačine, vrijedi $P(t) = 0$. Pokažimo da je i $2 - \frac{4}{t}$ rješenje date jednačine, tj. da je $P\left(2 - \frac{4}{t}\right) = 0$. Imamo

$$
\begin{aligned}
P\left(2-\frac{4}{t}\right) &= \left(2-\frac{4}{t}\right)^3 - 12\left(2-\frac{4}{t}\right) + 8 \\
&= 2^3 - 3\cdot 2^2 \cdot \frac{4}{t} + 3\cdot 2\cdot\left(\frac{4}{t}\right)^2 - \left(\frac{4}{t}\right)^3 - 24 + \frac{48}{t} + 8 \\
&= 8 - \frac{48}{t} + \frac{96}{t^2} - \frac{64}{t^3} - 24 + \frac{48}{t} + 8 = -8 + \frac{96}{t^2} - \frac{64}{t^3} \\
&= -\frac{8}{t^3}\cdot(t^3 - 12t + 8) = -\frac{8}{t^3}\cdot P(t) = 0
\end{aligned}
$$

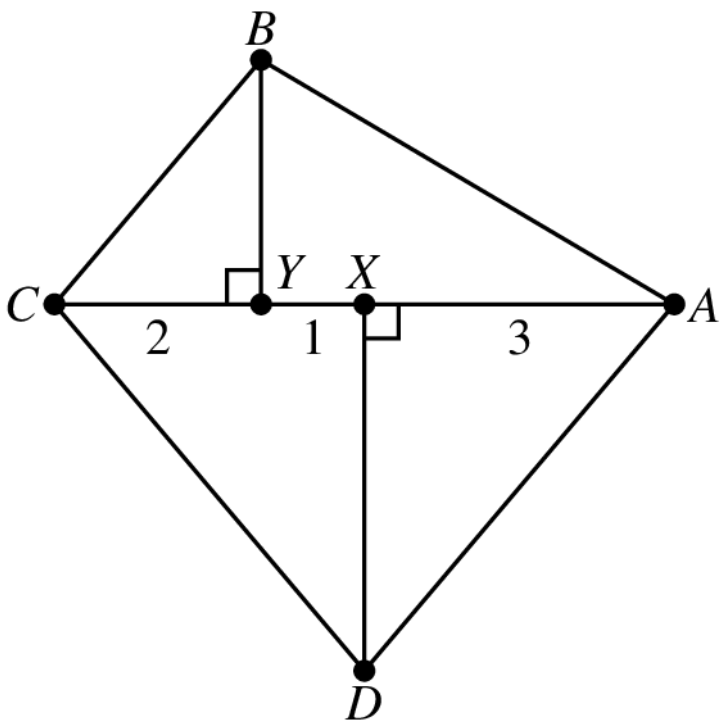
Ovim je dokaz završen.

Šema bodovanja:

- Uvrštavanje $x = 2 - \frac{4}{t}$ u jednačinu: 5 bodova
- Dobivanje izraza $-8 + \frac{96}{t^2} - \frac{64}{t^3}$ ili njemu ekvivalentnog: 4 boda
- Faktorisanje izraza u obliku $= -\frac{8}{t^3}\cdot(t^3 - 12t + 8)$: 4 boda
- Zaključak da je $t^3 - 12t + 8 = 0$ po uslovu zadatka: 5 bodova
- Privođenje dokaza kraju: 2 boda

Zadatak 2. Neka je $ABCD$ jednakokraki trapez u kojem je $BC \parallel AD$. Tačke X i Y su redom podnožja normala iz tjemena B i D na dijagonalu AC. Pretpostavimo da tačka X leži između tačaka A i Y, te da vrijedi $AX = 3, XY = 1, YC = 2$. Odrediti površinu trapeza $ABCD$.

Rješenje:



Iz $BC \parallel AD$ dobijamo $\angle BCA = \angle CAD$ (transverzalni uglovi), odnosno $\angle BCY = \angle XAD$. Sada imamo $\angle BCY = \angle DAX$ i $\angle BYC = \angle AXD = 90°$, pa su trouglovi BYC i AXD slični. Označimo sa h dužinu duži DX. Iz navedene sličnosti imamo

$$\frac{BY}{DX} = \frac{CY}{AX} = \frac{2}{3}$$

pa je $BY = \frac{2}{3} \cdot DX = \frac{2}{3}h$. Primijenimo sada Pitagorinu teoremu na trouglove AYB i CXD. Imamo $AY^2 + BY^2 = AB^2$ i $CX^2 + DX^2 = CD^2$. Kako je po uslovu zadatka $AB = CD$, iz posljednje dvije jednakosti dobijamo $AY^2 + BY^2 = CX^2 + DX^2$, odnosno

$$4^2 + \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = 3^2 + h^2 \Leftrightarrow$$

$$h^2 - \frac{4}{9}h^2 = 16 - 9 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{9}h^2 = 7 \Leftrightarrow$$

Dakle, $DX = 3\sqrt{\frac{7}{5}}$ i $BY = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{\frac{7}{5}} = 2\sqrt{\frac{7}{5}}$. Sada imamo

$$h = 3\sqrt{\frac{7}{5}}$$

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{CDA} = \frac{1}{2} \cdot BY \cdot AC + \frac{1}{2} \cdot DX \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot (BY + DX)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5\sqrt{\frac{7}{5}} = 15\sqrt{\frac{7}{5}} = 3 \cdot \sqrt{25 \cdot \frac{7}{5}} = 3\sqrt{35}$$

Šema bodovanja:

- Sličnost trouglova AXD i BYC: 3 boda
- Dobivanje odnosa $\frac{BY}{DX}$: 3 boda
- Primjena Pitagorine teoreme na trouglove AYB i CXD: 4 boda
- Dobivanje jednačine $4^2 + \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = 3^2 + h^2$ ili njoj ekvivalentne: 5 bodova
- Dobivanje dužina duži BY i DX: 2 boda
- Dobivanje tačnog rezultata: 3 boda

Zadatak 3. Naći sve trojke (a, n, p) prirodnih brojeva, pri čemu je broj p prost, takve da vrijedi

$$2a^2 + 3a = 3p^n + 44.$$

Rješenje:

Data jednačina je ekvivalentna sa $2a^2 + 3a - 44 = 3p^n$. Imamo

$$2a^2 + 3a - 44 = 2a^2 - 8a + 11a - 44 = 2a(a-4) + 11(a-4)$$
$$= (2a+11)(a-4)$$

pa jednačina postaje $(2a + 11)(a - 4) = 3p^n$. Zaključujemo da je među brojevima $2a + 11$ i $a - 4$ jedan oblika $3 \cdot p^u$, a drugi oblika p^v, pri čemu su u, v nenegativni cijeli brojevi za koje vrijedi $u + v = n$. Kako je

$$nzd(2a + 11, a - 4) = nzd(2a + 11 - 2(a - 4), a - 4) = nzd(19, a - 4)$$

to imamo $nzd(2a + 11, a - 4) \in \{1, 19\}$. Jasno, ovaj najveći zajednički djelilac može biti jednak 19 samo ako je $p = 19$. Stoga razmatramo dva slučaja:

1° $p = 19$

Ako je $n = 1$, tada su zbog $2a + 11 \geq 13$ jedini mogući slučajevi $(2a + 11, a - 4) = (19, 3)$ i $(2a + 11, a - 4) = (3 \cdot 19, 1) = (57, 1)$. Oba slučaja otpadaju. Dakle, $n \geq 2$. Zbog $nzd(2a + 11, a - 4) \in \{1, 19\}$ i $2a + 11 \geq 13$, mogući slučajevi su:

(i) $2a + 11 = 3 \cdot 19^n$ i $a - 4 = 1$
Dobijamo $a = 5$, pa je $3 \cdot 19^n = 2 \cdot 5 + 11 = 21$, što nema rješenja.

