Kanton Sarajevo

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

22. marta/ožujka 2023.

VI razred

Zadatak 1. Odrediti skup X takav da vrijede sljedeći uslovi:

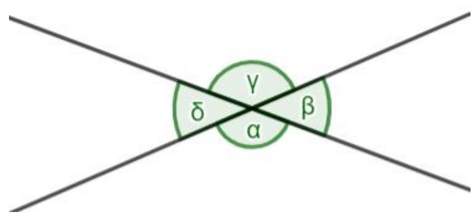
- $X \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
- $X \cap \{1,3,4,6,7,9,10\} = \{1,4,10\}$
- Zbir elemenata skupa X je djeljiv sa 5
- Skup X sadrži tačno 5 elemenata

Obavezno obrazložiti kako ste došli do skupa X.

Zadatak 2. Odrediti sve šestocifrene brojeve oblika $\overline{1baa8b}$ koji su djeljivi sa 36.

Napomena: Cifre a i b ne moraju biti različite.

Zadatak 3. Dvije prave se sijeku te obrazuju četiri ugla: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (kao na slici). Ako je ugao α za 47° veći od zbira uglova β i δ, odrediti vrijednost ugla γ. Odgovor obrazložiti!



Zadatak 4. **a)** Poredati razlomke $\frac{8}{23}, \frac{32}{91}, \frac{10}{29}$ od najmanjeg do najvećeg. Odgovor obrazložiti!

b) Odrediti sve razlomke veće od $\frac{1}{8}$ i manje od $\frac{2}{9}$ čiji je zbir brojnika i nazivnika jednak 99.

Zadatak 5. Emil kod sebe ima 12 štapova: dva štapa dužine 2 cm, tri štapa dužine 3 cm, četiri štapa dužine 4 cm, jedan štap dužine 5 cm, jedan štap dužine 6 cm, te jedan štap dužine 12 cm.

a) Može li Emil koristeći svih 12 štapova napraviti pravougaonik kojem je jedna stranica tri puta duža od druge? Odgovor obrazložiti!

b) Emil je štap dužine y ostavio sa strane, a od preostalih 11 štapova je napravio pravougaonik kojem je jedna stranica tri puta duža od druge. Odrediti sve moguće vrijednosti za y. Odgovor obrazložiti! Za svaku od mogućih vrijednosti za y nacrtati jednu sliku koja pokazuje kako Emil može napraviti traženi pravougaonik za to y.

c) Može li Emil koristeći svih 12 štapova napraviti pravouganik čija je površina jednaka $126\ \mathrm{cm}^2$? Odgovor obrazložiti!

d) Emil je sada štap dužine z ostavio sa strane, a od preostalih 11 štapova je napravio pravougaonik čija je površina jednaka $126\ \mathrm{cm}^2$. Odrediti sve moguće vrijednosti za z. Odgovor obrazložiti! Za svaku od mogućih vrijednosti za z nacrtati jednu sliku koja pokazuje kako Emil može napraviti pravougaonik površine $126\ \mathrm{cm}^2$ za to z.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
22. marta/ožujka 2023.

VII razred

Zadatak 1. Za jedan posao u trajanju od 10 dana poslodavac je angažirao radnika i obećao mu po završetku posla dati naknadu u iznosu od 600 KM i jedan mobitel. Poslije 8 dana radnik se razbolio pa mu je poslodavac za do tada obavljeni posao isplatio 400 KM i mobitel. Koliko košta mobitel? Odgovor detaljno obrazložiti!

Zadatak 2. Data je jednačina

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{70001}{70002}.$$

a) Riješiti datu jednačinu.
b) Odrediti cifru broja x koja se nalazi na 2023. mjestu nakon decimalnog zareza.

Zadatak 3. Alen želi podijeliti 17 identičnih bombona Emilu, Nori, Hani i Denisu, pri čemu moraju biti zadovoljeni svi sljedeći uslovi:

- Svako dijete mora dobiti određeni broj bombona.
- Nora će dobiti više bombona nego Emil.
- Hana će dobiti više bombona nego što su dobili Emil i Nora zajedno.
- Denis će dobiti više bombona od Hane.

Na koliko načina Alen može podijeliti sve bombone koje ima? Odgovor detaljno obrazložiti!

Zadatak 4. Odrediti sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) koji zadovoljavaju sljedeće uslove:

- $a+b+c=2023$,
- Broj b ima sve iste cifre,
- $a<b<c$,
- $NZD(a, c)=130$.

Odgovor detaljno obrazložiti!

Zadatak 5. Neka je dat jednakokraki trougao ΔABC kod kojeg je $AB=CB$. Na polupravim CA, AB, BC su date redom tačke D, E, F tako da vrijedi $AD=AC, BE=BA, CF=CB$.

a) Dokazati da je $BD=AF$.
b) Izračunati $\measuredangle ADB+\measuredangle BEC+\measuredangle CFA$.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

22. marta/ožujka 2023.

VIII razred

Zadatak 1. U unutrašnjosti pravougaonika $ABCD$ nalazi se tačka M takva da je $AM = 3$cm, $BM = 4$cm i $CM = 5$cm. Kolika je udaljenost tačke M od vrha D?

Zadatak 2. Na tabli je napisano 100 različitih proizvoljnih prirodnih brojeva. Emin je svaki napisani broj zaokružio jednom od tri boje: plavom, žutom ili bijelom. Dokazati da postoji barem 12 brojeva zaokruženih istom bojom, koji pri dijeljenju sa 3 daju isti ostatak.

Zadatak 3. Ako je $x^2 + y^2 + xy = 32$ i $6x - 14y + xy = 90$, izračunati $5x + 2y$ (x, y su realni brojevi).

Zadatak 4. U trouglu ABC težišna duž BD je dva puta kraća od stranice AB. Ugao $\angle ABD$ iznosi $40°$. Odrediti veličinu ugla $\angle ABC$.

Zadatak 5. Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da je $a + b = ab - bc$ i $c + 1$ je kvadrat prostog broja. Dokazati da je barem jedan od brojeva ab ili $a + b$ potpun kvadrat.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

22. marta/ožujka 2023.

IX razred

Zadatak 1. U koordinatnoj ravni sa ishodištem u tački O data je prava p koja siječe x-osu u tački $A=(3,0)$, a y-osu u tački B (pri čemu je y koordinata tačke B negativna) tako da je površina trougla AOB jednaka 6. Odrediti obim i površinu četverougla $OABD$, pri čemu je tačka D presjek prave $y=\frac{2}{5}x-1$ i simetrale duži OB.

Zadatak 2. *Petorka* brojeva sastoji se od 5 međusobno različitih prirodnih brojeva. Neki prirodan broj se može nalaziti u više petorki. Za svake dvije petorke vrijedi da postoje tačno 4 broja koja se nalaze u obe te petorke (npr. $\{1,6,7,10,15\},\{1,6,7,10,21\},\{6,7,10,15,21\}$ su tri validne petorke).

a) Dokazati da je moguće napraviti 2023 petorke.
b) Ako na raspolaganju imamo samo brojeve 1,2,3,4,5,6 koliko najviše petorki je moguće napraviti (pri čemu se svaki od navedenih brojeva mora nalaziti bar u jednoj petorci)?
c) Ako na raspolaganju imamo samo brojeve 1,2,3,4,5,6,7 koliko najviše petorki je moguće napraviti (pri čemu se svaki od navedenih brojeva mora nalaziti bar u jednoj petorci)?

Zadatak 3. Riješiti sistem jednačina u skupu realnih brojeva:

$$a+b+c=5\frac{1}{4}$$

$$a^2+b^2+c^2=11\frac{13}{16}$$

$$a^2=bc.$$

Zadatak 4. Naći sve uređene parove prirodnih brojeva (x,y) za koje vrijedi da je $2xy$ potpun kvadrat nekog prirodnog broja, a x^2+y^2 je prost broj.

Zadatak 5. Dat je pravougaonik $ABCD$. Tačka E leži sa one strane prave BC na kojoj nisu tačke A i D, tako da vrijedi $BE=BA$ i $CE=CB$. Poznato je da je površina pravougaonika $ABCD$ četiri puta veća od površine trougla BCE. Ako je dužina stranice $AD=10$, odrediti dužinu duži AE.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

22. marta/ožujka 2023.

Rješenja zadataka i šema bodovanja za VI razred

Zadatak 1. Odrediti skup X takav da vrijede sljedeći uslovi:

- $X \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
- $X \cap \{1,3,4,6,7,9,10\} = \{1,4,10\}$
- Zbir elemenata skupa X je djeljiv sa 5
- Skup X sadrži tačno 5 elemenata

Obavezno obrazložiti kako ste došli do skupa X.

