

Kantonalno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Kantona Sarajevo

19. 3. 2024.

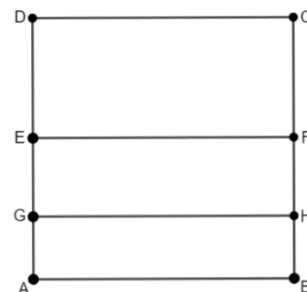
VI razred - zadaci

1. zadatak Neka su x, y cifre i a prirodan broj. Odrediti sve uređene trojke (x, y, a) takve da šestocifreni broj $\overline{y96x4y}$ bude djeljiv sa 45 i da vrijedi $\frac{x+1}{2y-1} \leq \frac{a}{4y+1} \leq \frac{7x+2y}{4x+7y}$. Odgovor obrazložiti!

2. zadatak a) Odrediti skupove A i B koji imaju jednak broj elemenata, ako je poznato da za njih vrijedi $A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ i } x < 200\} = \{1, 2, 3, \dots, 198, 199\}$, $A \cap B = \{1, 2, 100, 101, 102\}$, te je svaki element skupa $A \setminus B$ veći od svakog elementa skupa $B \setminus A$. Odgovor obrazložiti!

b) Za koliko je zbir elemenata skupa A veći od zbira elemenata skupa B ? Odgovor obrazložiti!

3. zadatak Kvadrat $ABCD$ stranice 88 cm podijeljen je sa dvije paralelne prave na tri pravougaonika: $EFCD$, $GHFE$ i $ABHG$, kao na slici. Poznato je da je površina pravougaonika $EFCD$ dvostruko veća od površine pravougaonika $GHFE$, kao i da je obim pravougaonika $GHFE$ za 8 cm veći od obima pravougaonika $ABHG$. Odrediti površinu pravougaonika $GHFE$.



4. zadatak Nora je čitav dan pisala cifre na ogromnu tablu: najprije je napisala dvije cifre, 2 i 4, a nakon toga svaku narednu cifru dobija tako što pomnoži prethodne dvije cifre sa table, te na tablu napiše posljednju cifru tog proizvoda. Na primjer, treća cifra na tabli će biti 8, jer je to posljednja cifra proizvoda $2 \cdot 4 = 8$, četvrta cifra će biti 2, jer je to posljednja cifra proizvoda $4 \cdot 8 = 32$, peta cifra će biti 6, jer je to posljednja cifra proizvoda $8 \cdot 2 = 16$, i tako dalje.

a) Koja će biti 2024. cifra na tabli? Odgovor detaljno obrazložiti!

b) Koji je zbir prvih 2024 cifara na tabli? Odgovor detaljno obrazložiti!

c) Na kojem mjestu po redu će se 2024. put pojaviti cifra 2? Odgovor detaljno obrazložiti!

5. zadatak a) Emil je zamislio neki prirodan broj. Primijetio je da taj broj daje isti ostatak pri dijeljenju sa 18 i pri dijeljenju sa 24. Međutim, pri dijeljenju tog broja sa 18, količnik je dvostruko veći od ostatka, dok je prilikom dijeljenja tog broja sa 24 količnik za 7 veći od ostatka. Koji je broj Emil zamislio? Odgovor obrazložiti!

b) Broj 2024 daje ostatak 8 i pri dijeljenju sa 18 i pri dijeljenju sa 24. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10000 (uključujući i 2024) koji daju ostatak 8 i pri dijeljenju sa 18 i pri dijeljenju sa 24? Odgovor obrazložiti!

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Nije dozvoljeno koristiti kalkulator, već samo geometrijski pribor!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
19. marta/ožujka 2024.

VII razred

Zadatak 1. U tri vreće ukupno ima 2024 kg brašna. U drugoj je $\frac{5}{4}$ puta više brašna nego u prvoj, a u trećoj je 2.8 puta više brašna nego u drugoj. Odrediti koliko kilograma brašna ima u svakoj od vreća.

Zadatak 2. Koliko ima sedmocifrenih brojeva u čijem se zapisu javljaju samo cifre 5 i 7, a koji su djeljivi s 45?

Zadatak 3. Mađioničar ima 3 kutije kovanica: plavu, žutu i bijelu. U plavoj kutiji se nalazi određen broj kovanica od 5 KM, u žutoj određen broj kovanica od 2 KM, a u bijeloj određen broj kovanica od 1 KM. Kada mađioničar štapićem dotakne dvije kutije, sve kovanice iz prve kutije uzimaju vrijednost kovanica iz druge kutije i obratno. Na primjer, kada bi štapićem dotakao plavu i žutu kutiju, sve kovanice u plavoj kutiji bi se pretvorile u kovanice od 2 KM, a sve kovanice u žutoj kutiji bi se pretvorile u kovanice od 5 KM (tj. kovanice od 5 KM su se pretvorile u 2 KM i obratno). Vrijedi sljedeće:

- Kada bi mađioničar štapićem dotakao plavu i bijelu kutiju, ukupna vrijednost novca u kutijama bi se umanjila za 60 KM.
- Kada bi mađioničar štapićem dotakao žutu i bijelu kutiju, ukupna vrijednost novca u kutijama bi se povećala za 7 KM.

Kada bi mađioničar štapićem dotakao plavu i žutu kutiju, da li bi se ukupna vrijednost novca povećala ili umanjila, i za koliko?

Zadatak 4. U jednom razredu svaki učenik je ili *iskren*, ili *lažljiv*, ili *promjenljiv*.

- Iskreni učenici na svako pitanje odgovaraju istinito.
- Lažljivi učenici na svako pitanje odgovaraju neistinito.
- Promjenljivi učenici na pitanja koja im se postavljaju naizmjenično odgovaraju istinito i neistinito (dakle, ako su na prethodno pitanje odgovorili istinu, na sljedeće će lagati i obratno). Pri tome, nije poznato da li na prvo postavljeno pitanje odgovaraju istinito ili ne (moguće je da neki promjenljivi učenici odgovore istinito, a drugi promjenljivi učenici odgovore neistinito na prvo pitanje).

Nastavnik je učenicima postavljao pitanja. Nakon svakog pitanja svaki učenik je na papir napisao odgovor ("Da" ili "Ne"). Prvo je postavio pitanje "Da li si iskren?" i dobio 22 odgovora "Da" (ostali odgovori su bili "Ne"). Zatim je postavio pitanje "Da li si promjenljiv?" i dobio 15 odgovora "Da". Konačno, postavio je pitanje "Da li si lažljiv?" i dobio 9 odgovora "Da". Da li u razredu ima više iskrenih ili lažljivih učenika?

Zadatak 5. Dat je trougao $\triangle ABC$. Na stranici AC odabrana je tačka P , a na stranici AB tačka Q tako da vrijedi $PQ \parallel BC$. Duži BP i CQ se sijeku u tački S , i važi $CP = CS$ i $PQ = BQ$. Dokazati da je $CQ = AP$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.

Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
19. marta/ožujka 2024.

VIII razred

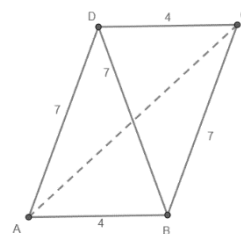
Zadatak 1. Odrediti koji od data dva broja je veći:

- a) 3^{503} ili 27^{168} ,
- b) 3^{400} ili 79^{100} ,
- c) 5^{300} ili 11^{200} .

Odgovore obrazložiti!

Zadatak 2. U paralelogramu $ABCD$ vrijedi $AB = CD = 4, BC = DA = DB = 7$.

- a) Odrediti površinu paralelograma $ABCD$.
- b) Odrediti dužinu dijagonale AC .



Napomena: Dužine na datoj slici nisu proporcionalne stvarnim dužinama duži!

Zadatak 3. Neka su x i y realni brojevi za koje vrijedi:

$$\begin{aligned}x + y^2 &= 6, \\x^2 + y^4 &= 21.\end{aligned}$$

Odrediti sve moguće vrijednosti izraza $x^8 - y^{16}$.

Zadatak 4.

- a) Nora je zamislila neki prirodan broj. Primijetila je da taj broj daje isti ostatak pri dijeljenju sa 18 i pri dijeljenju sa 24. Međutim, pri dijeljenju tog broja sa 18, količnik je za 11 veći od količnika koji se dobija pri dijeljenju tog broja sa 24. Koje je sve brojeve Nora mogla zamisliti? Odgovor obrazložiti!
- b) Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10000 koji daju isti ostatak i pri dijeljenju sa 18 i pri dijeljenju sa 24? Odgovor obrazložiti!

Napomena: Ostatak pri dijeljenju sa nekim brojem može biti jednak 0.

Zadatak 5. Na krugu je poredano 15 različitih cijelih brojeva na način da je svaki broj veći od zbira iduća tri broja na krugu (u smjeru kretanja kazaljke na satu). Koliko najviše brojeva od datih 15 može biti prirodno? Odgovor obrazložiti!

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.

Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
19. marta/ožujka 2024. godine

IX razred

Zadatak 1. U koordinatnoj ravni, sa koordinatnim početkom O , date su tri prave: prva prava je paralelna sa x -osom i siječe y -osu u tački $A(0,3)$, druga prava je $y = 2x$, a treća $y = -4x + \frac{37}{3}$. Prva i druga prava se sijeku u tački B , prva i treća u tački C , a treća prava siječe x -osu u tački D . Odrediti površinu četverougla $OB CD$.

Zadatak 2. Ako se između cifara dvocifrenog prirodnog broja ubaci 0, dobija se (trocifreni) broj koji je 9 puta veći od polaznog broja. Odrediti o kojim brojevima je riječ.

Zadatak 3. Dokazati da od proizvoljna tri cijela broja uvijek možemo odabrati dva, nazovimo ih a i b , takva da je izraz $a^4 b^2 - a^2 b^4$ djeljiv sa 20.

Zadatak 4. Ako za nenulte realne brojeve a, b, c, d istovremeno vrijedi da je $a + b + c + d = 0$ i $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$, dokazati da onda vrijedi i

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Zadatak 5. Na težišnoj duži $\overline{AD}$ trougla ABC uzeta je tačka E takva da je $\overline{AE} = \overline{BD}$. Ako je $\angle ADC = 60^\circ$, dokazati da je $\overline{AC} = \overline{BE}$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.

Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kantonalno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Kantona Sarajevo

19. 3. 2024.

Rješenja zadataka sa šemom bodovanja

VI razred

1. zadatak Neka su x, y cifre i a prirodan broj. Odrediti sve uređene trojke (x, y, a) takve da šestocifreni broj $\overline{y96x4y}$ bude djeljiv sa 45 i da vrijedi $\frac{x+1}{2y-1} \leq \frac{a}{4y+1} \leq \frac{7x+2y}{4x+7y}$. Odgovor obrazložiti!

Rješenje: Broj $\overline{y96x4y}$ će biti djeljiv sa 45 ako i samo ako je djeljiv sa 5 i 9. Da bi bio djeljiv sa 5, broj se mora završavati cifrom 0 ili 5, pa je $y = 0$ ili $y = 5$. Ako bi bilo $y = 0$ onda bi traženi broj počinjao cifrom 0 što je nemoguće. Dakle, $y = 5$ i traženi broj postaje $\overline{596x45}$. Da bi broj bio djeljiv sa 9 dovoljno je da zbir njegovih cifara bude djeljiv sa 9. Dakle $5 + 9 + 6 + x + 4 + 5 = x + 29$ treba biti djeljivo sa 9. Kako je x cifra to je $0 \leq x \leq 9$ pa zaključujemo da je

$$29 \leq x + 29 \leq 9 + 29 = 38.$$

Jedini broj između 29 i 38 i koji je djeljiv sa 9 je 36, pa vrijedi $x + 29 = 36$, tj. $x = 7$.