(ii) $2a + 11 = 3 \cdot 19^{n-1}$ i $a - 4 = 19$
Dobijamo $a = 24$, pa je $3 \cdot 19^{n-1} = 2 \cdot 24 + 11 = 59$, što nema rješenja.

(iii) $2a + 11 = 19^n$ i $a - 4 = 3$
Dobijamo $a = 7$, pa je $19^n = 2 \cdot 7 + 11 = 25$, što nema rješenja.

(iv) $2a + 11 = 3 \cdot 19 = 57$ i $a - 4 = 19^{n-1}$
Dobijamo $a = 23$, pa je $19^{n-1} = 23 - 4 = 19$, tj. $n - 1 = 1$. Dakle, jedno rješenje je $(a, n, p) = (23, 2, 19)$

(v) $2a + 11 = 19^{n-1}$ i $a - 4 = 3 \cdot 19 = 57$
Dobijamo $a = 61$, pa je $19^{n-1} = 2 \cdot 61 + 11 = 133$, što nema rješenja.

(vi) $2a + 11 = 19$ i $a - 4 = 3 \cdot 19^{n-1}$
Dobijamo $a = 4$, pa je $3 \cdot 19^{n-1} = 4 - 4 = 0$, što nema rješenja.

2° $p \neq 19$

Tada su brojevi $2a + 11$ i $a - 4$ relativno prosti. Pri tome vrijedi $2a + 11 \geq 13$, pa su mogući sljedeći slučajevi:

(i) $2a + 11 = 3 \cdot p^n$ i $a - 4 = 1$
Dobijamo $a = 5$, pa je $3 \cdot p^n = 2 \cdot 5 + 11 = 21$, odakle dobijamo rješenje $(a, n, p) = (5, 1, 7)$.

(ii) $2a + 11 = p^n$ i $a - 4 = 3$

Dobijamo $a = 7$, pa je $p^n = 2 \cdot 7 + 11 = 25$, odakle dobijamo rješenje $(a, n, p) = (7, 2, 5)$

Dakle, tražene trojke (a, n, p) su $(23, 2, 19), (5, 1, 7), (7, 2, 5)$.

Šema bodovanja:

- Faktorizacija $2a^2 + 3a - 44 = (2a + 11)(a - 4)$: 3 boda
- Tvrdnja $nzd(2a + 11, a - 4) \in \{1, 19\}$: 4 boda
- Razmatranje slučajeva $p = 19$ i $p \neq 19$: 4 boda
- Navođenje svih podslučajeva u slučaju $p = 19$: 3 boda
- Nalaženje svih rješenja u slučaju $p = 19$: 2 boda
- Navođenje svih podslučajeva u slučaju $p \neq 19$: 2 boda
- Nalaženje svih rješenja u slučaju $p \neq 19$: 2 boda

Zadatak 4. Za par kvadratnih trinoma $P(x) = x^2 + ax + b$ i $Q(x) = x^2 + cx + d$ kažemo da su *složni* ako su zadovoljeni sljedeći uslovi:

(i) $P(x)$ ima realne nule x_1 i x_2 za koje vrijedi $x_1 < x_2$;

(ii) $Q(x)$ ima realne nule x_3 i x_4 za koje vrijedi $x_3 < x_4$;

(iii) $x_1 + x_3$ i $x_2 + x_4$ su nule kvadratnog trinoma $x^2 + (a + c)x + (b + d)$.

Neka je S skup kvadratnih trinoma takav da sadrži barem tri elementa i da su svaka dva kvadratna trinoma iz S *složni*. Dokazati da za svaki kvadratni trinom $R(x)$ iz S vrijedi $R(0) = 0$.

Rješenje:

Posmatrajmo proizvoljan par složnih trinoma $P(x) = x^2 + ax + b$ i $Q(x) = x^2 + cx + d$, pri čemu $P(x)$ ima realne nule $x_1 < x_2$ i $Q(x)$ ima realne nule $x_3 < x_4$. Tada su $x_1 + x_3$ i $x_2 + x_4$ nule trinoma $x^2 + (a + c)x + (b + d)$. Iz Vietovih pravila tada imamo

$$b + d = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = x_1x_2 + x_1x_4 + x_3x_2 + x_3x_4 \quad (1)$$

Kako primjenom Vietovih pravila na trinome $P(x)$ i $Q(x)$ dobijamo $x_1x_2 = b$ i $x_3x_4 = d$, iz (1) slijedi $x_1x_4 + x_2x_3 = 0$, odnosno $x_1x_4 = -x_2x_3$ (2). Ako niti jedan od brojeva x_1, x_2, x_3, x_4 nije jednak 0, tada vrijedi $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{x_3}{x_4}$. Dakle, ako par složnih polinoma nema broj 0 među svojim nulama, tada su odnosi njihovih nula različitog predznaka. Pretpostavimo da 0 nije nula nijednog trinoma iz S. Kako u S postoje barem 3 trinoma, to po Dirichletovom principu postoje dva trinoma u S čiji odnosi nula imaju isti predznak. Na osnovu prethodnog razmatranja ovo je kontradikcija s tim da svaka dva trinoma iz S čine složan par. Dakle, S sadrži trinom čija jedna nula je broj 0.

Kako relacija (2) vrijedi za nule svakog para složnih trinoma, to zaključujemo da, ako je 0 nula jednog trinoma u složnom paru, tada je nula i drugog. Pošto postoji trinom u S čija je jedna nula broj 0 i pošto on čini složan par sa svakim drugim trinomom u S, slijedi da je 0 nula svakog trinoma u S, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja

- Izvođenje relacija $x_1x_2 = b$ i $x_3x_4 = d$ primjenom Vietovih pravila na složne trinome $P(x)$ i $Q(x)$: 2 boda
- Izvođenje relacije (1) primjenom Vietovih pravila na trinom $x^2 + (a + c)x + (b + d)$: 2 boda
- Dobijanje relacije (2): 3 boda
- Zaključak da pretpostavka da par složnih trinoma nema 0 među svojim nulama implicira da su odnosi njihovih nula različitog predznaka: 4 boda
- Zaključak da je nemoguće da svi trinomi iz S imaju nenulte nule: 4 boda
- Zaključak da, ako je 0 nula jednog trinoma u složnom paru, tada je nula i drugog: 2 boda
- Kompletiranje dokaza: 3 boda

Zadatak 5. U razredu ima n dječaka i n djevojčica. Svaki dječak je barem jednoj djevojčici poslao čestitku za 8. mart. Pretpostavimo da je moguće na tačno jedan način dječake i djevojčice podijeliti u n parova (svaki par čine jedan dječak i jedna djevojčica) tako da vrijedi da je svaki dječak poslao čestitku djevojčici s kojom je u paru. Koliko je najviše moglo biti ukupno poslanih čestitki?