Rješenje: Iz prvog uslova imamo da elementi skupa X mogu biti samo brojevi $1,2,\dots,10$. Iz drugog uslova zaključujemo da elementi $1,4,10$ pripadaju skupu X, dok elementi $3,6,7,9$ ne pripadaju skupu X.

Dakle, jedino još treba ispitati da li elementi $2,5,8$ pripadaju skupu X. Kako već imamo tri elementa u skupu X, a on sadrži pet elemenata, to će tačno dva od brojeva $2,5,8$ pripadaju skupu X.

Zbir tri elementa u skupu X je $1+4+10=15$, što je djeljivo sa 5, tako da i zbir dva preostala elementa mora biti djeljiv sa 5. Primijetimo da $2+5=7$ nije djeljivo sa 5, te ni $5+8=13$ nije djeljivo sa 5, dok $2+8=10$ jeste djeljivo sa 5.
Dakle, zaključujemo da brojevi 2 i 8 moraju pripadati skupu X, pa je $X=\{1,2,4,8,10\}$.

Šema bodovanja:

- zaključak da elementi $1,4,10$ pripadaju skupu X: **4 boda**
- zaklučak da elementi $3,6,7,9$ ne pripadaju skupu X: **5 bodova**
- zaključak da tačno dva od elemenata $2,5,8$ pripadaju skupu X: **4 boda**
- zaključak da je jedina mogućnost da brojevi 2 i 8 pripadaju skupu X: **6 bodova**
- zapis konačnog skupa X: **1 bod**

Zadatak 2. Odrediti sve šestocifrene brojeve oblika $\overline{1baa8b}$ koji su djeljivi sa 36.

Rješenje: Da bi broj bio djeljiv sa 36, potrebno je da bude djeljiv sa 4 i 9.

S obzirom da broj $\overline{1baa8b}$ mora biti djeljiv sa 4, to njegov dvocifreni završetak mora biti djeljiv sa 4. Kako su $80,84,88$ jedini dvocifreni brojevi koji počinju sa 8, a djeljivi su sa 4, to zaključujemo $b \in \{0,4,8\}$.

Da bi broj bio djeljiv sa 9, zbir njegovih cifara mora biti djeljiv sa 9, pa u našem slučaju broj $1 + b + a + a + 8 + b = 9 + 2a + 2b$ mora biti djeljiv sa 9.

Prvi slučaj: Ako je $b = 0$, broj $9 + 2a + 2 \cdot 0 = 9 + 2a$ mora biti djeljiv sa 9. Kako je a cifra, to je $9 \leq 9 + 2a \leq 9 + 18 = 27$, pa $9 + 2a \in \{9,18,27\}$. Za $9 + 2a = 9$ dobijamo $a = 0$, za $9 + 2a = 18$ dobijamo $2a = 9$, što je nemoguće, a za $9 + 2a = 27$ dobijamo $a = 9$. Dakle, jedini brojevi u ovom slučaju su: 100080 i 109980.

Drugi slučaj: Ako je $b = 4$, broj $9 + 2a + 2 \cdot 4 = 17 + 2a$ mora biti djeljiv sa 9. Kako je a cifra, to je $17 \leq 17 + 2a \leq 17 + 18 = 35$, pa $17 + 2a \in \{18,27\}$. Za $17 + 2a = 18$ dobijamo $2a = 1$, što je nemoguće, a za $17 + 2a = 27$ dobijamo $a = 5$. Dakle, jedini broj u ovom slučaju je: 145584.

Treći slučaj: Ako je $b = 8$, broj $9 + 2a + 2 \cdot 8 = 25 + 2a$ mora biti djeljiv sa 9. Kako je a cifra, to je $25 \leq 25 + 2a \leq 25 + 18 = 43$, pa $25 + 2a \in \{27,36\}$. Za $25 + 2a = 27$ dobijamo $a = 1$, a za $25 + 2a = 36$ dobijamo $2a = 11$, što je nemoguće. Dakle, jedini broj u ovom slučaju je: 181188.

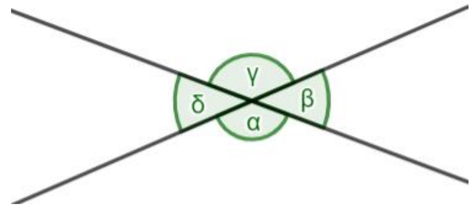
Dakle, brojevi koji zadovoljavaju uslove zadatka su $100080,109980,145584,181188$.

Šema bodovanja:

- zaključak da je potrebno da broj bude djeljiv sa 4 i 9: **2 boda**
- zaključak da dvocifreni završetak mora biti djeljiv sa 4: **2 boda**
- zaključak da $b \in \{0,4,8\}$: **3 boda**
- rješavanje slučaja $b = 0$: **5 bodova**, i to:
  - **1 bod** za zaključak da zbir cifara mora biti djeljiv sa 9
  - **1 bod** za računanje zbira cifara u ovom slučaju
  - **3 boda** za određivanje mogućih vrijednosti za a
- rješavanje slučaja $b = 4$: **4 boda**, i to:
  - **1 bod** za zaključak da zbir cifara mora biti djeljiv sa 9
  - **1 bod** za računanje zbira cifara u ovom slučaju
  - **2 boda** za određivanje mogućih vrijednosti za a
- rješavanje slučaja $b = 8$: **4 boda** (ista šema kao za slučaj $b = 4$)

Napomena: Ukoliko učenik ne zaključi da $b \in \{0,4,8\}$, ali ipak navede kriterij djeljivosti sa 9, dobija **2 boda**. Ako pri tome izračuna zbir cifara, dobija još **2 boda**. Konačno, ako zaključi da broj $a + b$ mora biti djeljiv sa 9, dobija još **3 boda**.

Zadatak 3. Dvije prave se sijeku te obrazuju četiri ugla: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (kao na slici). Ako je ugao α za $47°$ veći od zbira uglova β i δ, odrediti vrijednost ugla γ. Odgovor obrazložiti!



Rješenje: Kako su unakrsni uglovi jednaki, to je $\alpha = \gamma$ i $\beta = \delta$. Iz uslova zadatka je

$$\beta + \delta + 47° = \alpha,$$

odakle zbog $\beta = \delta$ dobijamo

$$2\beta + 47° = \alpha. \quad (*)$$

Međutim, kako su α i β uporedni uglovi, to su oni suplementni, pa vrijedi $\alpha + \beta = 180°$, tj. $\alpha = 180° - \beta$. Uvrštavanjem posljednje relacije u $(*)$ dobijamo

$$2\beta + 47° = 180° - \beta,$$

odakle nakon sređivanja dobijamo

$$3\beta = 180° - 47° = 133°.$$

Sada je $\beta = \frac{133°}{3} = 44°\,20'$, pa je $\gamma = \alpha = 180° - 44°\,20' = 135°\,40'$.

Šema bodovanja:

- zaključak da je bilo koji par unakrsnih uglova jednak: **2 boda**
- dobijanje relacije $\beta + \delta + 47° = \alpha$: **2 boda**
- dobijanje relacije $2\beta + 47° = \alpha$: **3 boda**
- zaključak da vrijedi $\alpha + \beta = 180°$: **2 boda**
- dobijanje relacije $2\beta + 47° = 180° - \beta$: **4 boda** (alternativno, učenik može uvrstiti $\beta = 180° - \alpha$ u $(*)$ te dobiti $2(180° - \alpha) + 47° = \alpha$)
- rješavanje jednačine i dobijanje vrijednosti $\gamma = 135°\,40'$: **7 bodova**

Zadatak 4. **a)** Poredati razlomke $\frac{8}{23}, \frac{32}{91}, \frac{10}{29}$ od najmanjeg do najvećeg. Odgovor obrazložiti!

b) Odrediti sve razlomke veće od $\frac{1}{8}$ i manje od $\frac{2}{9}$ čiji je zbir brojnika i nazivnika jednak 99.

Rješenje: **a)** Kako je $32 = 8 \cdot 4$, to ćemo razlomak $\frac{8}{23}$ proširiti sa 4. Imamo da je $\frac{8}{23} = \frac{8 \cdot 4}{23 \cdot 4} = \frac{32}{92}$. Razlomci $\frac{32}{92}$ i $\frac{32}{91}$ imaju isti brojnik, pa kako prvi razlomak ima veći nazivnik, to je $\frac{32}{92} < \frac{32}{91}$, tj. $\frac{8}{23} < \frac{32}{91}$.