Uvrštavajući sada $x = 7$ i $y = 5$ u $\frac{x+1}{2y-1} \leq \frac{a}{4y+1} \leq \frac{7x+2y}{4x+7y}$, dobijamo

$$\frac{8}{9} \leq \frac{a}{21} \leq \frac{59}{63}.$$

Da bi odredili moguće vrijednosti broja a najprije svedemo dobijene razlomke na zajednički nazivnik. Kako je $NZS(21, 9, 63) = 63$, to proširujući razlomke $\frac{8}{9}$ i $\frac{a}{21}$ redom sa 7 i 3 dobijamo

$$\frac{56}{63} \leq \frac{3a}{63} \leq \frac{59}{63}.$$

Oдавde zaključujemo da mora vrijediti

$$56 \leq 3a \leq 59,$$

a kako je 57 jedini broj djeljiv sa 3 koji se nalazi između 56 i 59, zaključujemo da je $3a = 57$, odakle je $a = 19$. Dakle jedina trojka (x, y, a) koja zadovoljava uslove zadatka je $(7, 5, 19)$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da $\overline{y96x4y}$ mora biti djeljiv sa 5 i 9 vrijedi **1 bod**
- Za zaključak da je jedina mogućnost $y = 5$ učenik dobija **3 boda** i to **2 boda** za zaključak da je $y = 0$ ili $y = 5$ i **1 bod** za zaključak da y ne može biti 0
- Zaključak da $x + 29$ mora biti 36 vrijedi **4 boda**, od čega su **2 boda** za zaključak da $x + 29$ mora biti djeljivo sa 9 (samo navođenje pravila djeljivosti sa 9 vrijedi 1 bod)
- Zaključak da je jedina mogućnost $x = 7$ vrijedi **1 bod**
- Dobijanje relacije $\frac{8}{9} \leq \frac{a}{21} \leq \frac{59}{63}$ vrijedi **2 boda**
- Svođenje razlomaka na zajednički nazivnik vrijedi **5 bodova**
- Zaključak da je $a = 19$ nosi **4 boda**, od čega je **2 boda** za zaključak da mora vrijediti $56 \leq 3a \leq 59$

- 2. zadatak** **a)** Odrediti skupove A i B koji imaju jednak broj elemenata, ako je poznato da za njih vrijedi $A \cup B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ i } x < 200\} = \{1,2,3, \dots, 198, 199\}$, $A \cap B = \{1,2,100,101,102\}$, te je svaki element skupa $A \setminus B$ veći od svakog elementa skupa $B \setminus A$. Odgovor obrazložiti!
- b)** Za koliko je zbir elemenata skupa A veći od zbira elemenata skupa B ? Odgovor obrazložiti!

Rješenje: **a)** Kako je $A \cap B = \{1,2,100,101,102\}$, elementi $1,2,100,101,102$ pripadaju i skupu A i skupu B , dok preostalih $199 - 5 = 194$ elementa iz skupa $\{1,2,3, \dots, 198, 199\}$ pripadaju tačno jednom od skupova A i B (to su elementi $3,4,5, \dots, 98, 99, 103, 104, \dots, 198, 199$). Kako A i B imaju isto elemenata, to će $194:2 = 97$ tih elemenata biti u skupu A (i to 97 većih, tj. $103, 104, \dots, 199$), dok će preostalih 97 elemenata (manjih, tj. $3,4, \dots, 99$) biti u skupu B . Zbog toga je $A = \{1,2,100,101,102,103, \dots, 199\}$, $B = \{1,2,3,4, \dots, 99, 100, 101, 102\}$.

b) Rješenje 1: Kako zajednički elementi skupova ne utiču na razliku u zbiru, to je razlika zbira elemenata A i B jednaka razlici zbira elemenata skupova $(A \setminus B)$ i $(B \setminus A)$. Međutim, primijetimo da za svaki element $x \in (B \setminus A)$ vrijedi $(x + 100) \in (A \setminus B)$. Kako svaki od skupova $(A \setminus B)$ i $(B \setminus A)$ ima 97 elemenata, to znači da je razlika zbira elemenata skupa $(A \setminus B)$ i zbira elemenata skupa $(B \setminus A)$ jednaka $97 \cdot 100 = 9700$. Dakle, zbir elemenata skupa A je za 9700 veći od zbira elemenata skupa B .

Napomena: Alternativno, gornje rješenje smo mogli zapisati i na sljedeći način: Kako je $A = \{1,2,100,101,102,103, \dots, 199\}$, $B = \{1,2,3,4, \dots, 99, 100, 101, 102\}$, razlika zbirova je

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + 100 + 101 + 102 + 103 + \dots + 199) \\ & \quad - (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100 + 101 + 102) \\ & = (103 - 3) + (104 - 4) + \dots + (199 - 99) \\ & = 100 + 100 + \dots + 100 = 97 \cdot 100 = 9700. \end{aligned}$$

Rješenje 2: Zbir elemenata skupa A je

$$\begin{aligned} S_A &= 1 + 2 + 100 + 101 + 102 + \dots + 199 = (1 + 2) + (100 + 101 + \dots + 199) \\ &= 3 + ((100 + 199) + (101 + 198) + \dots + (149 + 150)) - \\ &= 3 + 299 \cdot 50 = 3 + 14950 = 14953. \end{aligned}$$

Zbir elemenata skupa B je

$$\begin{aligned} S_B &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100 + 101 + 102 \\ &= (1 + 102) + (2 + 101) + \dots + (51 + 52) = 103 \cdot 51 = 5253. \end{aligned}$$

Konačno, tražena razlika je $S_A - S_B = 14953 - 5253 = 9700$.

Šema bodovanja:

Dio pod a) nosi **8 bodova**, i to:

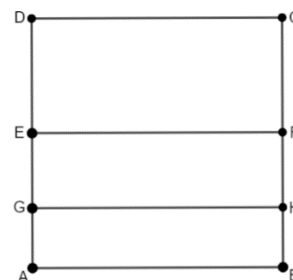
- zaključak da pored zajedničkih elemenata treba dodati još po 97 elemenata u A i B (**2 boda**)
- zaključak da većih 97 elemenata ide u A , a manjih 97 u B (**2 boda**)
- tačno određivanje skupova A i B (**4 boda**, po 2 za svaki od skupova)

Dio pod b) nosi **12 bodova**, i to:

- za prvo rješenje: **2 boda** za zaključak da je dovoljno posmatrati skupove bez zajedničkih elemenata, **6 bodova** za uparivanje elemenata sa razlikom 100, **4 boda** za određivanje razlike
- za drugo rješenje: po **5 bodova** za računanje zbira elemenata skupova A i B , **2 boda** za razliku

3. zadatak

Kvadrat $ABCD$ stranice 88 cm podijeljen je sa dvije paralelne prave na tri pravougaonika: $EFCD$, $GHFE$ i $ABHG$, kao na slici. Poznato je da je površina pravougaonika $EFCD$ dvostruko veća od površine pravougaonika $GHFE$, kao i da je obim pravougaonika $GHFE$ za 8 cm veći od obima pravougaonika $ABHG$. Odrediti površinu pravougaonika $GHFE$.

**Rješenje:**

Neka je $EG = x$. Kako je $P_{EFCD} = 2P_{GHFE}$, to dobijamo

$$DE \cdot EF = 2 \cdot EG \cdot GH$$

$$DE \cdot 88 = 2 \cdot x \cdot 88 \quad / : 88$$

$$DE = 2x.$$

S druge strane, kako je $O_{GHFE} = O_{ABHG} + 8$, to vrijedi

$$2 \cdot (EG + GH) = 2 \cdot (AG + AB) + 8$$

$$2 \cdot (x + 88) = 2 \cdot (AG + 88) + 8$$

$$2x + 176 = 2 \cdot AG + 176 + 8 \quad / -184$$

$$2x - 8 = 2 \cdot AG \quad / : 2$$

$$AG = x - 4.$$

Kako je $AG + GE + ED = AD$, to imamo

$$x - 4 + x + 2x = 88$$

$$4x = 92$$

$$x = 92 : 4 = 23\text{ cm}.$$

Sada je površina pravougaonika $GHFE$ jednaka $GE \cdot GH = 23 \cdot 88 = 2024\text{ cm}^2$.

Šema bodovanja:

- Zaključak $DE = 2 \cdot EG$ (**4 boda**, od čega **1 bod** za pravilno postavljanje uslova za površine)
- Zaključak $EG = AG + 4$ (**5 bodova**, od čega **2 boda** za pravilno postavljanje uslova za obime)
- Postavljanje jednačine iz koje se može odrediti GE (ili DE ili AG) (**5 bodova**)
- Određivanje dužine duži GE (**2 boda**) i površine pravougaonika $GHFE$ (**4 boda**)

4. zadatak Nora je čitav dan pisala cifre na ogromnu tablu: najprije je napisala dvije cifre, 2 i 4, a nakon toga svaku narednu cifru dobija tako što pomnoži prethodne dvije cifre sa table, te na tablu napiše posljednju cifru tog proizvoda. Na primjer, treća cifra na tabli će biti 8, jer je to posljednja cifra proizvoda $2 \cdot 4 = 8$, četvrta cifra će biti 2, jer je to posljednja cifra proizvoda $4 \cdot 8 = 32$, peta cifra će biti 6, jer je to posljednja cifra proizvoda $8 \cdot 2 = 16$, i tako dalje.

a) Koja će biti 2024. cifra na tabli? Odgovor detaljno obrazložiti!

b) Koji je zbir prvih 2024 cifara na tabli? Odgovor detaljno obrazložiti!

c) Na kojem mjestu po redu će se 2024. put pojaviti cifra 2? Odgovor detaljno obrazložiti!

Rješenje: Prvih nekoliko cifara 2,4,8,2,6,2,2,4,8,2,6,2,2,4, ... Primijetimo da se niz cifara 2,4,8,2,6,2 (nazovimo ga ciklus) stalno ponavlja, tj. svaka šesta cifra je ista.

a) Da bismo odredili koja je 2024. cifra, prvo odredimo koliko se kompletnih ciklusa završi do 2024. cifre. Kako broj 2024 pri dijeljenju sa 6 daje količnik 337 i ostatak 2, to se nakon 2022 cifara završi 337 punih ciklusa, pa je na 2023. mjestu cifra 2, a na 2024. mjestu cifra 4. Dakle, na 2024. mjestu nalazi se cifra 4.

b) Kako se nakon 2022 cifara završi 337 punih ciklusa, a zbir cifara u svakom tom ciklusu je $2 + 4 + 8 + 2 + 6 + 2 = 24$, to je zbir prvih 2022 cifara jednak $337 \cdot 24 = 8088$. Kada dodamo 2023. i 2024. cifru, zbir je $8088 + 2 + 4 = 8094$.

c) U svakom ciklusu se pojavljuju tri cifre 2. Kako je broj 2022 djeljiv sa 3, to je potrebno $2022 : 3 = 674$ punih ciklusa da se cifra 2 pojavi 2022 puta. Nakon 674 ciklusa je napisano ukupno $674 \cdot 6 = 4044$ cifara, nakon čega počinje naredni ciklus. Na 4045. mjestu će se naći cifra 2 (2023. put), na 4046. mjestu će se naći cifra 4, na 4047. mjestu će se naći cifra 8, te na 4048. mjestu cifra 2, i to 2024. put. Dakle, na 4048. mjestu će se cifra 2 pojaviti 2024. put.