Rješenje:

Označimo dječake sa $b_1, b_2, \dots, b_n$ i djevojčice sa $g_1, g_2, \dots, g_n$. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je za $i = 1, 2, \dots, n$ dječak b_i poslao čestitku djevojčici g_i. Po uslovu zadatka uparivanje $(b_1, g_1), (b_2, g_2), \dots, (b_n, g_n)$ je jedino uparivanje tako da su u svakom paru dječak i djevojčica koja je primila čestitku od njega.

Posmatrajmo tablicu $n \times n$ čiji redovi odgovaraju dječacima, a kolone djevojčicama. Polje u redu i i koloni j označavamo sa (i, j). U polje (i, j) upisujemo zvjezdicu $(*)$ ako i samo ako je dječak b_i poslao čestitku djevojčici g_j. Potrebno je odrediti najveći mogući broj zvjezdica u tablici. Po pretpostavci u sva polja $(i, i), i = 1, 2, \dots n$ upisana je zvjezdica. Primijetimo da, za $i \neq j$, ne smije biti zvjezdica upisana i u polje (i, j) i u polje (j, i). Naime, tada bi zamjenom parova (b_i, g_i) i (b_j, g_j) sa (b_i, g_j) i (b_j, g_i) nastalo još jedno uparivanje koje zadovoljava uslov zadatka, pa takvo uparivanje ne bi bilo jednistveno, što je kontradikcija. Zaključujemo, za svaki par indeksa i, j u najviše jedno od polja $(i, j), (j, i)$ može biti upisana zvjezdica, pa ukupan broj zvjezdica u tablici ne može biti veći od $n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pokažimo još da se ovaj broj može dostići. Za to je dovoljno za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ u polja $(i, 1), (i, 2), \dots, (i, i)$ upisati zvjezdice, čime dobijamo da su zvjezdice u svim poljima na glavnoj dijagonali i iznad nje. Ukupan broj zvjezdica je tada $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, a očigledno postoji jedinstveno uparivanje (b_1 mora biti uparen sa g_1; b_2 mora biti uparen sa g_1 ili g_2, a sa g_1 ne može, pa mora sa g_2, itd.)

Šema bodovanja:

- Posmatranje datog jedinstvenog uparivanja (ekvivalentno označavanju dječaka i djevojčica na način dat na početku rješenja): 2 boda
- Tvrdnja ekvivalentna tvrdnji da u najviše jednom od polja $(i, j), (j, i)$ može biti upisana zvjezdica: 7 bodova
- Dobivanje gornje granice $\frac{n(n+1)}{2}$ za broj poslanih čestitki: 3 boda
- Navođenje konstrukcije koja dostiže granicu $\frac{n(n+1)}{2}$: 3 boda

- Dokaz da je ukupan broj poslanih čestitki u datoj konstrukciji jednak $\frac{n(n+1)}{2}$: 1 bod
- Dokaz da u datoj konstrukciji postoji jedinstveno uparivanje koje zadovoljava uslove navedene u zadatku: 4 boda

Rješenja zadataka za III razred

Zadatak 1. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + ia$ i $z_2 = 1 + \frac{2i}{a}$, za $a \in \mathbb{R}$. Odrediti sve vrijednosti parametra a za koje je u kompleksnoj ravni udaljenost broja z_1 od koordinatnog početka veća od udaljenosti broja z_2 od koordinatnog početka.

Rješenje. Primijetimo prvo da mora biti $a \neq 0$.

Udaljenost kompleksnog broja z od koordinatnog početka jednaka je apsolutnoj vrijednosti (modulu) tog kompleksnog broja. Dakle, iz uvjeta zadatka imamo da je

$$|z_2| < |z_1|,$$

tj.

$$\sqrt{1 + \frac{4}{a^2}} < \sqrt{4 + a^2}\,.$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo da je gornja nejednakost ekvivalentna sa

$$\frac{4 - a^4}{a^2} < 3,$$

tj.

$$\frac{4 - a^4 - 3a^2}{a^2} < 0,$$

tj, zbog $a^2 > 0$,

$$a^4 + 3a^2 - 4 > 0.$$

Faktorizacijom se uvjeravamo da je ova nejednakost ekvivalentna sa

$$(a^2 - 1)(a^2 + 4) > 0,$$

tj., zbog $a^2 + 4 > 0$,

$$a^2 - 1 > 0,$$

tj.

$$a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Šema bodovanja.

- Postavljanje uslova $|z_2| < |z_1|$: 3 boda
- Postavljanje nejednadžbe $\sqrt{1+\frac{4}{a^2}} < \sqrt{4+a^2}$: 3 boda
- Dolazak do nejednadžbe $\frac{4-a^4-3a^2}{a^2} < 0$: 3 boda
- Pokazivanje da se nejednadžba svodi na $a^4+3a^2-4>0$: 4 boda
- Rješavanje gornje nejednadžbe do konačnog rješenja: 7 bodova

Zadatak 2. Dato je 169 lampi od kojih svaka ima prekidač pomoću kojeg sa pali, odnosno gasi. Koristeći daljinski upravljač moguće je u jednom potezu okrenuti prekidač na tačno 19 lampi, s tim da kad god se koristi daljinski upravljač, moguće je odabrati na kojih 19 lampi želimo okrenuti prekidač.

a) Ako su na početku neke lampe upaljene, da li je uvijek moguće postići da nakon nekoliko poteza sve lampe budu ugašene?
b) Ako su na početku sve lampe upaljene, koliko minimalno poteza je potrebno da se sve lampe ugase?

Rješenje. a) Neka je M broj upaljenih lampi u nekom trenutku. Posmatrajmo sljedeće slučajeve:

$1°$ $M \geq 19$. Tada možemo pomoću upravljača gasiti po 19 lampi sve dok M ne postane manje od 19.

$2°$ $1 \leq M \leq 8$. Tada možemo u jednom potezu ugasiti M lampi, a upaliti $19 - M$ lampi. Nakon ovog poteza će bar 11 lampi biti upaljeno.

$3°$ $9 \leq M \leq 18$. U ovom slučaju možemo u jednom potezu povećati ukupan broj upaljenih lampi za 1, tako što upravljačem ugasimo 9, a upalimo 10 lampi (ovo možemo jer će uvijek biti ≥ 9 upaljenih lampi). Ovo radimo sve dok ne postignemo da je broj upaljenih lampi jednak 19, nakon čega jednim potezom gasimo sve lampe.

$4°$ $M = 0$. Tada smo postigli željeni cilj.

Jasno je da smo prethodnim razmatranjem slučajeva dobili da je uvijek moguće stići do 4. slučaja, u kojem su sve lampe ugašene. Dakle, moguće je postići da nakon nekoliko poteza sve lampe budu ugašene, bez obzira na broj upaljenih lampi na početku.

Primijetimo da, pošto 169 nije djeljivo s 19, nije moguće u svakom potezu gasiti 19 lampi i tako postići da sve lampe budu ugašene. Dakle, bar u jednom potezu smo morali ugasiti najviše 18 lampi. S druge strane, moguće je postići da se u svakom potezu gasi po 19 lampi, osim u jednom potezu u kojem gasimo 18 lampi. Ovo radimo tako što na početku ugasimo 19 lampi, nakon čega nam ostaje 150 upaljenih lampi. Zatim gasimo 18 lampi, a palimo jednu od 19 već ugašenih, nakon čega ukupno imamo 133 upaljenih lampi. Kako je 133 djeljivo sa 19, sada možemo u 7 poteza ugasiti sve lampe, tako što u svakom potezu gasimo po 19. Dakle, minimalan broj poteza da se sve lampe ugase je 9.