Razlomke $\frac{8}{23}$ i $\frac{10}{29}$ ćemo svesti na isti brojnik. Kako je najmanji zajednički sadržalac brojeva 8 i 10 jednak 40, imamo $\frac{8}{23} = \frac{8 \cdot 5}{23 \cdot 5} = \frac{40}{115}$, kao i $\frac{10}{29} = \frac{10 \cdot 4}{29 \cdot 4} = \frac{40}{116}$. Kako razlomci $\frac{40}{115}$ i $\frac{40}{116}$ imaju isti brojnik, a prvi razlomak ima manji nazivnik, to je $\frac{40}{115} > \frac{40}{116}$, tj. $\frac{8}{23} > \frac{10}{29}$.

Dakle, vrijedi $\frac{10}{29} < \frac{8}{23} < \frac{32}{91}$.

b) Neka je naš razlomak jednak $\frac{a}{b}$. Proširujući razlomak $\frac{1}{8}$ sa 11, a razlomak $\frac{2}{9}$ sa 9, dobijamo $\frac{11}{88} < \frac{a}{b} < \frac{18}{81}$. Primijetimo da i razlomci $\frac{11}{88}$ i $\frac{18}{81}$ imaju zbir brojnika i nazivnika jednak 99 (kao i naš razlomak $\frac{a}{b}$). Traženi razlomak $\frac{a}{b}$ će biti veći od razlomka $\frac{11}{88}$ samo ako ima veći brojnik (samim tim će imati i manji nazivnik). Slično, razlomak $\frac{a}{b}$ će biti manji od razlomka $\frac{18}{81}$ samo ako ima manji brojnik (samim tim će imati veći nazivnik). Na taj način zaključujemo da su traženi razlomci $\frac{12}{87}, \frac{13}{86}, \frac{14}{85}, \frac{15}{84}, \frac{16}{83}$ i $\frac{17}{82}$.

Šema bodovanja:

- dio pod a) nosi **6 bodova**, i to:
  - ispravno upoređivanje razlomaka $\frac{8}{23}$ i $\frac{32}{91}$: **2 boda**
  - ispravno upoređivanje razlomaka $\frac{8}{23}$ i $\frac{10}{29}$: **3 boda**
  - ispravno redanje razlomaka: **1 bod**
- dio pod b) nosi **14 bodova**, i to:
  - zapisivanje razlomaka $\frac{1}{8}$ i $\frac{2}{9}$ kao $\frac{11}{88}$ i $\frac{18}{81}$: **6 bodova**
  - objašnjenje zašto su jedina rješenja $\frac{12}{87}, \frac{13}{86}, \frac{14}{85}, \frac{15}{84}, \frac{16}{83}$ i $\frac{17}{82}$: **8 bodova**

Napomena: U dijelu pod a), učenik naravno može uporediti razlomke na neki drugi način (na primjer, svođenjem na zajednički nazivnik). U dijelu pod b), učenik može na neki drugi način pronaći tražene razlomke, ali je važno da objasni zašto su to jedini razlomci koji zadovoljavaju tvrdnju zadatka.

Zadatak 5. Emil ima 12 štapova: dva štapa dužine 2 cm, tri štapa dužine 3 cm, četiri štapa dužine 4 cm, jedan štap dužine 5 cm, jedan štap dužine 6 cm, te jedan štap dužine 12 cm.

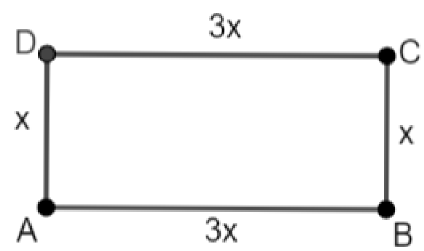
a) Može li Emil koristeći svih 12 štapova napraviti pravougaonik kojem je jedna stranica tri puta duža od druge? Odgovor obrazložiti!

b) Emil je štap dužine y ostavio sa strane, a od preostalih 11 štapova je napravio pravougaonik kojem je jedna stranica tri puta duža od druge. Odrediti sve moguće vrijednosti za y. Odgovor obrazložiti! Za svaku od mogućih vrijednosti za y nacrtati jednu sliku koja pokazuje kako Emil može napraviti traženi pravougaonik za to y.

c) Može li Emil koristeći svih 12 štapova napraviti pravouganik čija je površina jednaka $126\ \mathrm{cm}^2$? Odgovor obrazložiti!

d) Emil je sada štap dužine z ostavio sa strane, a od preostalih 11 štapova je napravio pravougaonik čija je površina jednaka $126\ \mathrm{cm}^2$. Odrediti sve moguće vrijednosti za z. Odgovor obrazložiti! Za svaku od mogućih vrijednosti za z nacrtati jednu sliku koja pokazuje kako Emil može napraviti pravougaonik površine $126\ \mathrm{cm}^2$ za to z.

Rješenje: **a)** Neka jedna stranica (na primjer AD) ima dužinu x, a stranica AB dužinu $3x$. Tada je i $BC = x, CD = 3x$, pa je obim pravougaonika jednak $3x + x + 3x + x = 8x$.
S druge strane, obim pravougaonika je jednak zbiru dužina svih štapova, što je jednako

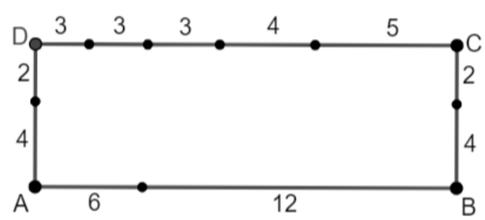


$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 12 = 52.$$

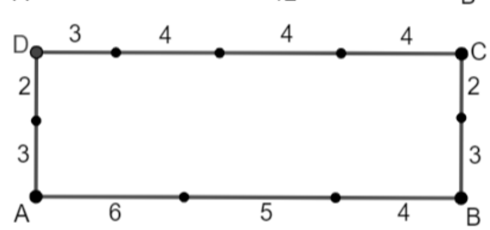
Međutim, kako broj 52 nije djeljiv sa 8, to jednačina $8x = 52$ nema rješenje u skupu prirodnih brojeva, te Emil ne može napraviti pravougaonik koristeći svih 12 štapova.

b) Kako obim traženog pravougaonika mora biti djeljiv sa 8, to broj $52 - y$ mora biti djeljiv sa 8, pa je $y = 4$ ili $y = 12$.

Za $y = 4$, dobijamo $8x = 52 - 4 = 48$, pa je $x = 6$, tj. $AD = 6\ cm$ i $AB = 3 \cdot 6 = 18\ cm$. Traženi pravougaonik možemo napraviti kao na slici desno.



Za $y = 12$, dobijamo $8x = 52 - 12 = 40$, pa je $x = 5$, tj. $AD = 5\ cm$ i $AB = 3 \cdot 5 = 15\ cm$. Traženi pravougaonik možemo napraviti kao na slici desno.



c) Neka je $AB = a$ i $AD = b$. Tada je površina pravougaonika jednaka $a \cdot b$, a obim pravougaonika je jednak $2a + 2b$. Dakle, mora vrijediti $a \cdot b = 126$ i $2a + 2b = 52$. Broj 126 možemo na sljedeće načine zapisati kao proizvod dva prirodna broja:

$$126 = 1 \cdot 126 = 2 \cdot 63 = 3 \cdot 42 = 6 \cdot 21 = 7 \cdot 18 = 9 \cdot 14.$$

Dakle, uz pretpostavku $a \leq b$ (što možemo pretpostaviti bez gubitka opštosti), imamo

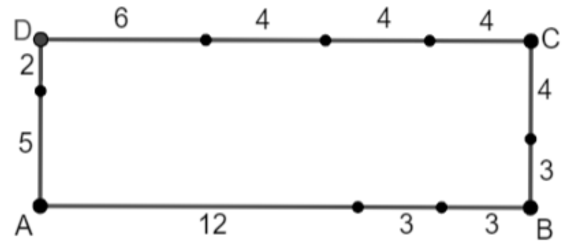
$$(a, b) \in \{(1,126), (2,63), (3,42), (6,21), (7,18), (9,14)\},$$

pa $2a + 2b \in \{254,130,90,54,50,46\}$.