Šema bodovanja:

- Zaključak da se cifre ponavljaju svakih 6 mjesta **(3 boda)**
- Dokaz da se cifra 4 nalazi na 2024. mjestu **(5 bodova)**
- Dokaz da je zbir prvih 2024 cifara jednak 8094 **(4 boda)**
- Dokaz da će se cifra 2 pojaviti 2024. put na 4048. mjestu **(8 bodova)**

Napomena: Ako učenik napiše samo konačan rezultat, ne dobija bodove. Isto vrijedi i ako učenik pogrešnim postupkom dođe do tačnog rezultata.

5. zadatak **a)** Emil je zamislio neki prirodan broj. Primijetio je da taj broj daje isti ostatak pri dijeljenju sa 18 i pri dijeljenju sa 24. Međutim, pri dijeljenju tog broja sa 18, količnik je dvostruko veći od ostatka, dok je prilikom dijeljenja tog broja sa 24 količnik za 7 veći od ostatka. Koji je broj Emil zamislio? Odgovor obrazložiti!

b) Broj 2024 daje ostatak 8 i pri dijeljenju sa 18 i pri dijeljenju sa 24. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10000 (uključujući i 2024) koji daju ostatak 8 i pri dijeljenju sa 18 i pri dijeljenju sa 24? Odgovor obrazložiti!

Rješenje: **a)** Neka je Emil zamislio broj n , te neka je x ostatak koji je dobio pri dijeljenju n sa 18 i sa 24.

Po uslovu zadatka, količnik pri dijeljenju broja n sa 18 je jednak $2x$, pa je $n : 18 = 2x$ (x), odakle dobijamo $n = 18 \cdot 2x + x = 36x + x = 37x$. (1)

S druge strane, količnik pri dijeljenju broja n sa 24 je jednak $x + 7$, tj. $n : 24 = x + 7$ (x), odakle je $n = 24 \cdot (x + 7) + x = 24x + 168 + x = 25x + 168$. (2)

Izjednačavanjem (1) i (2) dobijamo $37x = 25x + 168$, tj. $12x = 168$, odakle je $x = 14$. Dakle, Emil je zamislio broj $n = 37x = 37 \cdot 14 = 518$.

b) Ako broj m pri dijeljenju i sa 18 i sa 24 daje ostatak 8, broj $m - 8$ je djeljiv i sa 18 i sa 24, pa je djeljiv sa njihovim najmanjim zajedničkim sadržiocem, tj. sa $NZS(18,24) = 72$, tj. broj m daje ostatak 8 pri dijeljenju sa 72. Dakle, trebamo odrediti broj brojeva manjih od 10000 koji pri dijeljenju sa 72 daju ostatak 8. Kako je $10000 : 72 = 138$ (64), najveći broj manji od 10000 koji pri dijeljenju sa 72 daje ostatak 8 je $9944 = 138 \cdot 72 + 8$. Dakle, traženi brojevi su 8 ($0 \cdot 72 + 8$), 80 ($1 \cdot 72 + 8$), 152 ($2 \cdot 72 + 8$), ..., 9944 ($138 \cdot 72 + 8$), a ima ih 139.

Šema bodovanja:

Dio pod a) nosi **10 bodova**, i to:

- Relacija $n = 37x$ (**3 boda**, od čega **1 bod** na relaciju $n : 18 = 2x$ (x))
- Relacija $n = 25x + 168$ (**3 boda**, od čega **1 bod** za $n : 24 = x + 7$ (x))
- Završetak dokaza (**4 boda**, **2 boda** za izjednačavanje relacija, **1 bod** za x i **1 bod** za n)

Dio pod b) nosi **10 bodova**, i to:

- Dokaz da broj mora davati ostatak 8 pri dijeljenju sa 72 (**6 bodova**)
- Određivanje broja traženih brojeva (**4 boda**, učenik gubi 1 bod za rezultat 138)

Kanton Sarajevo
RJEŠENJA ZADATAKA KANTONALNOG TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
19. marta/ožujka 2024.

VII razred

Zadatak 1. U tri vreće ukupno ima 2024 kg brašna. U drugoj je $\frac{5}{4}$ puta više brašna nego u prvoj, a u trećoj je 2.8 puta više brašna nego u drugoj. Odrediti koliko kilograma brašna ima u svakoj od vreća.

Rješenje.

Označimo količinu brašna (u kilogramima) u prvoj vreći sa x . Količina brašna u drugoj vreći je $\frac{5}{4}x$, a u trećoj

$$2.8 \cdot \frac{5}{4}x = \frac{28}{10} \cdot \frac{5}{4}x = \frac{14}{5} \cdot \frac{5}{4}x = \frac{14}{4}x = \frac{7}{2}x.$$

Po uslovu zadatka vrijedi

$$x + \frac{5}{4}x + \frac{7}{2}x = 2024,$$

odnosno

$$\frac{4x + 5x + 14x}{4} = 2024$$

$$\frac{23x}{4} = 2024$$

$$23x = 4 \cdot 2024 = 8096$$

$$x = 8096 : 23 = 352.$$

Dakle, u prvoj vreći je 352 kg, u drugoj $\frac{5}{4} \cdot 352 = 440$ kg, a u trećoj $\frac{7}{2} \cdot 352 = 1232$ kg brašna.

Šema bodovanja

- Uvođenje nepoznate koja predstavlja količinu brašna u jednoj od vreća: **1 bod**
- Izražavanje količine brašna u preostale dvije vreće preko iste nepoznate: **6 bodova** (po 3 boda za obje vreće)
- Postavljanje jednačine s jednom nepoznatom iz uslova da je ukupa količina brašna 2024 kg: **3 boda**
- Rješavanje postavljene jednačine: **6 bodova**
- Dobijanje količine brašna u svakoj od vreća: **4 boda**

Zadatak 2. Koliko ima sedmocifrenih brojeva u čijem se zapisu javljaju samo cifre 5 i 7, a koji su djeljivi s 45?

Rješenje.

Broj je djeljiv s 45 ako i samo ako je djeljiv sa 5 i sa 9.

Broj je djeljiv s 5 ako i samo ako mu je cifra jedinica 0 ili 5. U našem slučaju to mora biti cifra 5.

Broj je djeljiv s 9 ako i samo ako mu je zbir cifara djeljiv s 9. Neka broj ima k cifara 5. Tada ima $7 - k$ cifara 7 i vrijedi $1 \leq k \leq 7$ (ne može biti $k = 0$ jer smo ustanovili da broj ima barem jednu cifru 5). Zbir cifara ovog broja je

$$5 \cdot k + 7 \cdot (7 - k) = 5k + 49 - 7k = 49 - 2k,$$

i ovaj broj mora biti djeljiv s 9.

Za $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ dobijamo redom $49 - 2k = 47, 45, 43, 41, 39, 37, 35$, odakle zaključujemo da je $k = 2$ jedini broj za koji je $49 - 2k$ djeljivo s 9. Dakle, traženi broj ima dvije cifre 5 i pet cifara 7.

Kako jedna cifra 5 mora biti cifra jedinica, preostala cifra 5 se može pojaviti na jednoj od preostalih 6 pozicija, pa postoji 6 brojeva s traženom osobinom (to su 5777775, 7577775, 7757775, 7775775, 7777575 i 7777755).

Šema bodovanja

- Tvrdnja da je broj djeljiv s 45 ako i samo ako je djeljiv sa 5 i sa 9: **1 bod**
- Zaključak da zbog djeljivosti s 5 posljednja cifra mora biti 5: **2 boda**
- Tvrdnja da zbir cifara broja mora biti djeljiv s 9: **1 bod**
- Zaključak da broj mora sadržavati tačno dvije cifre 5: **10 bodova** (moguće je dobiti parcijalne bodove za ovaj korak u ovisnosti od načina na koji je učenik provodio postupak)
- Zaključak da postoji 6 brojeva s traženom osobinom: **6 bodova**

Zadatak 3. Mađioničar ima 3 kutije kovanica: plavu, žutu i bijelu. U plavoj kutiji se nalazi određen broj kovanica od 5 KM, u žutoj određen broj kovanica od 2 KM, a u bijeloj određen broj kovanica od 1 KM. Kada mađioničar štapićem dotakne dvije kutije, sve kovanice iz prve kutije uzimaju vrijednost kovanica iz druge kutije i obratno. Na primjer, kada bi štapićem dotakao plavu i žutu kutiju, sve kovanice u plavoj kutiji bi se pretvorile u kovanice od 2 KM, a sve kovanice u žutoj kutiji bi se pretvorile u kovanice od 5 KM (tj. kovanice od 5 KM su se pretvorile u 2 KM i obratno). Vrijedi sljedeće:

- Kada bi mađioničar štapićem dotakao plavu i bijelu kutiju, ukupna vrijednost novca u kutijama bi se umanjila za 60 KM.
- Kada bi mađioničar štapićem dotakao žutu i bijelu kutiju, ukupna vrijednost novca u kutijama bi se povećala za 7 KM.

Kada bi mađioničar štapićem dotakao plavu i žutu kutiju, da li bi se ukupna vrijednost novca povećala ili umanjila, i za koliko?

Rješenje.

Označimo sa a, b, c redom broj kovanica u plavoj, žutoj i bijeloj kutiji. Ukupna vrijednost novca je tada $5a + 2b + c$. Kada bi mađioničar štapićem dotakao plavu i bijelu kutiju, sve kovanice u plavoj kutiji bi se pretvorile u kovanice od 1 KM, a sve kovanice u bijeloj kutiji bi se pretvorile u kovanice od 5 KM. To znači da bi nova vrijednost novca bila $a + 2b + 5c$, pa po uslovu zadatka imamo

$$(5a + 2b + c) - (a + 2b + 5c) = 60$$

$$5a + 2b + c - a - 2b - 5c = 60$$

$$4a - 4c = 60$$

$$a - c = 15$$

$$a = c + 15.$$

Slično, kada bi mađioničar štapićem dotakao žutu i bijelu kutiju, nova vrijednost novca bi bila $5a + b + 2c$, pa vrijedi

$$(5a + b + 2c) - (5a + 2b + c) = 7$$

$$5a + b + 2c - 5a - 2b - c = 7$$

$$c - b = 7$$

$$c = b + 7,$$

odakle je $a = c + 15 = (b + 7) + 15 = b + 22$.

Uvrštavajući $a = b + 22$ i $c = b + 7$ dobijamo da je ukupna vrijednost novca

$$5a + 2b + c = 5(b + 22) + 2b + (b + 7) = 5b + 110 + 2b + b + 7 = 8b + 117.$$

Kada bi mađioničar štapićem dotakao plavu i žutu kutiju, nova vrijednost novca bi bila

$$2a + 5b + c = 2(b + 22) + 5b + (b + 7) = 2b + 44 + 5b + b + 7 = 8b + 51,$$

što znači da bi se ukupna vrijednost novca smanjila, i to za

$$8b + 117 - (8b + 51) = 8b + 117 - 8b - 51 = 66.$$

Šema bodovanja

- Dobijanje relacije ekvivalentne relaciji $a = c + 15$: **7 bodova**
- Dobijanje relacije ekvivalentne relaciji $c = b + 7$: **7 bodova**
- Dobijanje tačnog rezultata: **6 bodova**

Napomena: na svaki korak ove šeme je moguće dobiti parcijalne bodove u zavisnosti od načina na koji je učenik provodio postupak

Zadatak 4. U jednom razredu svaki učenik je ili *iskren*, ili *lažljiv*, ili *promjenljiv*.

- Iskreni učenici na svako pitanje odgovaraju istinito.
- Lažljivi učenici na svako pitanje odgovaraju neistinito.
- Promjenljivi učenici na pitanja koja im se postavljaju naizmjenično odgovaraju istinito i neistinito (dakle, ako su na prethodno pitanje odgovorili istinu, na sljedeće će lagati i obratno). Pri tome, nije poznato da li na prvo postavljeno pitanje odgovaraju istinito ili ne (moguće je da neki promjenljivi učenici odgovore istinito, a drugi promjenljivi učenici odgovore neistinito na prvo pitanje).