Šema bodovanja.

a)

- dokaz da se broj upaljenih lampi može spustiti ispod 19: 2 boda
- ideja o namještanju broja upaljenih lampi na 19 (ili broj djeljiv sa 19): 1 bod
- dokaz da se broj upaljenih lampi može povećati za 1 ukoliko je bar 9 upaljenih lampi: 7 bodova
- dokaz da se broj upaljenih lampi može dovesti na 19 (ili broj djeljiv sa 19) povećanjem broja upaljenih lampi za 1: 3 boda

b)

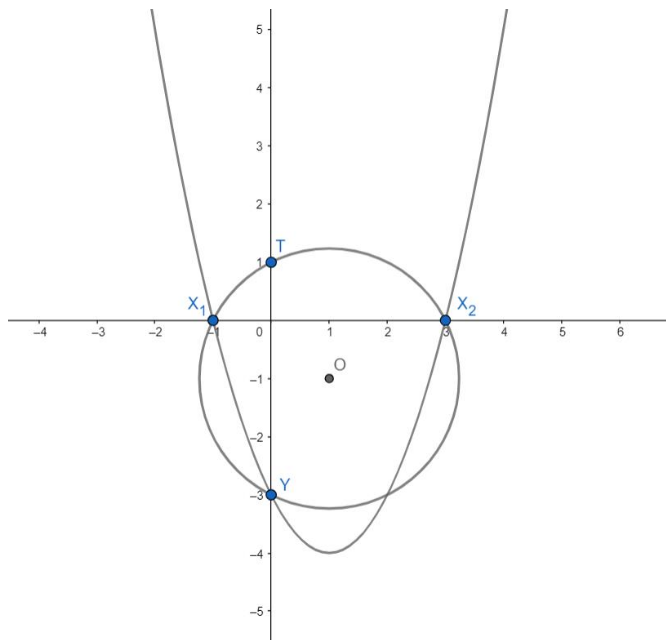
- dokaz da ne mogu svi potezi gasiti 19 lampi: 2 boda
- konstrukcija za 7 poteza: 5 bodova

Zadatak 3. Neka je S skup svih parabola $y = x^2 + px + q$ u ravni, pri čemu su p i q realni brojevi, koje sijeku koordinatne ose u tačno tri različite tačke. Za svaku parabolu u S, posmatrajmo kružnicu opisanu oko trougla kojeg čine tri presječne tačke te parabole sa koordinatnim osama. Dokazati da postoji tačka u ravni koja leži na svim ovim kružnicma i odrediti koja je to tačka.

Rješenje. Dokazat ćemo da je tražena tačka $T = (0,1)$. Posmatrajmo neku parabolu iz S. Neka ona siječe x-osu u tačkama $X_1 = (x_1, 0)$ i $X_2 = (x_2, 0)$ pri čemu je $x_1 < x_2$ i y-osu u tački $Y = (0, y_0)$. Zbog uslova da su X_1, X_2 i Y različite tačke, vrijedi da je $y_0 \neq 0$.

Dokazat ćemo da T pripada opisanoj kružnici trougla X_1X_2Y. Označimo centar te kružnice sa $O = (o_x, o_y)$, a njen poluprečnik sa R. Primijetimo prvo da je $y_0 = 0^2 + p \cdot 0 + q = q$, dok su x_1 i x_2 zapravo rješenja jednačine $x^2 + px + q = 0$.

Rješenje 1:



Po Vijetovim pravilima imamo da je $x_1 + x_2 = -p$. Kako O leži na simetrali duži X_1X_2, to je $o_x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-p}{2}$. Da bi našli o_y posmatrajmo uslov da je $OX_1 = OY = R$ $(*)$. Imamo da je $OX_1 = \sqrt{(o_x - x_1)^2 + o_y^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + px_1 + x_1^2 + o_y^2}$, a $OY = \sqrt{o_x^2 + \left(o_y - y_o\right)^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + o_y^2 - 2o_y q + q^2}$, pa je $(*)$ ekvivalentno sa $x_1^2 + px_1 = q^2 - 2o_y q$. Iz posljednje jednakosti dobijamo da je $o_y = \frac{q^2 - px_1 - x_1^2}{2q}$.

Dokažimo sada da je $OT = OY$. Imamo da je $OT = \sqrt{o_x^2 + \left(o_y - 1\right)^2}$, pa nam treba da je

$$\sqrt{o_x^2 + \left(o_y - 1\right)^2} = \sqrt{o_x^2 + \left(o_y - y_o\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(o_y - 1\right)^2 = \left(o_y - y_0\right)^2 \Leftrightarrow$$

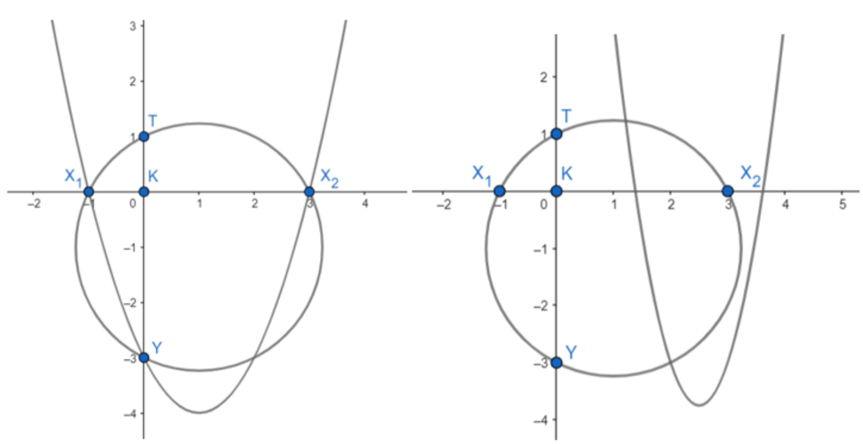
$$1 - 2o_y = y_0^2 - 2o_y y_0 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2\frac{q^2 - px_1 - x_1^2}{2q} = q^2 - \frac{2q(q^2 - px_1 - x_1^2)}{2q} \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{q^2 - px_1 - x_1^2}{q} = px_1 + x_1^2.$$

Kako je x_1 rješenje jednačine $x^2 + px + q = 0$, znamo da je $x_1^2 + px_1 = -q$, pa je posljednja jednakost ekvivalentna sa $-q = 1 - \frac{q^2+q}{q}$, tj. $-q = -q$, što je tačno. Dakle, $OT = OY = R$, pa T pripada kružnici opisanoj oko trougla X_1X_2Y. Kako smo uzeli proizvoljnu parabolu iz S, to ovo vrijedi za svaku parabolu iz S, pa je tražena tačka upravo tačka $T = (0,1)$.