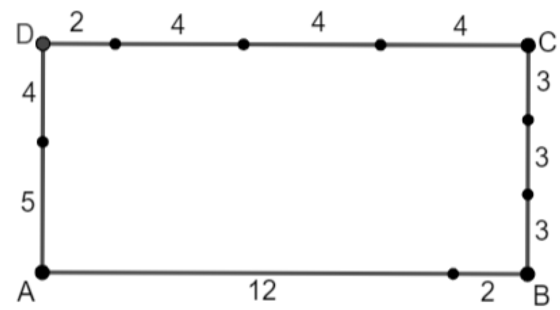
Kako ni u jednom slučaju obim nije jednak 52, Emil ne može napraviti pravougaonik.

d) Primijetimo da je obim manji od 52 samo u slučajevima $(a, b) \in \{(7,18), (9,14)\}$, te da je redom jednak 50 i 46 u tim slučajevima. Dakle, $z = 2$ ili $z = 6$.

U prvom slučaju, Emil će sa strane ostaviti štap dužine $2\ cm$, te može napraviti traženi pravougaonik kao na slici desno. Površina je jednaka $18 \cdot 7 = 126\ cm^2$.



U drugom slučaju, Emil će sa strane ostaviti štap dužine $6\ cm$, te može napraviti traženi pravougaonik kao na slici desno. Površina je jednaka $14 \cdot 9 = 126\ cm^2$.



Šema bodovanja:

- dio pod a) nosi **4 boda**, i to:
  - zaključak da je obim pravougaonika kod kojeg je jedna stranica tri puta duža od druge oblika $8 \cdot x$: **1 bod**
  - zaključak da je obim pravougaonika kojeg će Emil napraviti od 12 štapova jednak $52\ cm$: **1 bod**
  - zaključak da vrijedi $8x = 52$, te da zbog toga nema rješenja: **2 boda**
- dio pod b) nosi **5 bodova**, i to:
  - zaključak da su jedine opcije $y = 4$ i $y = 12$: **3 boda**
  - primjer za $y = 4$: **1 bod**
  - primjer za $y = 12$: **1 bod**
- dio pod c) nosi **6 bodova**, i to:
  - zaključivanje $(a, b) \in \{(1,126), (2,63), (3,42), (6,21), (7,18), (9,14)\}$: **3 boda**
  - određivanje vrijednosti obima u svakom od tih slučajeva: **2 boda**
  - zaključak da zbog toga Emil ne može napraviti pravougaonik: **1 bod**
- dio pod d) nosi **5 bodova**, i to:
  - zaključak da su jedine opcije $z = 2$ i $z = 6$: **3 boda**
  - primjer za $z = 2$: **1 bod**
  - primjer za $z = 6$: **1 bod**

Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
22. marta/ožujka 2023.

Rješenja zadataka i šema bodovanja za VII razred

Zadatak 1. Za jedan posao u trajanju od 10 dana poslodavac je angažirao radnika i obećao mu po završetku posla dati naknadu u iznosu od 600 KM i jedan mobitel. Poslije 8 dana radnik se razbolio pa mu je poslodavac za do tada obavljeni posao isplatio 400 KM i mobitel. Koliko košta mobitel? Odgovor detaljno obrazložiti!

Rješenje: **I način**

Označimo sa x KM vrijednost mobitela. To znači da je za cjelokupno obavljen posao u trajanju od 10 dana radnik trebao dobiti iznos od $(600 + x)$ KM. Pošto se radnik nakon 8 dana razbolio, to je do tog trenutka obavio $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ ukupnog posla, i za taj dio je bio isplaćen $(400 + x)$ KM. Znači, cijenu mobitela možemo odrediti iz jednačine

$$\frac{4}{5}(600 + x) = 400 + x.$$

Sređivanjem dobijemo jednačinu

$$480 + \frac{4}{5}x = 400 + x, \text{ tj. njoj ekvivalentnu } \frac{1}{5}x = 80.$$

Rješenje posljednje jednačine je $x = 400$.
Dakle, mobitel košta 400 KM.

Šema bodovanja:

- uvođenje nepoznate veličine za cijenu mobitela – 2 boda
- zaključak da je radnik uradio $\frac{4}{5}$ ukupnog posla – 5 bodova
- postavljanje jednačine $\frac{4}{5}(600 + x) = 400 + x$ ili njoj ekvivalentne $\frac{1}{5}(600 + x) = 200$, tj. svođenje takstualnog zadatka na linearnu jednačinu – 8 bodova
- dobijanje tačnog rješenja jednačine – 4 boda (manja greška u računu će se kazniti oduzimanjem 2 boda)
- ispravan odgovor/zaključak o cijeni mobitela – 1 bod

II način

Označimo sa x KM vrijednost mobitela. Za posao u trajanju od 10 dana radnik je trebao dobiti ukupno $(600 + x)$ KM. Pošto je za 8 dana, koliko je radio, bio isplaćen $(400 + x)$ KM, zaključujemo da je za dva preostala dana trebao dobiti

$$(600 + x)\text{ KM} - (200 + x)\text{ KM} = 200\text{ KM}.$$

Otuda slijedi da jednan dana rada vrijedi 100 KM, pa za posao od 10 dana radnik bi dobio 1000 KM. Kako je dio novca (600 KM) trebao dobiti u gotovini, a dio novca u protuvrijednosti koštanja mobitela, slijedi da mobitel košta

$$1000\text{ KM} - 600\text{ KM} = 400\text{ KM}.$$

Šema bodovanja:

- uvođenje nepoznate veličine za cijenu mobitela ili ekvivalenta – 2 boda
- zaključak da je radnik za preostala 2 dana trebao dobiti 200 KM – 9 bodova
- zaključak da jedan radni dan vrijedi 100 KM, a 10 dana 1000 KM – 6 bodova (po 3 boda za svaki od tih zaključaka)
- dobijanje ispravnog izračuna i zaključka o cijeni mobitela – 3 bod

Zadatak 2. Data je jednačina

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=\frac{70001}{70002}.$$

a) Riješiti datu jednačinu.

b) Odrediti cifru broja x koja se nalazi na 2023. mjestu nakon decimalnog zareza.

Rješenje:

a) Data jednačina se svodi na

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{70002}{70001},$$

tj. na

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{70001}.$$

Kao i u prvom koraku, imamo da je

$$1+\frac{1}{x}=70001,$$

odakle se dobije

$$x=\frac{1}{70000}.$$

b) Napišimo broj $x=\frac{1}{70000}$ u obliku $x=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{10000}$. Kako je

$$\frac{1}{7}=0,\dot{1}4285\dot{7}$$

(beskonačan periodičan decimalni broj u kojem se blok od 6 decimalnih cifara 142857 ponavlja beskonačan broj puta), to je

$$x=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{10000}=0{,}0000\dot{1}4285\dot{7}.$$

Dakle, cifre iza decimalnog zareza su četiri nule nakon kojih slijede ponavljajući blokovi od 6 cifara 142857. Vidimo da broj $x=\frac{1}{70000}$ ima ista ponavljanja kao i broj $\frac{1}{7}$, samo pomjeren za 4 mjesta u desnu stranu. Dakle, 2023. cifra u broju x će biti istao kao i 2019. cifra (2023-4=2019) u broju $\frac{1}{7}=0,\dot{1}4285\dot{7}$. Kako je $2019=336\cdot 6+3$, to će se 2019. cifra u decimalnom zapisu pojaviti nakon ponavljanja 336 blokova po 6 cifara 142857, te kao 3. cifra u bloku $14\mathbf{2}857$.

Dakle, 2023. cifra broja x je cifra 2.

Šema bodovanja:

- transformacija jednačine na oblik $\frac{1}{x}=70000$ i ispravno rješenje – 8 bodova (6+2) (ukoliko se jednačina svede na oblik $\frac{x+1}{2x+1}=\frac{70001}{70002}$ 5 bodova i ispravno rješenje 3 boda)
- dolazak do zapisa $x=0{,}0000\dot{1}4285\dot{7}$ ili ekvivalentnog zaključka – 4 boda
- zaključak da treba gledati 337 ponavljanja bloka od 6 cifara 142857 ili njemu ekvivalentan zaključak – 6 bodova
- zaključak da je tražena cifra 2 – 2 boda

Zadatak 3. Alen želi podijeliti 17 identičnih bombona Emilu, Nori, Hani i Denisu, pri čemu moraju biti zadovoljeni svi sljedeći uslovi:

- Svako dijete mora dobiti određeni broj bombona.
- Nora će dobiti više bombona nego Emil.
- Hana će dobiti više bombona nego što su dobili Emil i Nora zajedno.
- Denis će dobiti više bombona od Hane.

Na koliko različitih načina Alen može podijeliti sve bombone koje ima? Odgovor detaljno obrazložiti!