Nastavnik je učenicima postavljao pitanja. Nakon svakog pitanja svaki učenik je na papir napisao odgovor ("Da" ili "Ne"). Prvo je postavio pitanje "Da li si iskren?" i dobio 22 odgovora "Da" (ostali odgovori su bili "Ne"). Zatim je postavio pitanje "Da li si promjenljiv?" i dobio 15 odgovora "Da". Konačno, postavio je pitanje "Da li si lažljiv?" i dobio 9 odgovora "Da". Da li u razredu ima više iskrenih ili lažljivih učenika?

Rješenje.

Iskren učenik će dati redom odgovore "Da", "Ne", "Ne". Označimo sa x broj ovakvih učenika.

Lažljiv učenik će dati redom odgovore "Da", "Da", "Ne". Označimo sa y broj ovakvih učenika.

Za promjenljivog učenika postoje dvije mogućnosti:

- 1) Ako je na prvo pitanje odgovorio istinito, dat će redom odgovore "Ne", "Ne", "Ne". Označimo sa z broj ovakvih učenika.
- 2) Ako je na prvo pitanje odgovorio neistinito, dat će redom odgovore "Da", "Da", "Da". Označimo sa t broj ovakvih učenika.

Vidimo da je na prvo pitanje sa "Da" odgovorilo $x + y + t$ učenika, na drugo pitanje sa "Da" odgovorilo $y + t$ učenika, a na treće pitanje sa "Da" odgovorilo t učenika. Po uslovu zadatka imamo

$$x + y + t = 22$$

$$y + t = 15$$

$$t = 9.$$

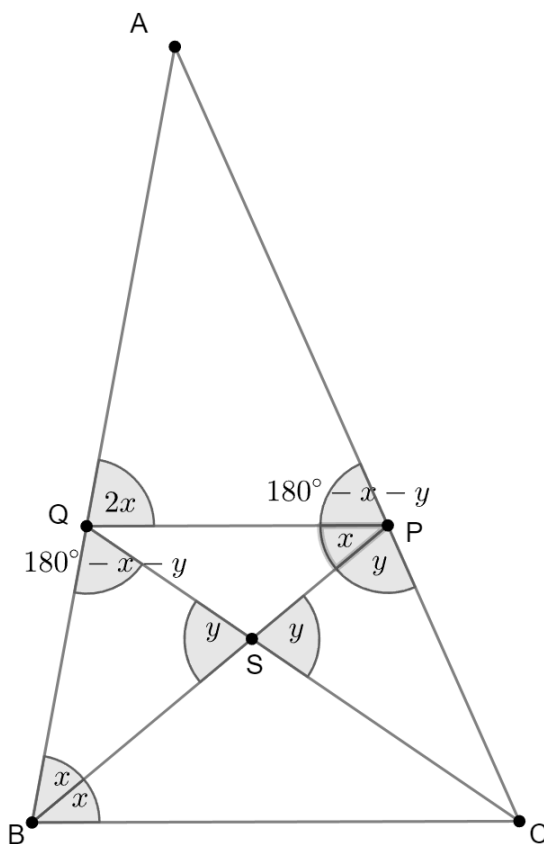
Iz druge i treće jednačine dobijamo $y = 15 - 9 = 6$, a zatim iz prve $x = 22 - 6 - 9 = 7$. Dakle, ima 7 iskrenih i 6 lažljivih učenika, tj. ima više iskrenih nego lažljivih učenika.

Šema bodovanja

- Navođenje odgovora koje će dati iskren učenik: **2 boda**
- Navođenje odgovora koje će dati lažljiv učenik: **2 boda**
- Navođenje obje mogućnosti za odgovore koje će dati promjenljiv učenik: **8 bodova**
- Dobijanje da ima 6 lažljivih učenika: **3 boda**
- Dobijanje da ima 7 iskrenih učenika: **4 boda**
- Zaključak da ima više iskrenih nego lažljivih učenika: **1 bod**

Zadatak 5. Dat je trougao $\triangle ABC$. Na stranici AC odabrana je tačka P , a na stranici AB tačka Q tako da vrijedi $PQ \parallel BC$. Duži BP i CQ se sijeku u tački S , i važi $CP = CS$ i $PQ = BQ$. Dokazati da je $CQ = AP$.

Rješenje.



Kako je $PQ = BQ$, trougao $\triangle BPQ$ je jednakokraki, pa vrijedi $\angle QBP = \angle BPQ$. Označimo veličinu ovog ugla sa x . Slično, iz $CP = CS$ imamo da je trougao $\triangle CSP$ jednakokraki, pa je $\angle CSP = \angle CPS$. Označimo veličinu ovog ugla sa y . Imamo $\angle QPA = 180^\circ - \angle BPQ - \angle CPS = 180^\circ - x - y$.

Kako je $PQ \parallel BC$, to su uglovi $\angle QPB$ i $\angle PBC$ jednaki kao transverzalni uglovi, pa je $\angle PBC = x$. To znači da je $\angle ABC = \angle QBP + \angle PBC = 2x$, pa iz $PQ \parallel BC$ dobijamo $\angle AQP = \angle ABC = 2x$.

S druge strane, uglovi $\angle BSQ$ i $\angle CSP$ su jednaki kao unakrsni, pa je $\angle BSQ = y$. Sada iz trougla $\triangle BSQ$ imamo $\angle BQS = 180^\circ - \angle QBS - \angle BSQ = 180^\circ - x - y$.

Sada imamo da vrijedi $\angle AQP = \angle QBC = 2x$, $BQ = QP$ i $\angle QPA = \angle BQC = 180^\circ - x - y$, pa na osnovu stava USU zaključujemo da su trouglovi $\triangle AQP$ i $\triangle CBQ$ podudarni. Iz ove podudarnosti slijedi $AP = CQ$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja

- Zaključak $\angle QBP = \angle BPQ$: **1 bod**
- Zaključak $\angle CSP = \angle CPS$: **1 bod**
- Zaključak $\angle PBC = \angle QPB$: **3 boda**
- Zaključak $\angle AQP = \angle ABC$: **3 boda**
- Zaključak $\angle QPA = \angle BQC$: **3 boda**
- Zaključak $\triangle AQP \cong \triangle CBQ$: **7 bodova**
- Zaključak $AP = CQ$: **2 boda**

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
19. marta/ožujka 2024.

VIII razred
Rješenja zadataka

Zadatak 1. Odrediti koji od data dva broja je veći:

- a) 3^{503} ili 27^{168} ,
- b) 3^{400} ili 79^{100} ,
- c) 5^{300} ili 11^{200} .

Odgovore obrazložiti!

Rješenje:

a)

Kako je $27 = 3^3$, to je $27^{168} = (3^3)^{168} = 3^{504}$. Odatle,

$$(3 > 1 \wedge 503 < 504) \Rightarrow 3^{503} < 3^{504} = 27^{168}.$$

b) Kako je $3^{400} = (3^4)^{100} = 81^{100}$, vrijedi

$$3^{400} = 81^{100} > 79^{100}.$$

c) Imamo:

$$5^{300} = (5^3)^{100} = 125^{100},$$
$$11^{200} = (11^2)^{100} = 121^{100}.$$

Odatle zaključujemo da je

$$5^{300} > 11^{200}.$$

Šema bodovanja:

- dio pod a): **6 bodova**, od toga:
 - zapis 27^{168} kao 3^{504} : **5 boda**
 - zaključak da je drugi broj veći: **1 bod**
- dio pod b): **6 bodova**, od toga:
 - zapis 3^{400} kao 81^{100} : **4 boda**
 - zaključak da je prvi broj veći: **2 boda**
- dio pod c): **8 bodova**, od toga:
 - zapis 5^{300} kao $(5^3)^{100}$: **3 boda**
 - zapis 11^{200} kao $(11^2)^{100}$: **3 boda**
 - zaključak da je prvi broj veći: **2 boda**

Zadatak 2. U paralelogramu $ABCD$ vrijedi $AB = CD = 4, BC = DA = DB = 7$.

- Odrediti površinu paralelograma $ABCD$.
- Odrediti dužinu dijagonale AC .

Napomena: Dužine na datoj slici nisu proporcionalne stvarnim dužinama duži!

Rješenje:

- I način:** Neka je E podnožje visine iz tačke D na stranicu AB . Kako je trougao $\triangle ABD$ jednakokraki, to je E ujedno i sredina stranice AB , pa je $AE = EB = 2$.

Sada iz Pitagorine teoreme u trouglu $\triangle AED$ imamo

$$DE^2 = AD^2 - AE^2 = 7^2 - 2^2 = 45 \Rightarrow DE = 3\sqrt{5}.$$

Površina paralelograma $ABCD$ jednaka je $AB \cdot DE = 4 \cdot 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$.

II način: Heronovom formulom možemo izračunati površinu $\triangle ABD$ (sa polubimom $s = \frac{(7+7+4)}{2} = 9$):

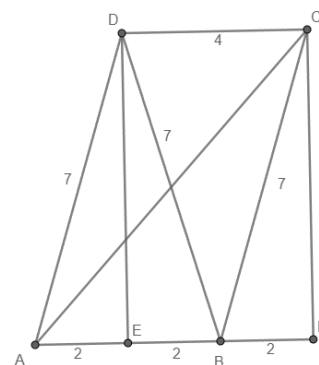
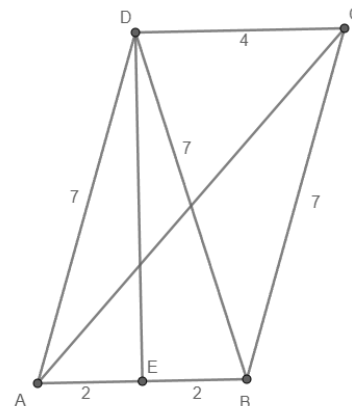
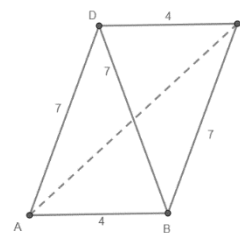
$$P_{\triangle ABD} = \sqrt{s(s-AB)(s-BD)(s-DA)} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

Površina paralelograma je duplo veća od površine $\triangle ABD$ pa ona iznosi $12\sqrt{5}$.

- Neka je F podnožje visine iz tačke C na pravu AB . Pošto je $AB \parallel CD$, imamo da je $CF = DE = 3\sqrt{5}$. Četverougao $EFCD$ je pravougaonik, pa je $EF = CD = 4$, odnosno $BF = EF - EB = 4 - 2 = 2$.

Sada iz Pitagorine teoreme u trouglu $\triangle AFC$ imamo

$$AC^2 = CF^2 + AF^2 = 45 + 36 = 81 \Rightarrow AC = 9.$$



Šema bodovanja:

- dio pod a): **8 bodova**, od toga:
 - I način:
 - izračun visine DE : **5 bodova**
 - izračun površine paralelograma: **3 boda**
 - II način:
 - izračun površine $\triangle ABD$: **5 bodova**
 - izračun površine paralelograma: **3 boda**
- dio pod b): **12 bodova**, od toga:
 - uvođenje tačke F (ili neke druge tačke pomoću koje se može izračunati dužina AC): **2 boda**
 - dokaz $CF = 3\sqrt{5}$: **2 boda**
 - dokaz $BF = 2$ (ili $AF = 6$): **3 boda**
 - izračunavanje dužine AC : **5 bodova**

Zadatak 3. Neka su x i y realni brojevi za koje vrijedi:

$$\begin{aligned}x + y^2 &= 6, \\x^2 + y^4 &= 21.\end{aligned}$$

Odrediti sve moguće vrijednosti izraza $x^8 - y^{16}$.