Rješenje 2: Označimo koordinatni početak sa $K = (0,0)$. Dokazat ćemo da je $KT \cdot KY = KX_1 \cdot KX_2$, iz čega bi slijedilo da je X_1YX_2K tetivan četverougao. Znamo da je $KT = 1$, $KY = q$, $KX_1 = x_1$ i $KX_2 = x_2$. Kako su x_1 i x_2 rješenja jednačine $x^2 + px + q = 0$, to iz Vijetovih pravila imamo da je $x_1x_2 = q$, pa zaista vrijedi da je $KT \cdot KY = q = KX_1 \cdot KX_2$. Dakle, tačka $T = (0,1)$ leži na opisanoj kružnici trougla X_1X_2Y za proizvoljnu parabolu iz S, pa je ona upravo tražena tačka. Na slikama ispod su prikazane dvije mogućnosti za poziciju tačke K u odnosu na tačke X_1, X_2, Y i T.



Šema bodovanja.

- dokazivanje da je $y_0 = q$: 1 bod
- pokušaj da se dokaže da je $(0,1)$ tražena tačka: 2 boda
- navođenje da su x_1 i x_2 rješenja jednačine $x^2 + px + q = 0$: 2 boda

Rješenje 1:

- izračunavanje $x_1 + x_2 = -p$: 3 boda
- izračunavanje $o_x = \frac{-p}{2}$ uz pomoć prethodne stavke: 2 boda
- izražavanje o_y preko nekih od ostalih varijabli p, q, x_1 ili x_2: 3 boda
- računanje udaljenosti OT: 2 boda
- dokaz da je $OT = R$: 5 bodova

Rješenje 2:

- ustanoviti da je dovoljno dokazati da je $KT \cdot KY = KX_1 \cdot KX_2$: 10 bodova
- izračunavanje $KX_1 \cdot KX_2$: 3 boda
- krajnji zaključak: 2 boda

Zadatak 4. Neka je $p = \overline{abc}$ trocifren prost broj. Dokazati da jednačina $ax^2 + bx + c = 0$ nema racionalnih rješenja.

Rješenje. Kako je p trocifren broj, to je $a \neq 0$ i $c \neq 0$. Imamo da je $p = 100a + 10b + c$ $(*)$. Pretpostavimo suprotno, da data jednačina ima racionalno rješenje. To znači da je njena diskriminatna kvadrat racionalnog broja, tj. $b^2 - 4ac = n^2$, za neki racionalni broj n. Kako su a, b, c cijeli brojevi, to zapravo i n mora biti cijeli broj. Kako su $a, c > 0$ i $b \geq 0$, vidimo da vrijedi $n < b$. Sređivanjem ovog izraza dobijamo da je $c = \frac{b^2 - n^2}{4a}$. Nakog uvrštavanja ovoga u $(*)$ i množenja cijele jednačine sa $4a$, dobijamo

$$4ap = 400a^2 + 40ab + b^2 - n^2 \Leftrightarrow$$

$$4ap = (20a + b)^2 - n^2 \Leftrightarrow$$

$$4ap = (20a + b - n)(20a + b + n).$$

Kako $p|4ap$, to mora vrijediti i da $p|(20a + b - n)(20a + b + n)$, a pošto je p prost broj vrijedi da $p|20a + b - n$ ili $p|20a + b + n$. Međutim, pošto je $p = 100a + 10b + c > 20a + 2b > 20a + b + n \geq 20a + b - n > 0$, nemoguće je da p dijeli ijedan od brojeva $20a + b - n$ i $20a + b + n$. Dakle, došli smo do kontradikcije, pa data jednačina zaista nema racionalnih rješenja.

Šema bodovanja.

- pretpostavka da data jednačina ima racionalno rješenje i zaključak da njena diskriminanta mora biti kvadrat cijelog broja: 3 boda
- postavljanje jednačine $b^2 - 4ac = n^2$ i izražavanje c iz nje: 3 boda
- dokaz da je $n < b$: 2 boda
- uvrštavanje izraza dobivenog za c u uslov $p = \overline{abc}$: 1 bod
- faktorisanje prethodnog izraza kao u rješenju: 5 bodova
- dokaz da p dijeli jednu od zagrada sa desne strane: 2 boda
- dokaz da je p veći od obe zagrade i konačni zaključak: 4 boda

Zadatak 5. Neka su $a < b < c$ realni brojevi takvi da je $a + b + c = 6$ i $ab + bc + ca = 9$. Dokazati da vrijedi nejednakost $a^2 + b^2 + c^2 - a - 4b - 7c + 15 < 0$.

Rješenje. Primijetimo prvo da je $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 36 - 18 = 18$. Označimo izraz $a^2 + b^2 + c^2 - a - 4b - 7c + 15$ sa W. Imamo da je $W = 18 - a - 4b - 7c + 15 = 33 - a - 4(6 - c - a) - 7c = 9 + 3a - 3c$, pa je $W < 0$ ekvivalentno sa $c - a > 3$.

Dokažimo sada da vrijedi $0 \leq c \leq 4$. Kvadriranjem jednačine $a + b = 6 - c$ dobijamo $a^2 + 2ab + b^2 = 36 - 12c + c^2$, a kako je $a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2) = 2(18 - c^2)$, slijedi da je $36 - 12c + c^2 \leq 2(18 - c^2)$, tj. $3c^2 - 12c \leq 0$. Sada je $3c(c - 4) \leq 0$, pa slijedi da je $0 \leq c \leq 4$, što smo i htjeli dokazati. Analogno možemo dokazati da je $0 \leq a \leq 4$ i $0 \leq b \leq 4$.

Sada imamo da je $2b < a + b + c < 2b + 4$, tj. $1 < b < 3$. Znamo da je $a^2 + b^2 + c^2 = 18 = 2(ab + bc + ca)$, što je ekvivalentno sa $(c - a)^2 + b(b - 2a - 2c) = 0$, tj. $(c - a)^2 + b(b - 2(6 - b)) = 0$. Iz ovoga je $(c - a)^2 = -3b^2 + 12b$. Da bi dokazali da je $c - a > 3$, trebamo dokazati da je $-3b^2 + 12b > 9$, tj. da je $b^2 - 4b + 3 < 0$. Primijetimo da je $b^2 - 4b + 3 = (b - 1)(b - 3)$, a kako je $1 < b < 3$, onda je $(b - 1)(b - 3) < 0$, što nam je i trebalo. Dakle, vrijedi da je $(c - a)^2 > 9$, pa zbog $c - a > 0$ slijedi da je $c - a > 3$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja.

- izračunavanje $a^2 + b^2 + c^2 = 18$: 1 bod
- dokaz da je $W < 0$ ekvivalentno sa $c - a > 3$: 2 boda
- dokazivanje da je $0 \leq a, b, c \leq 4$: 6 bodova
- zaključak da je $1 < b < 3$: 3 boda
- posmatranje izraza $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$ i uspostavljanje ekvivalencije $W < 0$ sa $b^2 + 4b - 3 < 0$: 6 bodova
- dokazivanje da je $(b - 1)(b - 3) < 0$ i krajnji zaključak: 2 boda

Rješenja zadataka za IV razred

Zadatak 1. Dokazati da je $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ za sve prirodne brojeve n.