Rješenje: Označimo sa a broj bombona koje će dobiti Emil, sa b broj bombona koje će dobiti Nora, sa c broj bombona koje će dobiti Hana i sa d broj bombona koje će dobiti Denis. Iz postavljenih uslova u zadatku zaključujemo da vrijedi

$$1 \leq a < b < a + b < c < d,$$

tj. da svako dijete mora dobiti bar po jednu bombonu i da je $a < b$ i $a + b < c < d$.
Ako bi Emil dobio 2 bombone (ili više), onda je Nora dobila najmanje 3 bombone, Hana najmanje 6 bombona, a Alen najmanje 7 bombona i tada bi bilo

$$a + b + c + d \geq 2 + 3 + 6 + 7 = 18,$$

što je nemoguće.
Dakle, Emil je dobio 1 bombonu. Sada je Nora dobila najmanje 2 bombone (bar 1 više od Emila), Hana najmanje 4 bombone (bar 1 više od toga koliko su dobili Emil i Nora zajedno), te Alen najmanje 5 bombona (bar 1 više od Hane).
Odavde slijedi da je

$$a + b + c + d \geq 1 + 2 + 4 + 5 = 12.$$

Kako je $1 + 2 + 4 + 5 = 12$, ostaje još da raspodjelimo 5 preostalih bombona, ali tako da ne budu narušeni uslovi zadatka. Dakle, djeca bi trebala dobiti $(a, b, c, d) = (1, 2 + x, 4 + y, 5 + z)$ bombona, pri čemu je $x \leq y \leq z$ i $x + y + z = 5$.
Ako je $2 \leq x \leq 5$, onda je $y \geq 2$ i $z \geq 2$, pa je $x + y + z \geq 6$, što je kontradikcija.
Također, ako je $3 \leq y \leq 5$, tada je $z \geq 3$, pa je $y + z \geq 6$, što je ponovo kontradikcija.
Ostaje još provjeriti slučajeve $x \in \{0,1\}, y \in \{0,1,2\}$, pri čemu je $x \leq y$.

1) Ako je $x = y = 0$ i $z = 5$, to $(a, b, c, d) = (1,2,4,10)$ predstavlja jednu mogućnost za raspodjelu bombona.
2) Ako je $x = 0, y = 1$, i $z = 4$, to $(a, b, c, d) = (1,2,5,9)$ također predstavlja jednu mogućnost za raspodjelu bombona.
3) Ako je $x = 0, y = 2$, i $z = 3$, to $(a, b, c, d) = (1,2,6,8)$ također predstavlja jednu mogućnost za raspodjelu bombona.
4) Ako je $x = 1, y = 1$, i $z = 3$, to $(a, b, c, d) = (1,3,5,8)$ također predstavlja jednu mogućnost za raspodjelu bombona.
5) Ako je $x = 1, y = 2$, i $z = 2$, to $(a, b, c, d) = (1,3,6,7)$ također predstavlja jednu mogućnost za raspodjelu bombona.

Dakle, uz date uslove, Alen može na 5 različitih načina podijeliti sve bombone.

Šema bodovanja:

- dokaz da Emil ne može dobiti 2 ili više bombona – 4 boda
- dokaz da Nora ne može dobiti 4 ili više bombona – 4 boda
- dokaz da Hana ne može dobiti 7 ili više bombona – 4 boda
- dobijanje svakog od 5 tačnih rješenja po 1 bod (ukupno 5 bodova)
- zaključak da ne postoje drugi načini osim ovih 5 uz ispravnu argumentaciju – 3 boda

Zadatak 4. Odrediti sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) koji zadovoljavaju sljedeće uslove:

- $a + b + c = 2023$,
- Broj b ima sve iste cifre,
- $a < b < c$,
- $NZD(a, c) = 130$.

Odgovor detaljno obrazložiti!

Rješenje: Kako je $NZD(a, c) = 130$, to zaključujemo da postoje prirodni brojevi $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$a = 130k, \quad b = 130l, \quad (k, l \in \mathbb{N}).$$

Iz gore navedenog dovoljno nam je zaključiti da su brojevi a i c djeljivi sa 10, a iz prvog uslova zadatka $a + b + c = 2023$, zaključujemo da i broj $2023 - b$ mora biti djeljiv sa 10, što je moguće ako i samo ako je zadnja cifra broja b (a samim tim i sve njegove cifre) jednaka 3.

Kako $130|a$, odavde i iz trećeg uslova zadatka dobijamo da je $b > a \geq 130$. Ako je $b > 333$, tada je $b \geq 3333$, što je očigledno nemoguće.

Dakle, $b = 333$. Sada prvi uslov postaje $a + c = 1690$, odakle zbog $130|a$ i $a < 333$ možemo posmatrati sljedeća dva slučaja:

i. Ako je $a = 130$, onda imamo da je $c = 1560$, tj. $(a, b, c) = (130,333,1560)$. Ovo zaista jeste rješenje jer $130|1560$, pa je $NZD(130,1560) = 130$.

ii. Ako je $a = 260$, onda je $c = 1430$, tj. $(a, b, c) = (260,333,1430)$. Ovo zaista jeste rješenje jer je $NZD(260,1430) = 130$ (jer $260 \nmid 1430$).

Dakle, konačna rješenja koja zadovoljavaju sve uslove zadatka su sljedeći uređeni parovi: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \{(\mathbf{130}, \mathbf{333}, \mathbf{1560}), (\mathbf{260}, \mathbf{333}, \mathbf{1430})\}$.

Šema bodovanja:

- 6 bodova za zaključak da broj b ima sve cifre 3
- 5 bodova za zaključak da je $b = 333$ (tj. za odbacivanje ostalih mogućnosti)
- 5 bodova za zaključak da je $a = 130$ ili $a = 260$
- 4 boda za dobijanje rješenja (po 2 za svako rješenje, pri čemu jedan bod nosi provjera da to zaista jeste rješenje). Također, ako učenik jednačinu $a + c = 1690$ zapiše kao $130k + 130l = 1690$, te nakon dijeljenja sa 130 dobije $k + l = 13$, tada provjera u slučaju $k = 1$ nije potrebna, dok je za slučaj $k = 2$ dovoljno da učenik kaže da je $NZD(2 \cdot 1300,11 \cdot 130) = 130$)

Alternativni pristupi rješavanju zadatka sa šemom bodovanja:

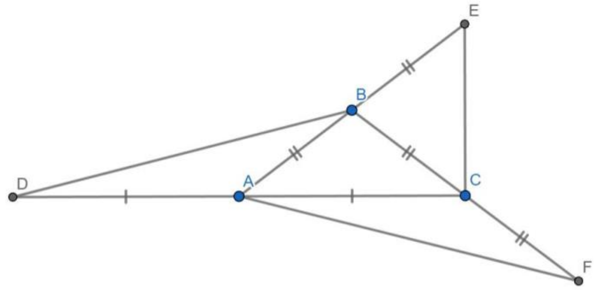
- 2 boda za zaključak da broj b ne može biti jednocifren ili dvocifren
- 2 boda za zaključak da broj b ne može biti četverocifren ili veći, pa mora biti trocifren
- 2 boda za zaključak da je dovoljno provjeriti slučajeve: $b = 111, \dots ,999$
- 14 bodova ukoliko učenik provjeri sve te slučajeve, od toga:
  - 5 bodova za odbacivanje slučajeva kada b nije 333
  - 9 bodova za rješavanje slučaja $b = 333$ (kao u prvom rješenju)

Zadatak 5. Neka je dat jednakokraki trougao ΔABC kod kojeg je $AB = CB$. Na polupravim CA, AB, BC su date redom tačke D, E, F tako da vrijedi $AD = AC, BE = BA, CF = CB$.

a) Dokazati da je $BD = AF$.

b) Izračunati $\measuredangle ADB + \measuredangle BEC + \measuredangle CFA$.

Rješenje: a) Imamo da vrijedi $BA = BC = BE, AC = AD$, te kako je $\measuredangle BAC = \measuredangle ACB$, i $\measuredangle BAD = 180° - \measuredangle BAC = 180° - \measuredangle ACB = \measuredangle ACF$. Iz navedenog zaključujemo da su trouglovi ΔACF i ΔBAD podudarni po pravilu SUS, pa je $BD = AF$.



b) Iz dokazane podudarnosti pod a) imamo da je $\measuredangle ADB = \measuredangle FAC$, pa vrijedi

$$\measuredangle ADB + \measuredangle CFA = \measuredangle FAC + \measuredangle CFA = \measuredangle ACB.$$

Posljednja jednakost proizilazi iz tvrdnje da je vanjski ugao trougla jednak zbiru dva unutrašnja njemu nesusjedna ugla tog trougla. Također, kako je ΔABC jednakokraki sa osnovicom AC, vrijedi da je $\measuredangle ACB = \measuredangle BAC$, a onda i $2\measuredangle ACB + \measuredangle ABC = 180°$, iz čega slijedi da je $\measuredangle ACB = 90° - \frac{\measuredangle ABC}{2}$.