Rješenje:

Imamo

$$x^8 - y^{16} = (x^4)^2 - (y^8)^2 = (x^4 - y^8)(x^4 + y^8) = (x^2 - y^4)(x^2 + y^4)(x^4 + y^8) = (x - y^2)(x + y^2)(x^2 + y^4)((x^2 + y^4)^2 - 2x^2y^4).$$

Trebamo odrediti $x - y^2$ i xy^2 . Imamo:

$$(x + y^2)^2 = x^2 + y^4 + 2xy^2 \Rightarrow xy^2 = \frac{(x + y^2)^2 - (x^2 + y^4)}{2} = \frac{6^2 - 21}{2} = \frac{15}{2},$$

$$(x - y^2)^2 = x^2 + y^4 - 2xy^2 = 21 - 15 = 6 \Rightarrow x - y^2 = \pm\sqrt{6}.$$

Stoga je

$$x^8 - y^{16} = \pm\sqrt{6} \cdot 6 \cdot 21 \cdot \left(21^2 - 2 \cdot \frac{225}{4}\right) = \pm\sqrt{6} \cdot 6 \cdot 21 \cdot \frac{657}{2} = \pm 41391\sqrt{6}.$$

Napomena: Može se dokazati da se obe vrijednosti $x - y^2 = \pm\sqrt{6}$ mogu dostići, ali se učeniku/ici neće oduzimati bodovi ako to ne dokaže.

Šema bodovanja:

- zapis $x^8 - y^{16}$ kao $(x - y^2)(x + y^2)(x^2 + y^4)(x^4 + y^8)$: **6 bodova**
- izračunavanje xy^2 : **4 boda**
- izračunavanje $x^4 + y^8$: **2 boda**
- izračunavanje $x - y^2$: **7 bodova (-3 boda ako učenik/ica izostavi jedan od slučajeva)**
- krajnje računanje izraza $x^8 - y^{16}$: **1 bod**

Zadatak 4.

- a) Nora je zamislila neki prirodan broj. Primijetila je da taj broj daje isti ostatak pri dijeljenju sa 18 i pri dijeljenju sa 24. Međutim, pri dijeljenju tog broja sa 18, količnik je za 11 veći od količnika koji se dobija pri dijeljenju tog broja sa 24. Koje je sve brojeve Nora mogla zamisliti? Odgovor obrazložiti!
- b) Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10000 koji daju isti ostatak i pri dijeljenju sa 18 i pri dijeljenju sa 24? Odgovor obrazložiti!

Napomena: Ostatak pri dijeljenju sa nekim brojem može biti jednak 0.

Rješenje:

- Neka je Nora zamislila broj n , neka su količnici pri dijeljenju n sa 18 i 24 jednaki k_1 i k_2 redom, te neka je o ostatak u oba dijeljenja. To nam govori da je

$$n = 18 \cdot k_1 + o$$

i

$$n = 24 \cdot k_2 + o.$$

Odnosno $n - o = 18 \cdot k_1 = 24 \cdot k_2$ (*). Iz uslova zadatka je $k_1 = 11 + k_2$, pa uvrštavanjem u (*) imamo

$$18 \cdot (11 + k_2) = 24 \cdot k_2 \Rightarrow k_2 = 33 \Rightarrow k_1 = 44.$$

Dakle, $n = 792 + o$. Kako je o ostatak pri dijeljenju broja n sa 18 i 24, to znači da $o \in \{0, 1, 2, \dots, 17\}$, odnosno $n \in \{792, 793, 794, \dots, 809\}$.

- Ako broj m pri dijeljenju sa 18 i sa 24 daje isti ostatak o ($0 \leq o \leq 17$), onda je broj $m - o$ djeljiv i sa 18 i sa 24, pa je djeljiv sa njihovim najmanjim zajedničkim sadržiocem, tj. sa $NZS(18, 24) = 72$. Dakle, broj m daje ostatak o pri dijeljenju sa 72. Očigledno vrijedi i obratno, tj. ako broj m daje ostatak $0 \leq o \leq 17$ pri dijeljenju sa 72, onda on daje i ostatak o pri dijeljenju sa 18 i 24. Dakle, trebamo zapravo odrediti koliko je prirodnih brojeva $m < 10000$ koji daju ostatak $o \in \{0, 1, 2, \dots, 17\}$ pri dijeljenju sa 72. Kako je $10000 = 72 \cdot 138 + 64$, zaključujemo da za svako $o \in \{1, 2, \dots, 17\}$ ima tačno 139 prirodnih brojeva manjih od 10000 koji daju ostatak o pri dijeljenju sa 72 (to su brojevi $o, o + 72, o + 72 \cdot 2, \dots, o + 72 \cdot 138$), dok za $o = 0$ takvih brojeva ima 138 (to su brojevi $72, 72 \cdot 2, 72 \cdot 3, \dots, 72 \cdot 138$). Dakle, ukupno brojeva m sa traženim osobinama ima $139 \cdot 17 + 138 = 2501$.

Šema bodovanja:

- dio pod a): **10 bodova**, od toga:
 - dobivanje relacije $n = 18 \cdot k_1 + o$: **2 boda**
 - dobivanje relacije $n = 24 \cdot k_2 + o$: **2 boda**
 - izračunavanje k_1 ili k_2 (ili direktno n preko samo o): **2 boda**
 - zaključak da $o \in \{0, 1, 2, \dots, 17\}$ i ispisivanje svih rješenja za n : **4 boda**
- dio pod b): **10 bodova**, od toga:
 - dokaz da traženi brojevi moraju davati isti ostatak o pri dijeljenju sa 72, kao i pri dijeljenju sa 18 i 24: **6 bodova**
 - određivanje broja traženih brojeva: **4 boda** (-1 bod ukoliko učenik dobije rezultat $139 \cdot 18$)

Zadatak 5. Na krugu je poredano 15 različitih cijelih brojeva na način da je svaki broj veći od zbira iduća tri broja na krugu (u smjeru kretanja kazaljke na satu). Koliko najviše brojeva od datih 15 može biti prirodno? Odgovor obrazložiti!

Rješenje:

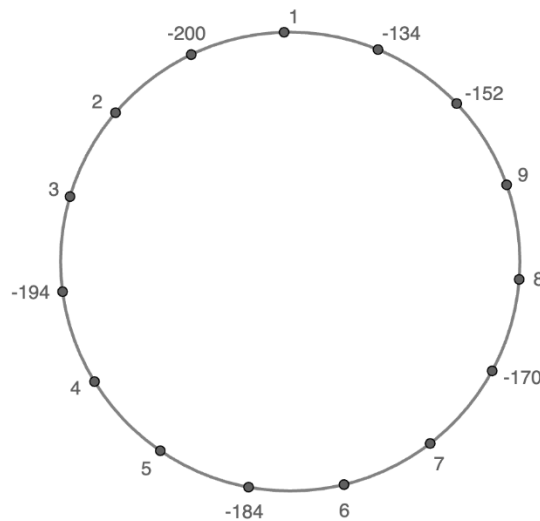
Dokazat ćemo da najviše možemo imati 9 prirodnih brojeva na krugu.

Ako se na krugu nalaze tri uzastopna prirodna broja a_i, a_{i+1} i a_{i+2} onda je $a_{i-1} > a_i + a_{i+1} + a_{i+2} > 0$. Sada na sličan način zaključujemo da je $a_{i-2} > 0$. Nastavljajući ovaj postupak dobijamo da su svi brojevi na krugu prirodni, što je nemoguće, jer najmanji od njih ne može biti veći od zbira iduća tri. Dakle, među svaka tri uzastopna broja na krugu bar jedan nije prirodan. To znači da imamo bar $\frac{15}{3} = 5$ brojeva koji nisu prirodni.

Pretpostavimo da je moguće imati tačno 5 brojeva koji nisu prirodni, odnosno da među svaka tri uzastopna broja na krugu tačno jedan nije prirodan. Neka su to brojevi $a_i, a_{i+3}, a_{i+6}, a_{i+9}, a_{i+12}$ (pri čemu je $i = 1, 2$ ili 3). Primijetimo da vrijedi

$$a_i > a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} > a_{i+3}$$

Slično zaključujemo da je $a_{i+3} > a_{i+6}, a_{i+6} > a_{i+9}, a_{i+9} > a_{i+12}, a_{i+12} > a_i$, odnosno dobijamo da je $a_i > a_i$, što je kontradikcija. Dakle, nemoguće je imati tačno 5 brojeva koji nisu prirodni, pa je takvih brojeva bar 6. Odnosno, to nam govori da je najviše $15 - 6 = 9$ prirodnih brojeva na krugu. S druge strane, zaista je moguće imati tačno 9 prirodnih brojeva, na primjer:



Šema bodovanja:

- dokaz da je bar 5 brojeva koji nisu prirodni na krugu: **4 bodova**
- dokaz da je bar 6 brojeva koji nisu prirodni na krugu: **7 bodova**
- konstrukcija u kojoj je tačno 9 prirodnih brojeva na krugu: **9 bodova**

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
19. marta/ožujka 2024. godine

IX razred

Zadatak 1. U koordinatnoj ravni, sa koordinatnim početkom O , date su tri prave: prva prava je paralelna sa x -osom i siječe y -osu u tački $A(0,3)$, druga prava je $y = 2x$, a treća $y = -4x + \frac{37}{3}$. Prva i druga prava se sijeku u tački B , prva i treća u tački C , a treća prava siječe x -osu u tački D . Odrediti površinu četverougla $OB CD$.

Zadatak 2. Ako se između cifara dvocifrenog prirodnog broja ubaci 0, dobija se (trocifreni) broj koji je 9 puta veći od polaznog broja. Odrediti o kojim brojevima je riječ.

Zadatak 3. Dokazati da između proizvoljna tri cijela broja uvijek možemo odabrati dva, nazovimo ih a i b , tako da je izraz $a^4 b^2 - a^2 b^4$ djeljiv sa 20.

Zadatak 4. Ako za nenulte realne brojeve a, b, c, d istovremeno vrijedi da je $a + b + c + d = 0$ i $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$, dokazati da onda vrijedi i

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Zadatak 5. Na težišnoj duži $\overline{AD}$ trougla ABC uzeta je tačka E takva da je $\overline{AE} = \overline{BD}$. Ako je $\angle ADC = 60^\circ$, dokazati da je $\overline{AC} = \overline{BE}$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.

Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
19. marta/ožujka 2024. godine

IX razred

Rješenja zadataka

Zadatak 1. U koordinatnoj ravni, sa koordinatnim početkom O , date su tri prave: prva prava je paralelna sa x -osom i siječe y -osu u tački $A(0,3)$, druga prava je $y = 2x$, a treća $y = -4x + \frac{37}{3}$. Prva i druga prava se sijeku u tački B , prva i treća u tački C , a treća prava siječe x -osu u tački D . Odrediti površinu četverougla $OBCD$.

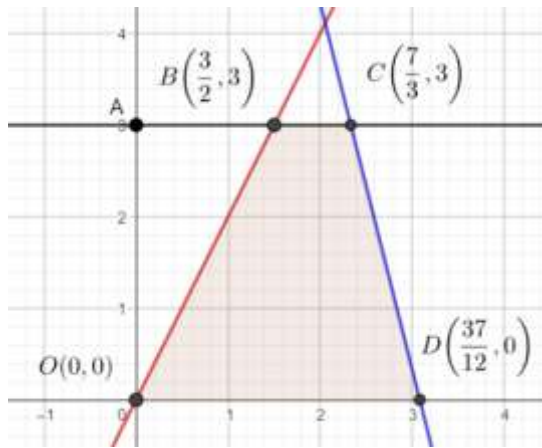
Rješenje 1: Četverougao $OBCD$ je trapez ($OD \parallel BC$), i njegovu površinu možemo izračunati po formuli

$$P = \frac{a + c}{2} \cdot h = \frac{\overline{OD} + \overline{BC}}{2} \cdot h$$

Nacrtajmo date prave, i uočimo da prva prava ima jednačinu $y = 3$. Odredimo koordinate tačaka B, C, D .