Rješenje I:

Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom.
Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer je

$$(2 \cdot 1)! = 2 < 4 = 2^{2\cdot 1}(1!)^2 .$$

Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za neki prirodan broj n, tj. da vrijedi

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2 .$$

Tada za $n+1$ imamo

$$\begin{aligned}(2(n+1))! &= (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)! \overset{\text{po pretp.}}{<} (2n+2)(2n+1)2^{2n}(n!)^2 \\ &< (2n+2)(2n+2)2^{2n}(n!)^2 = 2^2(n+1)^2 2^{2n}(n!)^2 = 2^{2(n+1)}((n+1)!)^2 .\end{aligned}$$

Sada na osnovu principa matematičke indukcije slijedi da data nejednakost vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Šema bodovanja

- dokaz za $n = 1$ 1 bod
- pretpostavka da nejednakost vrijedi za neki prirodan broj n 2 boda
- dokaz da nejednakost vrijedi za $n+1$ 15 bodova
- zaključak da na osnovu principa matematičke indukcije nejednakost vrijedi za sve$n \in \mathbb{N}$ 2 boda (ovaj korak se ne boduje ako nije završen prethodni korak)

Rješenje II:

Primijetimo da datu nejednakost možemo napisati u obliku

$$(2n)! < ((2n)!!)^2 ,$$

pri čemu je $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n)$ (proizvod svih parnih prirodnih brojeva manjih ili jednakih $2n$).
Naime, izvlačenjem broja 2 iz svakog faktora u izrazu za $(2n)!!$ dobijamo da je

$$(2n)!! = 2^n n!.$$

Trebamo, dakle, pokazati da je

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot (2k) \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n) < 2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2k)^2 \cdot \dots \cdot (2n)^2 .$$

Kako za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako $k \in \{1, 2, \dots n\}$ vrijedi

$$(2k-1)(2k) < (2k)^2 ,$$

to vidimo da polazna nejednakost $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Šema bodovanja

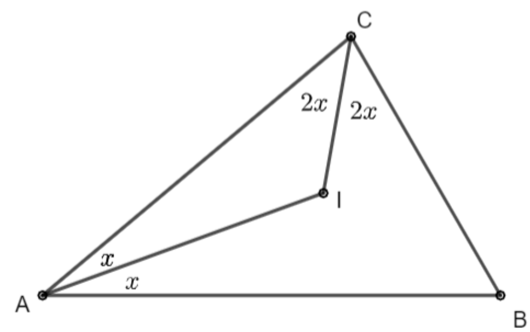
- nejednakost napisana u obliku $(2n)! < ((2n)!!)^2$ ili ekvivalentno 4 boda i još 6 bodova za raspisani oblik ili ekvivalenatn oblik iz kojeg se može vršiti odgovarajuće upoređivanje
- dokaz/konstatacija da je $(2k-1)(2k) < (2k)^2$ 8 bodova
- zaključak da nejdnakost vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$ 2 boda

Zadatak 2. Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC. Ako je $AI = BC$ i $\measuredangle ACB = 2\measuredangle BAC$, odrediti uglove trougla ABC.

Rješenje I:

Neka je $x = \measuredangle BAI = \measuredangle IAC$. Tada je

$$\measuredangle BCI = \measuredangle ACI = \frac{1}{2}\measuredangle ACB = \measuredangle BAC = 2x.$$



Slijedi da je $\measuredangle CBA = 180^\circ - 6x$.

Primijenimo li sinusni teorem na trouglove ABC i AIC dobijamo

$$\frac{BC}{\sin 2x} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - 6x)} \text{ i } \frac{AI}{\sin 2x} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - 3x)}.$$

Kako je $AI = BC$, slijedi da je $\sin(180^\circ - 6x) = \sin(180^\circ - 3x)$. Budući da je $0 < 3x < 6x < 180^\circ$, jedino je moguće da vrijedi $3x + 6x = 180^\circ$.

Dakle, $x = 20^\circ$ i uglovi trougla ABC iznose $\measuredangle BAC = 40^\circ$, $\measuredangle ABC = 60^\circ$ i $\measuredangle ACB = 80^\circ$.

Šema bodovanja

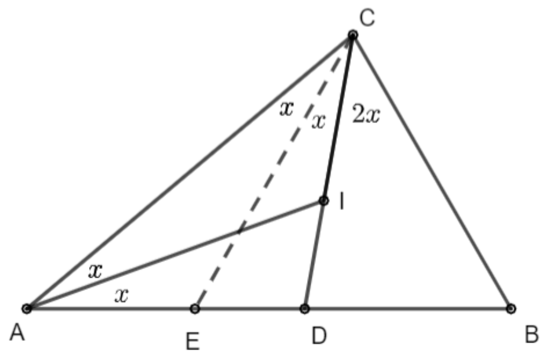
- uvođenje oznaka i dobijanje izraza $\measuredangle BCI = \measuredangle ACI = \frac{1}{2}\measuredangle ACB = \measuredangle BAC = 2x$ (ili ekvivalentno) 1 bod
- zaključak $\measuredangle CBA = 180^\circ - 6x$ 1 bod
- primjena sinusne teoreme na trouglove ABC i AIC 6 bodova
- zaključak da je $\sin(180^\circ - 6x) = \sin(180^\circ - 3x)$ 5 bodova
- zaključak da je $3x + 6x = 180^\circ$ 5 bodova
- računanje uglova $\measuredangle BAC = 40^\circ$, $\measuredangle ABC = 60^\circ$ i $\measuredangle ACB = 80^\circ$ 2 boda

Rješenje II:

Neka je $x = \measuredangle BAI = \measuredangle IAC$. Neka je D presječna tačka simetrale $\angle ACB$ i stranice AB. Kako je

$$\angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACB = \angle CAB,$$

slijedi da je $DC = AD$.



Neka je E presječna tačka simetrale ugla $\angle ACD$ i stranice AD. Kako je ACD jednakokraki trougao, vrijedi $CE = AI = BC$. Dakle, trougao BCE je jednakokraki, pa vrijedi

$$\angle CBA = \angle CEB = \angle ACE + \angle EAC = 3x.$$

S druge strane, uz oznake koje smo uveli, očigledno je $\angle CBA = 180° - 6x$.

Kao i u prethodnom rješenju dobijemo da je $x = 20°$ i uglovi trougla ABC iznose $\measuredangle BAC = 40°$, $\measuredangle ABC = 60°$ i $\measuredangle ACB = 80°$.

Šema bodovanja

- uvođenje oznaka i izvođenje zaključka $DC = AD$ (ili ekvivalentno) 4 boda
- uvođenje tačke E u razmatranje 1 bod
- izvođenje zaključka da je $CE = AI = BC$ 5 bodova
- izvođenje zaključka $\angle CBA = 3x$ 4 boda
- zaključak da je $3x + 6x = 180°$ 4 boda
- računanje uglova $\measuredangle BAC = 40°$, $\measuredangle ABC = 60°$ i $\measuredangle ACB = 80°$ 2 boda

Zadatak 3. Neka je a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 permutacija brojeva 1, 2, 3, 4, 5, 6 koja zadovoljava sljedeći uslov: za bilo koji $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, svaka permutacija od $a_1, a_2, \ldots, a_j$ nije permutacija od brojeva $1, 2, \ldots, j$. Pronađite ukupan broj permutacija koje zadovoljavaju dati uslov.

Rješenje:

Mora vrijediti $a_1 \neq 1$ jer bi u protivnom za $j = 1$ svaka permutacija oblika $1a_2a_3a_4a_5a_6$ bila permutacija čiji je prvi element (trivijalna) permutacija od 1.