Sada zaključujemo da je $\measuredangle ADB + \measuredangle CFA = 90° - \frac{\measuredangle ABC}{2}$. Dalje, kako je $BC = BE$, vrijedi $\measuredangle BEC = \measuredangle ECB$, pa je $2\measuredangle BEC = \measuredangle BEC + \measuredangle ECB = \measuredangle ABC$, tj. $\measuredangle BEC = \frac{\measuredangle ABC}{2}$. Konačno, imamo

$$\measuredangle ADB + \measuredangle BEC + \measuredangle CFA = 90° - \frac{\measuredangle ABC}{2} + \frac{\measuredangle ABC}{2} = 90°.$$

Šema bodovanja:

- Za dio pod a) (ukupno 5 bodova):
  - 1 bod za $BA = BC = BE, AC = AD$
  - 2 boda za jednakost uglova $\measuredangle BAD = \measuredangle ACF$
  - 2 boda za podudarnost trouglova ΔACF i ΔBAD i tvrdnju $BD = AF$
- Za dio pod b) (ukupno 15 bodova):
  - 2 boda za jednakost uglova $\measuredangle ADB = \measuredangle FAC$
  - 3 boda za zaključak da je $\measuredangle ADB + \measuredangle CFA = \measuredangle ACB$
  - 1 bod za zaključak da je $\measuredangle ACB = \measuredangle BAC$
  - 2 boda za zaključak da je $\measuredangle ACB = 90° - \frac{\measuredangle ABC}{2}$
  - 2 boda za zaključak da je $\measuredangle ADB + \measuredangle CFA = 90° - \frac{\measuredangle ABC}{2}$
  - 2 boda za zaključak da je $\measuredangle BEC = \frac{\measuredangle ABC}{2}$
  - 3 boda za konačnu tvrdnju $\measuredangle ADB + \measuredangle BEC + \measuredangle CFA = 90°$

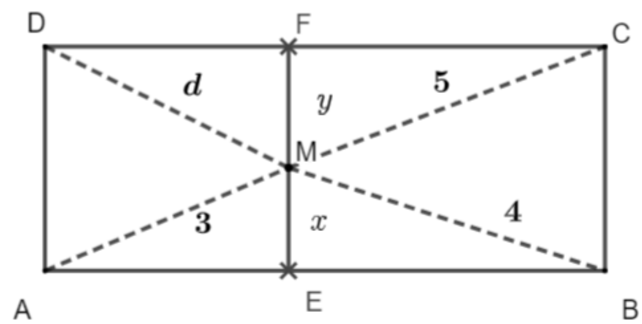
Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
22. marta/ožujka 2023.

Rješenja zadataka i šema bodovanja za VIII razred

Zadatak 1. U unutrašnjosti pravougaonika $ABCD$ nalazi se tačka M takva da je $AM = 3$cm, $BM = 4$cm i $CM = 5$cm. Kolika je udaljenost tačke M od vrha D?

Rješenje. Označimo nepoznatu udaljenost tačke M od vrha D sa d. Pošto je d udaljenost tačke M od vrha D (i tačke M i D su različite), mora biti $d > 0$.

Ako povučemo normalu kroz tačku M na stranice AB i CD datog pravougaonika i označimo presječne tačke normale i stranica AB i CD redom sa E i F, dobit ćemo četiri pravougla trougla: AEM, BME, MCF i FDM.Označimo dužinu duži ME sa x, a dužinu duži MF sa y, te uočimo da je $AE = DF$ i $EB = FC$ (jer su $AEFD$ i $EBCF$ također pravougaonici).



Primjenom Pitagorine teoreme na trougao AEM dobijamo:

$$AE^2 + x^2 = 3^2 \quad (1),$$

a primjenom Pitagorine teoreme na trougao BME dobijamo:

$$EB^2 + x^2 = 4^2 \quad (2).$$

Ako iz (1) i (2) izrazimo x^2 kao $x^2 = 9 - AE^2$ i $x^2 = 16 - EB^2$ redom, te izjednačimo, dobijamo:

$$9 - AE^2 = 16 - EB^2,$$

$$\text{tj. } EB^2 - AE^2 = 7 \quad (3).$$

Primjenom Pitagorine teoreme na trougao MCF dobijamo $FC^2 + y^2 = 5^2$, tj. (sjetimo se da je $FC = EB$):

$$y^2 = 25 - EB^2 \quad (4),$$

a primjenom Pitagorine teoreme na trougao FDM dobijamo $DF^2 + y^2 = d^2$, tj. pošto je $DF = AE$:

$$y^2 = d^2 - AE^2 \quad (5).$$

Iz (4) i (5) sad slijedi $25 - EB^2 = d^2 - AE^2$, tj. $25 - d^2 = EB^2 - AE^2$ (6). Iz (3) i (6) sad slijedi:

$$7 = 25 - d^2$$

$$d^2 = 18$$

Pošto je $d > 0$ to je rješenje ove jednačine $d = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$cm.

Šema bodovanja:

- Povlačenje normale kroz tačku M na stranice AB i CD (ili analogno, na stranice BC i AD): 1 bod
- Uočavanje 4 pravougla trougla: 2 boda
- Uočavanje da je $AE = DF$ i $EB = FC$: 3 boda
- Primjena Pitagorine teoreme na dobijene pravougle trouglove i dobijanje jednačina $AE^2 + x^2 = 3^2$, $EB^2 + x^2 = 4^2$, $EB^2 + y^2 = 5^2$, $AE^2 + y^2 = d^2$ (ovih ili analognih jednačina, ako je učenik povukao normalu na stranice BC i AD): 8 bodova
- Svođenje problema na dvije jednačine $EB^2 - AE^2 = 7$ i $25 - d^2 = EB^2 - AE^2$: 3 boda
- Dobijanje jednačine $d^2 = 18$: 2 boda
- Dobijanje rješenja $d = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$cm: 1 bod

Zadatak 2. Na tabli je napisano 100 različitih proizvoljnih prirodnih brojeva. Emin je svaki napisani broj zaokružio jednom od tri boje: plavom, žutom ili bijelom. Dokazati da postoji barem 12 brojeva zaokruženih istom bojom, koji pri dijeljenju sa 3 daju isti ostatak.

Rješenje. Pošto je napisano 100 brojeva i zaokruženi su sa tri boje, te pošto je $100 = 3 \cdot 33 + 1$, po **Dirichletovom principu** slijedi da su barem 34 broja zaokružena istom bojom (dakle, 34 ili više brojeva je zaokruženo istom bojom). Označimo sa S skup tih brojeva.

Brojevi u skupu S su ili djeljivi sa 3 (pa pri dijeljenju sa 3 daju ostatak 0), ili pri dijeljenju sa 3 daju ostatak 1 ili daju ostatak 2. Postoje samo ove 3 opcije za ostatak. Skup S ima minimalno 34 elementa, te pošto je $34 = 3 \cdot 11 + 1$, to po **Dirichletovom principu** postoji barem 12 brojeva u skupu S koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3. Ti brojevi su svakako zaokruženi sa istom bojom (jer su svi iz skupa S), što znači da u početnom skupu od 100 brojeva postoji barem 12 brojeva koji su zaokruženi istom bojom i daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3.

Napomena: Moglo se na analogan način prvo zaključiti da postoje barem 34 broja na tabli koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3, a zatim da među tim brojevima postoji barem 12 brojeva koji su zaokruženi istom bojom.

Šema bodovanja:

- Zaključak da su po Dirichletovom principu barem 34 broja zaokružena istom bojom: 9 bodova
- Zaključak da postoje samo 3 opcije za ostatak pri dijeljenju sa 3: ostatak 0, ostatak 1 i ostatak 2: 2 boda
- Zaključak da je po Dirichletovom principu onda barem 12 brojeva zaokruženo istom bojom i daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3: 9 bodova

  Analogno bodovanje je u slučaju ako učenik prvo zaključi da postoje barem 34 broja na tabli koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa 3 (to je 2 boda + 9 bodova), a zatim da je barem 12 tih brojeva zaokruženo istom bojom (9 bodova).