Tačka B je presjek prve prave, $y = 3$ i druge prave, $y = 2x$, te se dobije kao rješenje sistema

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = 2x \end{cases}$$



Očigledno, $y = 3$ a x dobijemo rješavajući jednačinu $3 = 2x$, tj. $x = \frac{3}{2}$. Dakle, tačka B ima koordinate $(\frac{3}{2}, 3)$.

Koordinate tačke C dobijamo rješavajući sistem

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = -4x + \frac{37}{3} \end{cases}$$

jer je tačka C presjek prave $y = 3$ i prave $y = -4x + \frac{37}{3}$.

Opet, očito je rješenje $y = 3$, a x -koordinatu dobijamo rješavajući jednačinu:

$$3 = -4x + \frac{37}{3} \Leftrightarrow 4x = \frac{37}{3} - 3 \Leftrightarrow 4x = \frac{28}{3} \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}.$$

Tačka C ima koordinate $(\frac{7}{3}, 3)$.

Konačno, tačka D pripada x -osi, pa je njena y -koordinata $y = 0$. Vrijednost x -koordinata dobijamo uvrštavajući $y = 0$ u jednačinu treće prave, $y = -4x + \frac{37}{3}$:

$$0 = -4x + \frac{37}{3} \Leftrightarrow 4x = \frac{37}{3} \Leftrightarrow x = \frac{37}{12}.$$

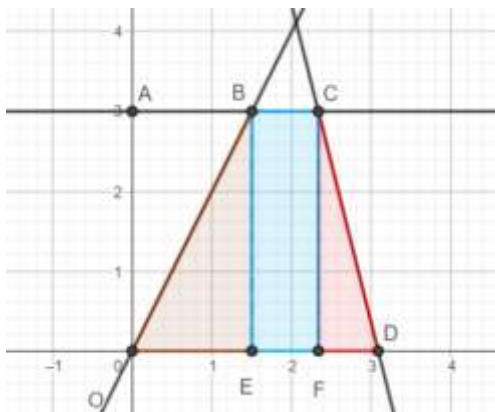
Dakle, koordinate tačke D su $(\frac{37}{12}, 0)$. Sad se lako vidi da je $\overline{OD} = \frac{37}{12}$, $\overline{BC} = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$, a $h = 3$, pa je

$$P = \frac{\frac{37}{12} + \frac{5}{6}}{2} \cdot 3 = \frac{\frac{47}{12}}{2} \cdot 3 = \frac{47}{24} \cdot 3 = \frac{47}{8} = 5\frac{7}{8}.$$

Šema bodovanja:

- zaključivanje da je četverougao $OBCD$ trapez: **1 bod**
- navođenje ispravne formule za površinu trapeza: **1 bod**
- zaključivanje da je jednačina prve prave $y = 3$ ili, ekvivalentno, da sve tačke na prvoj pravoj imaju y -koordinatu jednaku 3: **2 boda**
- ispravno određivanje koordinata tačke B : **3 boda** (ako učenik ispravno postavi sistem, a pogriješi u rješavanju sistema, dobija **1 bod**)
- ispravno određivanje koordinata tačke C : **3 boda** (ako učenik ispravno postavi sistem, a pogriješi u rješavanju sistema, dobija **1 bod**)
- ispravno određivanje koordinata tačke D : **3 boda** (ako učenik ispravno postavi sistem, tj. ispravno zaključi kako doći do koordinata tačke, a pogriješi u rješavanju, dobija **1 bod**)
- ispravno određivanje dužine osnovice trapeza $\overline{OD} = \frac{37}{12}$: **1 bod**
- ispravno određivanje dužine osnovice trapeza $\overline{BC} = \frac{5}{6}$: **2 boda**
- ispravno određivanje visine $h = 3$: **2 boda**
- izračunata površina trapeza: **2 boda**

Rješenje 2: Možemo spustiti normale iz tačaka B i C na x -osu, te podnožja tih normala označiti redom sa E i F . Površinu četverougla $OBCD$ onda možemo izračunati kao zbir površina pravouglavih trouglova OBE i FCD i površine pravougaonika $BCFE$. Da bismo odredili potrebne dužine stranica ovih geometrijskih likova, moramo odrediti koordinate tačaka B, C, D, E, F .



Uočimo da prva prava ima jednačinu $y = 3$. Tačka B je presjek prve prave, $y = 3$ i druge prave, $y = 2x$, te se dobije kao rješenje sistema

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = 2x \end{cases}$$

Rješenje ovog sistema je $y = 3$ i $x = \frac{3}{2}$. Dakle, tačka B ima koordinate $(\frac{3}{2}, 3)$.

Lako se zaključi da tačka E onda ima koordinate $(\frac{3}{2}, 0)$, te da su dužine stranica $\overline{BE} = 3$ i $\overline{OE} = \frac{3}{2}$. Sad možemo izračunati površinu pravouglog trougla OBE :

$$P_1 = \frac{\overline{OE} \cdot \overline{BE}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 3}{2} = \frac{9}{4}$$

Koordinate tačke C dobijamo rješavajući sistem

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = -4x + \frac{37}{3} \end{cases}$$

Rješenje ovog sistema je $y = 3$ i $x = \frac{7}{3}$, tj. tačka C ima koordinate $(\frac{7}{3}, 3)$. Sad možemo izračunati dužinu duži $\overline{BC} = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$, te računamo površinu pravougaonika $BCFE$ kao:

$$P_2 = \overline{BE} \cdot \overline{BC} = 3 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{2}.$$

Konačno, tačka D pripada x -osi, pa je njena y -koordinata $y = 0$. Vrijednost x -koordinate dobijamo uvrštavajući $y = 0$ u jednačinu treće prave, $y = -4x + \frac{37}{3}$, odakle dobijamo $x = \frac{37}{12}$. Dakle, koordinate tačke D su $(\frac{37}{12}, 0)$. Lako se zaključi da tačka F ima koordinate $(\frac{7}{3}, 0)$, jer je normalna projekcija tačke C te je $\overline{FD} = \frac{37}{12} - \frac{7}{3} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ i $\overline{CF} = 3$. Sad možemo izračunati površinu pravouglog trougla FCD :

$$P_3 = \frac{\overline{CF} \cdot \overline{FD}}{2} = \frac{3 \cdot \frac{3}{4}}{2} = \frac{9}{8}.$$

Konačno, površina četverougla $OBCD$ je onda jednaka:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{9}{4} + \frac{5}{2} + \frac{9}{8} = \frac{47}{8} = 5\frac{7}{8}.$$

Šema bodovanja:

- zaključak da se tražena površina četverougla $OBCD$ može izračunati kao zbir površina pravougljih trouglova OBE i FCD i površine pravougaonika $BCFE$: **1 bod**
- zaključivanje da je jednačina prve prave $y = 3$ ili, ekvivalentno, da sve tačke na prvoj pravoj imaju y -koordinatu jednaku 3: **2 boda**
- ispravno određivanje koordinata tačke B : **3 boda** (ako učenik ispravno postavi sistem, a pogriješi u rješavanju sistema, dobija **1 bod**)
- ispravno određivanje koordinata tačke C : **3 boda** (ako učenik ispravno postavi sistem, a pogriješi u rješavanju sistema, dobija **1 bod**)
- ispravno određivanje koordinata tačke D : **3 boda** (ako učenik ispravno zaključi kako doći do koordinata tačke, a pogriješi u rješavanju, dobija **1 bod**)
- određivanje potrebnih elemenata i ispravno računanje površine trougla OBE : **2 boda**
- određivanje potrebnih elemenata i ispravno računanje površine pravougaonika $BCFE$: **2 boda**
- određivanje potrebnih elemenata i ispravno računanje površine trougla FCD : **2 boda**
- izračunata površina četverougla $OBCD$: **2 boda**

Zadatak 2. Ako se između cifara dvocifrenog prirodnog broja ubaci 0, dobija se (trocifreni) broj koji je 9 puta veći od polaznog broja. Odrediti o kojim brojevima je riječ.

Rješenje 1: Neka je početni, dvocifreni broj $\overline{ab} = 10a + b$, $a \in \{1,2,3, \dots, 9\}$ i $b \in \{0,1,2,3, \dots, 9\}$. Trocifreni broj koji se dobije ubacivanjem nule je $\overline{a0b} = 100a + 0 \cdot 10 + b = 100a + b$. Iz uslova zadatka slijedi:

$$\overline{a0b} = 9 \cdot \overline{ab}$$

$$100a + b = 9 \cdot (10a + b) \Leftrightarrow 100a + b = 90a + 9b \Leftrightarrow 10a = 8b \Leftrightarrow 5a = 4b.$$

Uočimo da je lijeva strana dobijene jednakosti djeljiva sa 5, pa mora i desna strana, $4b$, biti djeljiva sa 5. Pošto $5 \nmid 4$, to mora biti $5 \mid b$. Pošto $b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, moguće je samo da je $b = 0$ i $b = 5$.

Ako je $b = 0$, onda iz jednakosti $5a = 4b$ slijedi da je i $a = 0$, što je nemoguće. Dakle, $b = 0$ nije rješenje.

Ako je $b = 5$, onda jednakost $5a = 4b$ postaje $5a = 20$, tj. $a = 4$. Slijedi da je početni, dvocifreni broj $\overline{ab} = 45$, a novodobijeni trocifreni $\overline{a0b} = 405$. Doista je $405 = 9 \cdot 45$, pa je ovo rješenje zadatka. Pošto za b nemamo više opcija, ovo je i jedino rješenje zadatka.

Šema bodovanja:

- ako učenik zapiše početni dvocifreni broj kao $10a + b$: **1 bod**
- uslovi $a \in \{1,2,3, \dots, 9\}$ i $b \in \{0,1,2,3, \dots, 9\}$: **1 bod**
- ako učenik zapiše trocifreni broj kao $100a + 0 + b$, tj. $100a + b$: **2 boda**
- ako učenik zapiše uslov zadatka kao $\overline{a0b} = 9 \cdot \overline{ab}$ ili kao $100a + b = 9(10a + b)$: **2 boda**
- pojednostavljen uslov kao $5a = 4b$: **2 boda**
- ako učenik uoči da zbog djeljivosti lijeve strane jednakosti $5a = 4b$ sa 5, mora i $4b$ biti djeljivo sa 5: **3 boda**
- zaključak da $5 \mid b$: **2 boda**
- zaključak da mora biti $b = 0$ ili $b = 5$: **2 boda**
- zaključak/račun da $b = 0$ ne daje rješenje: **2 boda**
- dobijeno rješenje $a = 4, b = 5$, tj. traženi brojevi su 45 i 405: **3 boda**

Rješenje 2: Neka je početni, dvocifreni broj $\overline{ab} = 10a + b$, $a \in \{1,2,3, \dots, 9\}$ i $b \in \{0,1,2,3, \dots, 9\}$. Trocifreni broj koji se dobije ubacivanjem nule je $\overline{a0b} = 100a + 0 \cdot 10 + b = 100a + b$. Iz uslova zadatka slijedi $\overline{a0b} = 9 \cdot \overline{ab}$, tj. $100a + b = 9 \cdot (10a + b)$. Odavde se dobije $5a = 4b$.

Možemo uočiti da je desna strana jednakosti $5a = 4b$ djeljiva sa 4, pa je i lijeva strana, $5a$, djeljiva sa 4. Pošto $4 \nmid 5$, onda mora vrijediti $4 \mid a$. Iz $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ slijedi da su jedine opcije $a = 4$ i $a = 8$.