Ako je $a_1 = 6$, onda je a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 permutacija brojeva 1, 2, 3, 4, 5 i svaka permutacija oblika $6a_2a_3a_4a_5a_6$ zadovoljava uslov zadatka. U ovom slučaju imamo $5! = 120$ takvih permutacija.

Ako je $a_1 = 5$, broj permutacija oblika $a_2a_3a_4a_5a_6$ iznosi 5!. Međutim, permutacije oblika $5****6$ ne zadovoljavaju uslov zadatka i njihov broj iznosi 4!. Dakle, u ovom slučaju broj permutacija koje zadovoljavaju uslov zadatka iznosi $5! - 4! = 96$.

Ako je $a_1 = 4$, broj permutacija oblika $a_2a_3a_4a_5a_6$ iznosi 5!. Međutim, permutacije oblika $4****6$ i $4***65$ ne zadovoljavaju uslov zadatka i njihov broj iznosi 4! i 3!, redom. Dakle, u ovom slučaju broj permutacija koje zadovoljavaju uslov zadatka iznosi $5! - 4! - 3! = 90$.

Ako je $a_1 = 3$, broj permutacija oblika $a_2a_3a_4a_5a_6$ iznosi 5!. Međutim, permutacije oblika $3****6$, $3***65$, $3**654$, $3**645$ i $3**564$ ne zadovoljavaju uslov zadatka i njihov broj iznosi 4!, 3!, 2!, 2! i 2!, redom. Dakle, u ovom slučaju broj permutacija koje zadovoljavaju uslov zadatka iznosi $5! - 4! - 3! - 3 \cdot 2! = 84$.

Ako je $a_1 = 2$, broj permutacija oblika $a_2a_3a_4a_5a_6$ iznosi 5!. Međutim, permutacije oblika $2****6$, $2***65$, $2**564$, $2**645$, $2**654$, $215**4$, $214**3$, $215**3$, $216**3$, $216**5$, $216**4$, 214635, ne zadovoljavaju uslov zadatka i njihov broj iznosi 4!, 3!, 2!, 2!, 2!, 2!, 2!, 2, 2!, 2!, 2! i 1, redom. Dakle, u ovom slučaju broj permutacija koje zadovoljavaju uslov zadatka iznosi $5! - 4! - 3! - 9 \cdot 2! - 1 = 71$.

Dakle, ukupan broj permutacija koje zadovoljavaju postavljeni uslov iznosi $120 + 96 + 90 + 84 + 71 = 461$.

Šema bodovanja

- zaključak da 1 ne može biti na prvom mjestu 2 boda
- ako je $a_1 = 6$ zaključak o tačnom broju povoljnih permutacija 2 boda
- ako je $a_1 = 5$ zaključak o tačnom broju povoljnih permutacija 2 boda
- ako je $a_1 = 4$ zaključak o tačnom broju povoljnih permutacija 3 boda
- ako je $a_1 = 3$ zaključak o tačnom broju povoljnih permutacija 4 boda
- ako je $a_1 = 2$ zaključak o tačnom broju povoljnih permutacija 6 bodova
- izračunat ukupan broj povoljnih permutacija 1 bod
- u slučaju da učenik raspiše pojedine permutacije (slučajeve) i "ručno" ih prebroji, i pri tome pogriješi u brojanju, neće se bodovati.

Zadatak 4. Naći sve parove (n, k) prirodnih brojeva n i k koji su rješenja jednadžbe

$$(n-1)! = n^k - 1.$$

Rješenje:

Ako je $n = 1$, jednadžba nema rješenja (jer je $0! = 1 \neq 0 = 1^k - 1$).
Ako je $n = 2$, lako se vidi da je $(2, 1)$ rješenje date jednadžbe.
Ako je $n = 3$ ili $n = 5$, rješenja su $(3, 1)$ i $(5, 2)$, respektivno.
Ako je $n = 4$, jednadžba nema rješenja jer je $3!$ paran broj, a $4^k - 1$ neparan broj za bilo koji prirodan broj k. Naime, lako se zaključuje da ako je $n = 2m$, pri čemu je $m \geq 2$ prirodan broj, jednadžba nema rješenja jer je tada $(n-1)!$ paran broj (jer $(n-1)!$ u sebi sadrži faktor 2), a desna strana $n^k - 1$ je neparan broj.

Pokažimo da za $n > 5$ i n neparan broj, jednadžba nema rješenja u skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. U ovom slučaju je $\frac{n-1}{2}$ prirodan broj i vrijedi da je $\frac{n-1}{2} < n - 3$, pa $2 \cdot \frac{n-1}{2} \Big| (n-2)!$, tj. $(n-1) | (n-2)!$. Odavde vidimo da $(n-1)^2 \Big| (n-1)!$, pa mora vrijediti

$$(n-1)^2 \Big| \left(n^k - 1\right).$$

S druge strane, kako je k neparan broj, imamo da je

$$n^k - 1 = (n-1)\left(n^{k-1} + n^{k-2} + \cdots + n + 1\right).$$

Kako je ostatak pri djeljenju n^j sa $(n-1)$ jednak 1 za svaki $j \in \mathbb{N}_0$, to posljednja jednakost i činjenica da $(n-1)^2 \Big| \left(n^k - 1\right)$ daju da tada mora vrijediti $(n-1) | k$. Odatle slijedi da je $k \geq n - 1$. Znači,

$$n^k - 1 \geq n^{n-1} - 1 > (n-1)^{n-1} \geq (n-1)!.$$

Dakle, za $n > 5$ i n neparan broj data jednadžba nema rješenja u skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Znači, sva tražena rješenja date jednadžbe su $(n, k) \in \{(2, 1), (3, 1), (5, 2)\}$.

Napomena: Da $(n-1)$ mora da dijeli k mogli smo pokazati koristeći binomni teorem. Naime,

$$\begin{aligned} n^k - 1 &= ((n-1) + 1)^k - 1 \\ &= (n-1)^k + \binom{k}{1}(n-1)^{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-2}(n-1)^2 + k(n-1), \end{aligned}$$

odakle vidimo da iz $(n-1)^2 \Big| \left(n^k - 1\right)$ slijedi da $(n-1) | k$.