Zadatak 3. Ako je $x^2 + y^2 + xy = 32$ i $6x - 14y + xy = 90$, izračunati $5x + 2y$ (x, y su realni brojevi).

Rješenje. Uočimo da se u obje date jednačine pojavljuje xy, pa ćemo izraziti xy iz obje:

$$xy = 32 - x^2 - y^2$$
$$xy = 90 - 6x + 14y$$

Lijeve strane u ovako zapisanim jednačinama su jednake, pa moraju biti jednake i desne strane, čime dobijamo sljedeću jednačinu:

$$32 - x^2 - y^2 = 90 - 6x + 14y$$

$$-x^2 - y^2 + 6x - 14y - 58 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 14y + 58 = 0$$

Uočimo da je izraz $x^2 - 6x$ dio kvadrata razlike $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$, a izraz $y^2 + 14y$ je dio kvadrata zbira $(y+7)^2 = y^2 + 14y + 49$. Sad lijevu stranu gornje jednačine možemo zapisati ovako:

$$x^2 + y^2 - 6x + 14y + 9 + 49 = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 14y + 49) = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+7)^2 = 0$$

Na lijevoj strani jednačine imamo zbir kvadrata realnih brojeva, i on je jednak nuli ako i samo ako je svaki od kvadrata jednak nuli, tj. ako je $(x-3)^2 = 0$ i $(y+7)^2 = 0$, a ovo vrijedi samo za $x = 3$ i $y = -7$.

Sad možemo izračunati traženu vrijednost: $5x + 2y = 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-7) = 15 - 14 = 1$.

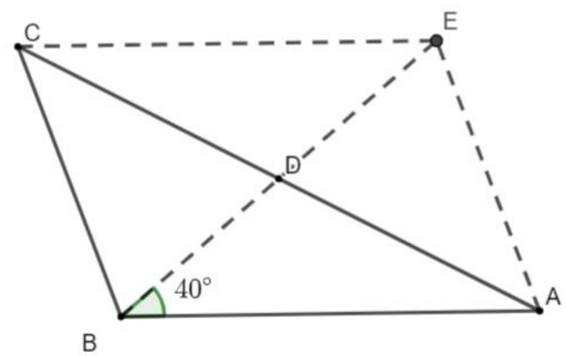
Šema bodovanja:

- Izraziti xy iz obje date jednačine te izjednačiti odgovarajuće strane (ili na neki drugi način dobiti novu jednačinu, sa eliminisanim xy): 3 boda
- Srediti dobijenu jednačinu: 1 bod
- Prepoznati i zapisati kvadrate binoma $(x-3)^2$ i $(y+7)^2$: 6 bodova (ako učenik uoči samo jedan kvadrat binoma, npr. prepozna $(x-3)^2$, ali ne i $(y+7)^2$, to su onda 3 boda od navedenih 6 bodova)
- Dobiti jednačinu $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 0$: 2 boda
- Zaključiti da je ovo moguće samo kada je $(x-3)^2 = 0$ i $(y+7)^2 = 0$: 4 boda
- Dobiti $x = 3$ i $y = -7$: 2 boda
- Tačno izračunati traženu vrijednost $5x + 2y = 1$: 2 boda

Zadatak 4. U trouglu ABC težišna duž BD je dva puta kraća od stranice AB. Ugao $\angle ABD$ iznosi $40°$. Odrediti veličinu ugla $\angle ABC$.

Rješenje. ***I način:***

Produžimo težišnu duž BD u smjeru poslije tačke D za njenu dužinu tj. dobivamo tačku E tako da je $BD = DE$ kao na narednoj slici.



Zbog $AD = CD$ i $BD = DE$, novodobiveni četverougao $ABCE$ je paralelogram (jer mu se dijagonale polove). Poznato svojstvo paralelograma je da su mu naspramne stranice paralelne i jednake dužine.

Trougao ABE je jednakokraki jer je $BE = 2 \cdot BD = 2 \cdot \frac{AB}{2} = AB$.

U tom jednakokrakom trouglu je: $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AEB = \frac{180^\circ - \sphericalangle ABE}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Zbog $BC \parallel AE$ (naspramne stranice paralelograma) i zajedničke duži BE (s tačkom D na njoj) je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle AEB = 70^\circ$ (uglovi sa paralelnim kracima).

Finalno, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = 40^\circ + 70^\circ = 110^\circ$.

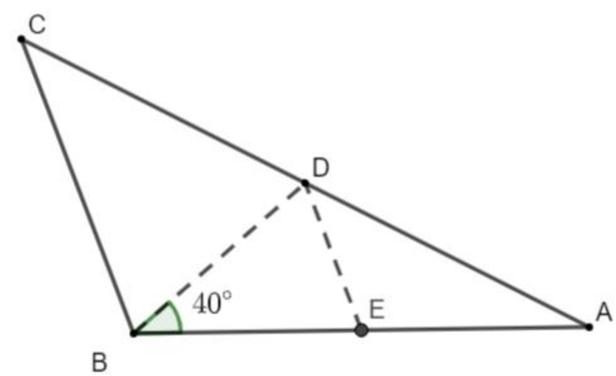
Napomena: Zaključak da je $\sphericalangle DBC = 70^\circ$ se može dobiti i iz podudarnosti trouglova BDC i ADE.

Šema bodovanja:

- Dodati tačku E na produžetku težišne duži BD tako da je $BD = DE$: 3 boda
- Zaključiti da je četverougao $ABCE$ paralelogram: 4 boda
- Zaključiti da je trougao ABE jednakokraki: 3 boda
- Izračunati $\sphericalangle AEB$: 3 boda
- Zaključiti da su $\sphericalangle DBC$ i $\sphericalangle AEB$ podudarni kao uglovi sa paralelnim kracima: 4 boda
- Izračunati veličinu traženog $\sphericalangle ABC$: 3 boda

II način:

Na stranici AB trougla ABC dodamo tačku E tako da je $AE = BE$ (tačka E je na sredini te stranice) kao na narednoj slici.



Trougao BED je jednakokraki jer je $BE = \frac{AB}{2} = BD$.

U tom jednakokrakom trouglu je: $\sphericalangle BED = \sphericalangle BDE = \frac{180^{\circ} - \sphericalangle ABD}{2} = \frac{180^{\circ} - 40^{\circ}}{2} = 70^{\circ}$.

Duž DE spaja središta dvije stranice trougla ABC (stranice AB i AC). Takva duž se naziva srednjom linijom trougla i njeno poznato svojstvo je da je ona paralelna s trećom stranicom istog trougla (stranicom BC).

Zbog $BC \parallel DE$ i zajedničke duži BD je $\sphericalangle BDE = \sphericalangle DBC = 70^{\circ}$ (uglovi sa paralelnim kracima).

Finalno, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = 40^{\circ} + 70^{\circ} = 110^{\circ}$.

Šema bodovanja:

- Dodati tačku E na stranici AB trougla ABC tako da je $AE = BE$: 3 boda
- Zaključiti da je trougao BED jednakokraki: 3 boda
- Izračunati $\sphericalangle BDE$: 3 boda
- Zaključiti da je DE srednja linija trougla ABC i konstatovati da je ona paralelna sa stranicom trougla BC: 4 boda
- Zaključiti da su $\sphericalangle DBC$ i $\sphericalangle BDE$ jednaki kao uglovi s paralelnim kracima: 4 boda
- Izračunati veličinu traženog $\sphericalangle ABC$: 3 boda

Zadatak 5. Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da je $a + b = ab - bc$ i $c + 1$ je kvadrat prostog broja. Dokazati da je barem jedan od brojeva ab ili $a + b$ potpun kvadrat.

Rješenje. Označimo $c + 1 = p^2$ (gdje je p prost broj) $\Rightarrow c = p^2 - 1$.

Uvrstimo navedeno u zadanu jednakost $a + b = ab - bc$, a zatim istu dodatno transformišemo kako slijedi:

$$a + b = ab - b(p^2 - 1)$$

$$a + b = ab - bp^2 + b$$

$$bp^2 = a(b - 1)$$

Primijetimo da je $b \neq 1$, jer bi onda desna strana bila 0, a lijeva strana prirodan broj.

Kako su očigledno brojevi $b - 1$ i b relativno prosti ($NZD(b - 1, b) = 1$), član $(b - 1)$ koji se nalazi s desne strane jednakosti mora biti djeljitelj lijeve strane bp^2, odnosno zbog $NZD(b - 1, b) = 1$, $b - 1$ mora biti djeljitelj od p^2. Kvadrat bilo kojeg prostog broja ima tri djeljitelja: $1, p$ i p^2.