Ako je $a = 4$, onda jednakost $5a = 4b$ postaje $20 = 4b$, tj. $b = 5$. Dakle, $\overline{ab} = 45$ i $\overline{a0b} = 405 = 9 \cdot 45$.

Ako je $a = 8$, jednakost $5a = 4b$ postaje $40 = 4b$, tj. $b = 10$, što je nemoguće, jer je b cifra i pripada skupu $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Šema bodovanja:

- ako učenik zapiše početni dvocifreni broj kao $10a + b$: **1 bod**
- uslovi $a \in \{1,2,3, \dots, 9\}$ i $b \in \{0,1,2,3, \dots, 9\}$: **1 bod**
- ako učenik zapiše trocifreni broj kao $100a + 0 + b$, tj. $100a + b$: **2 boda**
- ako učenik zapiše uslov zadatka kao $\overline{a0b} = 9 \cdot \overline{ab}$ ili kao $100a + b = 9(10a + b)$: **2 boda**
- pojednostavljen uslov kao $5a = 4b$: **2 boda**
- ako učenik uoči da zbog djeljivosti desne strane jednakosti $5a = 4b$ sa 4, mora i $5a$ biti djeljivo sa 4: **3 boda**
- zaključak da $4|a$: **2 boda**
- zaključak da mora biti $a = 4$ ili $a = 8$: **2 boda**
- zaključak/račun da $a = 8$ ne daje rješenje: **2 boda**
- dobijeno rješenje $a = 4, b = 5$, tj. traženi brojevi su 45 i 405: **3 boda**

Rješenje 3: Neka je početni, dvocifreni broj $\overline{ab} = 10a + b$, $a \in \{1,2,3, \dots, 9\}$ i $b \in \{0,1,2,3, \dots, 9\}$. Trocifreni broj koji se dobije ubacivanjem nule je $\overline{a0b} = 100a + 0 \cdot 10 + b = 100a + b$. Iz uslova zadatka slijedi $\overline{a0b} = 9 \cdot \overline{ab}$, tj. $100a + b = 9 \cdot (10a + b)$. Odavde se dobije $5a = 4b$.

Pošto za cifru a imamo 9 mogućih opcija ($\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$), možemo provjeriti jednu po jednu:

- Ako je $a = 1$, jednakost $5a = 4b$ postaje $5 = 4b$, tj. $b = \frac{5}{4}$, što ne može biti cifra jedinica. Ovo nije rješenje.
- Ako je $a = 2$, jednakost $5a = 4b$ postaje $10 = 4b$, tj. $b = \frac{5}{2}$, što ne može biti cifra jedinica. Ovo također nije rješenje.
- Ako je $a = 3$, jednakost $5a = 4b$ postaje $15 = 4b$, tj. $b = \frac{15}{4}$, što opet ne može biti cifra jedinica. Ovo nije rješenje.
- Ako je $a = 4$, jednakost $5a = 4b$ postaje $20 = 4b$, tj. $b = 5$, što daje rješenje $\overline{ab} = 45$ i $\overline{a0b} = 405 = 9 \cdot 45$.
- Ako je $a = 5$, jednakost $5a = 4b$ postaje $25 = 4b$, tj. $b = \frac{25}{4}$, što ne može biti cifra jedinica. Ovo nije rješenje.
- Ako je $a = 6$, jednakost $5a = 4b$ postaje $30 = 4b$, tj. $b = \frac{15}{2}$, što opet ne može biti cifra jedinica. Ovo nije rješenje.
- Ako je $a = 7$, jednakost $5a = 4b$ postaje $35 = 4b$, tj. $b = \frac{35}{4}$, što ne može biti cifra jedinica. Ovo također nije rješenje.
- Ako je $a = 8$, jednakost $5a = 4b$ postaje $40 = 4b$, tj. $b = 10$, što ne može biti cifra jedinica. Ovo nije rješenje.

- Konačno, ako je $a = 9$, jednakost $5a = 4b$ postaje $45 = 4b$, tj. $b = \frac{45}{4}$, što ne može biti cifra jedinica. Ovo nije rješenje.

Šema bodovanja:

- ako učenik zapiše početni dvocifreni broj kao $10a + b$: **1 bod**
- uslovi $a \in \{1,2,3, \dots, 9\}$ i $b \in \{0,1,2,3, \dots, 9\}$: **1 bod**
- ako učenik zapiše trocifreni broj kao $100a + 0 + b$, tj. $100a + b$: **2 boda**
- ako učenik zapiše uslov zadatka kao $\overline{a0b} = 9 \cdot \overline{ab}$ ili kao $100a + b = 9(10a + b)$: **2 boda**
- pojednostavljen uslov kao $5a = 4b$: **2 boda**
- ideja da provjeri svaku cifru $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$: **1 bod**
- dobijeno rješenje $a = 4, b = 5$, tj. traženi brojevi su 45 i 405: **3 boda**
- račun/zaključak za svaku cifru $a \in \{1,2,3,5,6,7,8,9\}$, da ne vodi rješenju: **8 bodova (po 1 bod za svaku)**

Rješenje 4: Očito traženi trocifreni broj mora biti djeljiv sa 9. Njegova srednja cifra je 0, pa zbir cifre jedinica i stotica mora biti djeljiv sa 9. Jedine opcije su da je taj zbir 9 ili 18.

Tada imamo sljedeće moguće brojeve: 108, 801, 207, 702, 306, 603, 405, 504, 900 ili 909.

Broj 405 zadovoljava tražene uslove zadatka, pa je 45 polazni dvocifreni broj.

Provjerom dobijemo da nijedan od drugih mogućih brojeva - 108, 801, 207, 702, 306, 603, 504, 900 i 909 ne vodi rješenju.

Šema bodovanja:

- ako učenik uoči da traženi trocifreni broj mora biti djeljiv sa 9: **3 boda**
- zaključak da je zbir cifre jedinica i cifre stotica traženog trocifrenog broja djeljiv sa 9: **2 boda**
- zaključak da zbir cifre jedinica i cifre stotica mora biti 9 ili 18: **3 boda**
- navođenje svih mogućih opcija (108, 801, 207, 702, 306, 603, 405, 504, 900, 909): **4 boda (oduzeti 1 bod ako učenik izostavi 1, 2 ili 3 moguća broja; oduzeti 2 boda ako učenik izostavi 4, 5, 6 ili 7 mogućih brojeva; ako učenik navede samo 1 ili 2 moguća broja, dobija 1 bod)**
- zaključak da su 405 i 45 traženi brojevi: **3 boda**
- provjera da nijedan od ostalih trocifrenih brojeva (108, 801, 207, 702, 306, 603, 504, 900 i 909) ne vodi rješenju: **5 bodova** (mogući su i parcijalni bodovi, i to: ako učenik ispravno provjeri samo 1 ili 2 od ovih brojeva, dobija **1 bod**; ako ispravno provjeri 3 ili 4 ova broja, dobija **2 boda**; ako ispravno provjeri 5 ili 6 brojeva, dobija **3 boda**; ako ispravno provjeri 7 ili 8 brojeva, dobija **4 boda**; ako ispravno provjeri svih 9 brojeve, dobija svih 5 bodova)

Zadatak 3. Dokazati da između proizvoljna tri cijela broja uvijek možemo odabrati dva, nazovimo ih a i b , tako da je izraz $a^4b^2 - a^2b^4$ djeljiv sa 20.

Rješenje: Izraz $a^4b^2 - a^2b^4$ možemo napisati u obliku

$$a^4b^2 - a^2b^4 = a^2b^2(a^2 - b^2) = a^2b^2(a - b)(a + b),$$

Primijetimo da ako je bar jedan od brojeva a ili b paran, tada je gornji izraz djeljiv sa 4 (jer je u tom slučaju bar jedan od brojeva a^2 i b^2 djeljiv sa 4). S druge strane, ako su oba broja neparna, tada su brojevi $a - b$ i $a + b$ parni, pa je $(a - b)(a + b)$ djeljiv sa 4. Dakle, nezavisno kakve brojeve a i b odaberemo, prethodni izraz je djeljiv sa 4.

Ostaje da dokažemo da između bilo koja tri cijela broja možemo naći dva, a i b , takva da je naš izraz djeljiv sa 5 (jer je broj djeljiv sa 20 ako i samo ako je djeljiv sa 4 i 5).

Ako je jedan od tri data broja djeljiv sa 5, onda, ne umanjujući općenitost, uzmemo da je a jednako tom broju. Međutim, tada je očigledno broj $a^2b^2(a - b)(a + b)$ djeljiv sa 5, pa tvrdnja vrijedi.

Ako nijedan od tri data broja nije djeljiv sa 5, posmatrajmo skupove $\{1,4\}$ i $\{2,3\}$ ostataka pri dijeljenju sa brojem 5. Prema Dirichletovom principu, ostaci pri djeljenju sa 5 dva od data tri broja pripadaju istom skupu ostataka. Tada ćemo za a i b uzeti upravo ta dva broja iz istog skupa. Naime, ako brojevi a i b daju isti ostatak pri djeljenju sa 5, onda je broj $a - b$ djeljiv sa 5, pa je i izraz $a^4b^2 - a^2b^4$ djeljiv sa 5. Ako brojevi a i b ne daju isti ostatak pri djeljenju sa 5, onda jedan od njih daje ostatak 1, a drugi ostatak 4, ili jedan od njih daje ostatak 2, a drugi ostatak 3. U bilo kojem od ta dva slučaja, $a + b$ daje ostatak 0 pri djeljenju sa 5, tj. $a + b$ je djeljiv sa 5, pa je i izraz $a^4b^2 - a^2b^4$ djeljiv sa 5, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- faktorizacija izraza $a^4b^2 - a^2b^4$ na oblik $a^2b^2(a - b)(a + b)$: **2 boda**
- dokaz da je izraz $a^4b^2 - a^2b^4$ uvijek djeljiv sa 4: **5 bodova**
- razmatranje i dokaz u slučaju kada je jedan od tri broja djeljiv sa 5: **2 boda**
- dokaz u slučaju kada niti jedan od tri broja nije djeljiv sa 5: **11 bodova**

Napomena: Slučaj kada niti jedan od brojeva nije djeljiv sa 5 može se uraditi i na sljedeća dva načina:

- može se zaključiti da tvrdnja vrijedi ako postoje dva broja koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa 5, pa onda ispitati četiri preostala slučaja za ostatke ($\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$ i $\{2,3,4\}$).
- kvadrat prirodnog broja koji nije djeljiv sa 5 daje ostatak 1 ili 4 pri dijeljenju sa 5, pa onda postoje dva broja čiji kvadrati daju isti ostatak pri dijeljenju sa 5 (za ovakvo rješenje nije neophodna faktorizacija $a^2b^2(a - b)(a + b)$, već je dovoljna samo $a^2b^2(a^2 - b^2)$).

Zadatak 4. Ako za nenulte realne brojeve a, b, c, d istovremeno vrijedi da je $a + b + c + d = 0$ i $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$, dokazati da onda vrijedi i

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Rješenje 1: Iz uslova $a + b + c + d = 0$ slijedi da je $a + b = -(c + d)$, odakle kubiranjem dobijemo

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3 - 3c^2d - 3cd^2 - d^3.$$

Korištenjem uslova $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$, posljednju jednakost možemo pisati u obliku

$$3a^2b + 3ab^2 = -3c^2d - 3cd^2, \text{ odnosno } 3ab(a + b) = -3cd(c + d).$$

Kako je $a + b = -(c + d)$, imamo

$$3ab(a + b) = 3cd(a + b).$$

Posljednja jednakost se može napisati u obliku

$$3(a + b)(ab - cd) = 0.$$

Sada su moguća dva slučaja: $a + b = 0$ ili $ab - cd = 0$.