Šema bodovanja

- slučaj da za $n = 1$ nema rješenja 0.5 boda
- pronalazak rješenja $(2, 1), (3, 1), (5, 2)$ 3 boda (po 1 bod svako rješenje)
- slučaj da za $n = 2m$, pri čemu je $m \geq 2$, jednadžba nema rješenja 2.5 boda (1 bod se može dobiti za eliminaciju rješenja $n = 4$)
- zaključak da $(n-1)^2 \Big| (n-1)!$ u slučaju $n > 5$ i n neparan 6 bodova
- zaključak da $(n-1) | k$ 4 boda odakle slijedi $k \geq n - 1$ 1 bod
- zaključak $n^k - 1 > (n-1)!$ odakle slijedi da jednadžba nema rješenja u slučaju $n > 5$ i n neparan 3 boda

Zadatak 5. Izračunati sumu

$$\sum_{j=0}^{674}\binom{2022}{3j}=\binom{2022}{0}+\binom{2022}{3}+\cdots+\binom{2022}{2019}+\binom{2022}{2022}.$$

Rješenje I:

Prema Newtonovoj binomnoj formuli je

$$(1+x)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j. \tag{1}$$

Lako se provjeri da u skupu kompleksnih brojeva jednadžba $z^3=1$ ima rješenja data sa

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$$

Poznato je da je $z^3-1=(z-1)\left(z^2+z+1\right)$, odakle vidimo da z_1 i z_2 zadovoljavaju jednakost $z^2+z+1=0$. Primijetimo da vrijede sljedeće jednakosti

$$\begin{gathered}1+z_1=-z_1^2 \text{ i } 1+z_2=-z_2^2,\\ z_1^2=z_2 \text{ i } z_2^2=z_1,\\ (1+z_1)^{2022}=z_1^{4044}=1 \text{ i } (1+z_2)^{2022}=z_2^{4044}=1,\\ z_k^{3m}=1, z_k^{3m+1}=z_k \text{ i } z_k^{3m+2}=z_k^2,\ \forall m\in\mathbb{N}_0,\ k=0,1,2.\end{gathered}$$

Sada, stavljajući da je $n=2022$ i $x=z_k$ za $k=0,1,2$, u (1) te uzimajući u obzir gornje jednakosti, imamo

$$\begin{aligned}2^{2022} &= \binom{2022}{0}+\binom{2022}{1}+\binom{2022}{2}+\cdots+\binom{2022}{2021}+\binom{2022}{2022},\\ 1 &= \binom{2022}{0}+\binom{2022}{1}z_1+\binom{2022}{2}z_1^2+\cdots+\binom{2022}{2021}z_1^{2021}+\binom{2022}{2022}z_1^{2022}\\ &= \binom{2022}{0}+\binom{2022}{1}z_1+\binom{2022}{2}z_2+\cdots+\binom{2022}{2020}z_1+\binom{2022}{2021}z_2+\binom{2022}{2022},\\ 1 &= \binom{2022}{0}+\binom{2022}{1}z_2+\binom{2022}{2}z_2^2+\cdots+\binom{2022}{2021}z_2^{2021}+\binom{2022}{2022}z_2^{2022}\\ &= \binom{2022}{0}+\binom{2022}{1}z_2+\binom{2022}{2}z_1+\cdots+\binom{2022}{2020}z_2+\binom{2022}{2021}z_1+\binom{2022}{2022}.\end{aligned}$$

Kako je $1+z_1+z_2=0$, sabiranjem tri gornje jednakosti dobijemo

$$2^{2022}+1+1=3\left[\binom{2022}{0}+\binom{2022}{3}+\cdots+\binom{2022}{2019}+\binom{2022}{2022}\right],$$

tj. tražena suma iznosi

$$\binom{2022}{0}+\binom{2022}{3}+\cdots+\binom{2022}{2019}+\binom{2022}{2022}=\frac{2^{2022}+2}{3}.$$

Šema bodovanja

- ideja da se posmatra $(1+x)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j$ ili ekvivalentna 2 boda
- pronalazak rješenja z_k, $k=0,1,2$, jednadžbe $z^3=1$ u skupu kompleksnih brojeva 4 boda
- rastavljanje $z^3-1=(z-1)\left(z^2+z+1\right)$ i zaključak da tada rješenja $z_{1,2}$ jednadžbe koja su različita od 1 zadovoljavaju jednakost $z^2+z+1=0$ 2 boda

- korisne jednakosti koje vrijede za z_k, $k = 0, 1, 2$ 5 bodova
- uvrštavanje rješenja z_k, $k = 0, 1, 2$, u $(1 + x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$ i njihovo sumiranje 3 boda
- uočavanje da je $1 + z_1 + z_2 = 0$ 3 boda
- dobijanje izraza $\frac{2^{2022}+2}{3}$ 1 bod

Rješenje II:

Naša suma je oblika $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{3n}{3j}$, pri čemu je $n = 674$. Kako je

$$\begin{aligned}
\binom{3n}{3j} &= \binom{3n-1}{3j-1} + \binom{3n-1}{3j} = \binom{3n-2}{3j-2} + \binom{3n-2}{3j-1} + \binom{3n-2}{3j-1} + \binom{3n-2}{3j} \\
&= \binom{3n-3}{3j-3} + \binom{3n-3}{3j-2} + 2\binom{3n-3}{3j-2} + 2\binom{3n-3}{3j-1} + \binom{3n-3}{3j-1} + \binom{3n-3}{3j} \\
&= \binom{3n-3}{3j-3} + 3\binom{3n-3}{3j-2} + 3\binom{3n-3}{3j-1} + \binom{3n-3}{3j},
\end{aligned}$$

to sumiranjem i rearanžiranjem sabiraka dobijamo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} \binom{3n}{3j} &= \sum_{j=0}^{n} \left[\binom{3n-3}{3j-3} + \binom{3n-3}{3j-2} + \binom{3n-3}{3j-1} \right] + \sum_{j=0}^{n} \left[\binom{3n-3}{3j-2} + \binom{3n-3}{3j-1} + \binom{3n-3}{3j} \right] \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n} \left[\binom{3n-3}{3j-2} + \binom{3n-3}{3j-1} + \binom{3n-3}{3j} \right] - \sum_{j=0}^{n} \binom{3n-3}{3j} \\
&= 3 \cdot 2^{3n-3} - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{3n-3}{3j}.
\end{aligned}$$

Napomenimo da ako u binomnim koeficijentima $\binom{n}{k}$ koji se javljaju u gornjim sumama imamo $k < 0$ ili $k > n$, onda smatramo da je $\binom{n}{k} = 0$, te $\binom{0}{0} = 1$ (jer je po definiciji $0! = 1$).

Ako stavimo $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{3n}{3j} = a_n$, dobijamo rekurzivnu relaciju

$$a_n = 3 \cdot 2^{3(n-1)} - a_{n-1} = 3 \cdot 8^{n-1} - a_{n-1},$$

pri čemu je $a_0 = 1$. Odavde dobijemo

$$\begin{aligned}
a_{674} &= 3 \cdot 8^{673} - 3 \cdot 8^{672} + ... + 3 \cdot 8 - 3 + 1 = 3\left(8^{673} - 8^{672} + ... + 8 - 1\right) + 1 \\
&= -3 \cdot \frac{8^{674} - 1}{-8 - 1} + 1 = \frac{2^{2022} - 1}{3} + 1 = \frac{2^{2022} + 2}{3}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\sum_{j=0}^{674} \binom{2022}{3j} = \frac{2^{2022} + 2}{3}.$$

Šema bodovanja

- $\binom{3n}{3j} = \binom{3n-3}{3j-3} + 3\binom{3n-3}{3j-2} + 3\binom{3n-3}{3j-1} + \binom{3n-3}{3j}$ 3 boda
- $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{3n}{3j} = 3 \cdot 2^{3n-3} - \sum\limits_{j=0}^{n-1} \binom{3n-3}{3j}$ 8 bodova

- zapis u obliku rekurzivne relacije $a_n = 3 \cdot 2^{3(n-1)} - a_{n-1} = 3 \cdot 8^{n-1} - a_{n-1}$ gdje je $\sum_{j=0}^{n} \binom{3n}{3j} = a_n$ 2 boda
- $a_0 = 1$ 1 bod
- $a_{674} = \frac{2^{2022}+2}{3}$ 6 bodova