1) U slučaju kada je $a + b = 0$, onda je i $c + d = 0$, pa vrijedi da je $b = -a$ i $d = -c$, pa imamo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{c} = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

2) U slučaju kada je $ab - cd = 0$, onda je $ab = cd$, što zajedno sa $a + b = -(c + d)$ daje

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = \frac{a + b}{ab} + \frac{c + d}{cd} = -\frac{c + d}{cd} + \frac{c + d}{cd} = 0,$$

što je i trebalo dokazati.

Dakle, vrijedi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$.

Šema bodovanja:

- dolazak do jednakosti $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3 - 3c^2d - 3cd^2 - d^3$: **3 boda**
- svođenje na jednakost $3a^2b + 3ab^2 = -3c^2d - 3cd^2$: **3 boda**
- svođenje na $3(a + b)(ab - cd) = 0$: **6 bodova**
- zaključak da su moguća dva slučaja: $a + b = 0$ ili $ab - cd = 0$: **1 bod**
- rješavanje slučaja 1): **3 boda**, a rješavanje slučaja 2): **4 boda**

Napomena: Ako učenik krene „od kraja“, moguće je da jednakost $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$ koju treba dokazati svede na to da treba dokazati da vrijedi $(a + b)(ab - cd) = 0$. Za taj dio dobija **8 bodova**.

Rješenje 2: Iz uslova $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$ rastavljanjem zbira kubova dobijemo

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) + (c + d)(c^2 - cd + d^2) = 0.$$

Korištenjem uslova $a + b + c + d = 0$, odakle je $c + d = -(a + b)$, posljednju jednakost možemo pisati u obliku

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a + b)(c^2 - cd + d^2) = 0,$$

odakle je

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2 - c^2 + cd - d^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a + b)((a + b)^2 - 3ab - (c + d)^2 + 3cd) = 0.$$

Kako je $a + b = -(c + d)$, to je $(a + b)^2 = (c + d)^2$, pa se prethodna jednakost svodi na

$$-3(a + b)(ab - cd) = 0.$$

Sada možemo završiti zadatak kao u prvom rješenju. Međutim, ovdje ćemo pokazati da je zaista jednakost $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$ ekvivalentna jednakosti $(a + b)(ab - cd) = 0$.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd} = 0 \Leftrightarrow$$

$$cd(a + b) + ab(c + d) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a + b)(ab - cd) = 0.$$

Šema bodovanja:

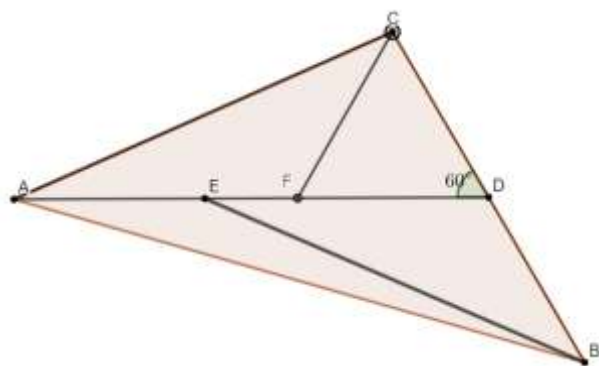
- dolazak do jednakosti $(a + b)(a^2 - ab + b^2) + (c + d)(c^2 - cd + d^2) = 0$: **3 boda**
- svođenje na jednakost $(a + b)(a^2 - ab + b^2 - c^2 + cd - d^2) = 0$: **3 boda**
- svođenje na $-3(a + b)(ab - cd) = 0$: **6 bodova**
- posljednjih **8 bodova** su isti kao u rješenju 1 (dobijaju se ili za dokaz da iz $(a + b)(ab - cd) = 0$ slijedi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$ ili za dokaz da su te dvije jednakosti ekvivalentne)

Zadatak 5. Na težišnoj duži $\overline{AD}$ trougla ABC uzeta je tačka E takva da je $\overline{AE} = \overline{BD}$. Ako je $\angle ADC = 60^\circ$, dokazati da je $\overline{AC} = \overline{BE}$.

Rješenje 1: Uočimo prvo da po uslovima zadatka vrijedi $\overline{AE} = \overline{BD} = \overline{CD}$ i $\angle EDB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

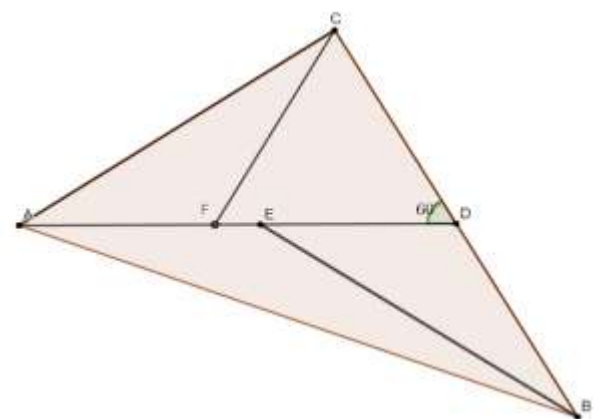
Neka je F tačka na težišnoj duži $\overline{AD}$ takva da je $\overline{CD} = \overline{FD}$. Mogu se dogoditi dva rasporeda tačaka na težišnoj duži $\overline{AD}$: $A - E - F - D$ ili $A - F - E - D$, pa ćemo razmotriti oba slučaja

U svakom od tih slučajeva trougao CDF je jednakokraki, sa jednakim uglovima $\angle DFC$ i $\angle FCD$, koji, zbog ugla $\angle CDF = 60^\circ$, iznose također po 60° . Dakle, trougao CDF je jednakostranični, te vrijedi $\overline{CD} = \overline{FD} = \overline{CF}$. Također, vrijedi $\angle CFA = 120^\circ$ (vanjski ugao trougla CDF).



Sada ćemo razmotriti prvi slučaj, tj. slučaj kada je raspored tačaka $A - E - F - D$.

Posmatrajmo trouglove CFA i DBE . Vrijedi: $\angle CFA = 120^\circ = \angle EDB$, $\overline{CF} = \overline{BD}$ i $\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF} = \overline{FD} + \overline{EF} = \overline{ED}$. Po SUS kriteriju, trouglovi CFA i DBE su podudarni i vrijedi $\overline{AC} = \overline{BE}$, što je i trebalo dokazati.



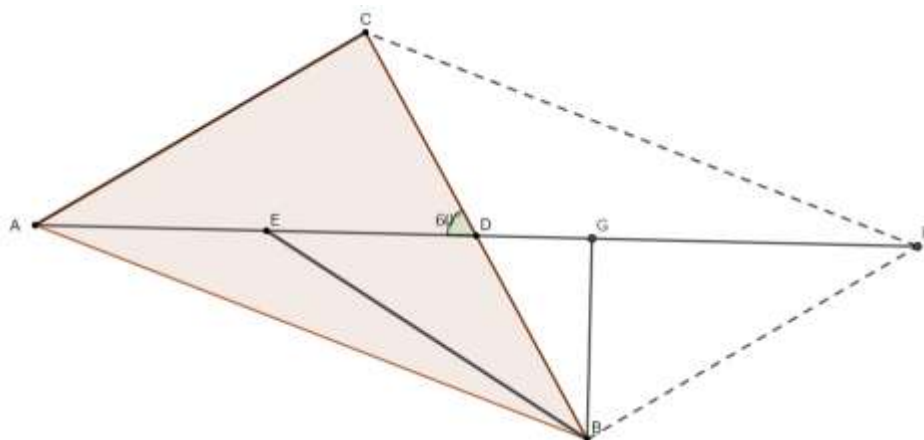
Sada ćemo razmotriti drugi slučaj, tj. slučaj kada je raspored tačaka $A - F - E - D$.

Posmatrajmo trouglove CFA i DBE . Vrijedi: $\angle CFA = 120^\circ = \angle EDB$, $\overline{CF} = \overline{BD}$ i $\overline{AF} = \overline{AE} - \overline{EF} = \overline{FD} - \overline{EF} = \overline{ED}$. Po SUS kriteriju, trouglovi CFA i DBE su podudarni i vrijedi $\overline{AC} = \overline{BE}$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- zaključak da je $\overline{AE} = \overline{BD} = \overline{CD}$ i $\angle EDB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$: **2 boda**
- formiranje jednakokrakog trougla CDF : **3 boda**
- zaključak da je trougao CDF jednakostranični, tj. $\overline{CD} = \overline{FD} = \overline{CF}$: **5 bodova**
- zaključak da je $\angle CFA = 120^\circ$: **1 bod**
- zaključak da su trouglovi CFA i DBE podudarni pri poretku $A - E - F - D$: **4 boda**
- zaključak da su trouglovi CFA i DBE podudarni pri poretku $A - F - E - D$: **4 boda**
- zaključak da iz podudarnosti trouglova CFA i DBE slijedi tvrdnja zadatka, $\overline{AC} = \overline{BE}$: **1 bod**

Rješenje 2: Uočimo da po uslovima zadatka vrijedi $\overline{AE} = \overline{BD} = \overline{CD}$.



Produžimo težišnu duž $\overline{AD}$ preko tačke D do tačke F , tako da vrijedi $\overline{AD} = \overline{DF}$. Uočimo da smo dobili četverougao $ABFC$ kod kojeg se dijagonale AF i BC polove ($\overline{AD} = \overline{DF}$ i $\overline{BD} = \overline{CD}$), pa je $ABFC$ paralelogram. Zato je $\overline{AC} = \overline{BF}$.

Posmatrajmo trougao EBF i njegovu visinu iz vrha B , označimo je sa $\overline{BG}$. Dobijamo pravougli trougao BGD , kod kojeg je jedan oštri ugao $\angle GDB = 60^\circ$ (unakrsni ugao ugla $\angle ADC$), pa je preostali oštri ugao trougla BGD jednak 30° . Kod pravouglih trouglova sa oštrim uglovima 30° i 60° je dužina najkraće katete (one naspram ugla od 30°) duplo manja od dužine hipotenuze, pa je zato $\overline{DG} = \frac{\overline{BD}}{2}$.

$$\text{Vrijedi: } \overline{EG} = \overline{ED} + \overline{DG} = \overline{AD} - \overline{AE} + \frac{\overline{BD}}{2} = \overline{DF} - \overline{BD} + \frac{\overline{BD}}{2} = \overline{DF} - \frac{\overline{BD}}{2} = \overline{DF} - \overline{DG} = \overline{GF}.$$

Dakle, visina $\overline{BG}$ trougla EBF je ujedno i njegova težišna duž iz vrha B , pa je on sigurno jednakokraki i vrijedi $\overline{EB} = \overline{BF}$. Pošto je $\overline{AC} = \overline{BF}$, slijedi da je $\overline{EB} = \overline{AC}$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- zaključak da je $\overline{AE} = \overline{BD} = \overline{CD}$: **1 bod**
- formiranje paralelograma $ABFC$: **4 boda** (samo formiranje četverougla $ABFC$ na opisani način, bez zaključivanja da je paralelogram tj. da vrijedi $\overline{AC} = \overline{BF}$ vrijedi maksimalno 2 boda)
- spuštena visina $\overline{BG}$ trougla EBF : **1 bod**
- zaključak da pravougli trougao BGD ima oštre uglove 30° i 60° : **2 boda**
- zaključak da je $\overline{DG} = \frac{\overline{BD}}{2}$: **4 boda**
- zaključak da je $\overline{EG} = \overline{GF}$: **4 boda**
- zaključak da je trougao EBF jednakokraki, tj. da je $\overline{EB} = \overline{BF}$: **3 boda**
- zaključak da je $\overline{EB} = \overline{AC}$: **1 bod**