Ukoliko je $b - 1 = 1 \;\Rightarrow\; 2p^2 = a \;\Rightarrow\; ab = 2p^2 \cdot 2 = 4p^2 = (2p)^2$.

Ukoliko je $b - 1 = p \;\Rightarrow (p + 1)p^2 = ap \;\Rightarrow a = p^2 + p$

$$\Rightarrow\; a + b = p^2 + p + p + 1 = p^2 + 2p + 1 = (p + 1)^2$$

Ukoliko je $b - 1 = p^2 \;\Rightarrow\; (p^2 + 1)p^2 = ap^2 \;\Rightarrow a = p^2 + 1$

$$\Rightarrow\; ab = (p^2 + 1)(p^2 + 1) = (p^2 + 1)^2$$

čime je dokazana tvrdnja i u ovome slučaju, te samim time sumarno dokazana i tvrdnja zadatka.

Šema bodovanja:

- Transformisati zadanu jednakost u oblik $bp^2 = a(b - 1)$: 3 boda
- Dokazati da slučaj $b = 1$ nema rješenja: 1 bod
- Objasniti da je $NZD(b - 1, b) = 1$ za $b > 2$, te da zbog toga $b - 1 | p^2$: 5 bodova (alternativno, učenik može jednačinu zapisati u obliku $p^2 + (b - 1)p^2 = a(b - 1)$, te odatle zaključiti da $b - 1 | p^2$, međutim, ukoliko učenik pogrešno zaključi da da $b - 1$ dijeli p^2 iz razloga što $b - 1$ ne dijeli b, ne dobija ovih 5 bodova, ali mu se priznaju dalji zaključci)
- Zaključiti da $b - 1$ može uzimati vrijednosti $1, p$ i p^2: 3 boda
- Dokazati da je ab potpun kvadrat za $b - 1 = 1$: 2 boda
- Dokazati da je $a + b$ potpun kvadrat za $b - 1 = p$: 3 boda
- Dokazati da je ab potpun kvadrat za $b - 1 = p^2$: 3 boda

Kantonalno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola Kantona Sarajevo

22. 3. 2023.

ZADACI S RJEŠENJIMA I ŠEMOM BODOVANJA

IX razred

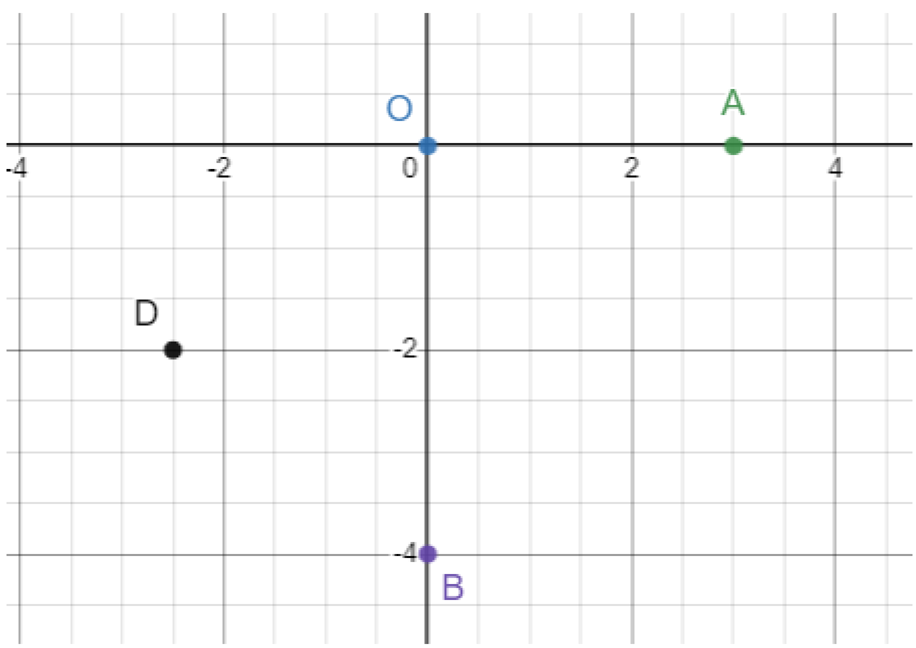
Zadatak 1. U koordinatnoj ravni sa ishodištem u tački O data je prava p koja siječe x-osu u tački $A=(3,0)$, a y-osu u tački B (pri čemu je y koordinata tačke B negativna) tako da je površina trougla AOB jednaka 6. Odrediti obim i površinu četverougla $OABD$, pri čemu je tačka D presjek prave $y=\frac{2}{5}x-1$ i simetrale duži OB.

Rješenje. Površina trougla AOB jednaka je $P=\frac{|x_A|\cdot|y_B|}{2}$, odakle je $|y_B|=4$, tj. $y_B=-4$.

Dakle, $B=(0,-4)$.

Simetrala duži OB je prava $y=-2$. Presjek te prave i prave $y=\frac{2}{5}x-1$ je tačka

$$D\left(-\frac{5}{2},-2\right).$$



Površina četverokuta $OABD$ jednaka je zbiru površina trouglova OAB i ODB.

Imamo

$$P_{ODB}=\frac{|OB|\cdot|x_D|}{2}=\frac{4\cdot\frac{5}{2}}{2}=5,$$

pa je

$$P_{OABD}=6+5=11.$$

Obim O_{OABD} četverougla $OABD$ jednak je $\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DO}$. Imamo:

$$\overline{OA} = 3,$$

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\overline{BD} = \overline{DO} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{41}}{2},$$

pa je

$$O_{OABD} = 8 + \sqrt{41}.$$

Šema bodovanja.

- izračunavanje tačke B: **2 boda**
- uočavanje da je simetrala duži OB zapravo prava $y = -2$ (ili uočavanje da će y koordinata tačke D biti -2): **4 boda**
- izračunavanje tačke D: **4 boda**
- izračunavanje površine četverougla $OABD$: **4 boda**
- izračunavanje obima četverougla $OABD$: **6 bodova**

Zadatak 2. *Petorka* brojeva sastoji se od 5 međusobno različitih prirodnih brojeva. Neki prirodan broj se može nalaziti u više petorki. Za svake dvije petorke vrijedi da postoje tačno 4 broja koja se nalaze u obe te petorke (npr. $\{1,6,7,10,15\}, \{1,6,7,10,21\}, \{6,7,10,15,21\}$ su tri validne petorke).

a) Dokazati da je moguće napraviti 2023 petorke.
b) Ako na raspolaganju imamo samo brojeve $1,2,3,4,5,6$ koliko najviše petorki je moguće napraviti (pri čemu se svaki od navedenih brojeva mora nalaziti bar u jednoj petorci)?
c) Ako na raspolaganju imamo samo brojeve $1,2,3,4,5,6,7$ koliko najviše petorki je moguće napraviti (pri čemu se svaki od navedenih brojeva mora nalaziti bar u jednoj petorci)?

Rješenje.

a) Petorke možemo napraviti na sljedeći način:

$$\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,4,7\}, \{1,2,3,4,8\}, \dots, \{1,2,3,4,2027\}.$$

Nabrojano je ukupno 2023 petorki, a očigledno vrijedi da svake dvije petorke imaju tačno 4 broja (brojeve $1,2,3,4$) zajednička i da su brojevi u svakoj petorci različiti.

b) Možemo napraviti najviše 6 petorki. Naime, primijetimo da bilo koja dva podskupa od 5 elemenata skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$ imaju tačno 1 element različit, odnosno imaju tačno 4 elementa zajednička. Ovo nam govori da će svi uslovi biti zadovoljeni ako uzmemo sve petorke od po 5 elemenata skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$, a sa druge strane očigledno je nemoguće napraviti više petorki od toga. Dakle, to su petorke:

$$\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}.$$

c) Možemo napraviti 3 petorke: $\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,4,7\}$. Dokažimo da je nemoguće napraviti 4 ili više petorki. Pretpostavimo suprotno, da su napravljene bar 4 petorke od brojeva $1,2,3,4,5,6,7$. Neka su prve dvije petorke $A = \{a, b, c, d, e\}$ i $B = \{a, b, c, d, f\}$, pri čemu je $e \neq f$. Označimo sa g preostali sedmi broj. Neka je C petorka koja sadrži broj g. Kako g nije zajednički element petorke C sa petorkama A i B, preostala 4 broja iz C se moraju nalaziti i u A i u B, odnosno to moraju biti brojevi $\{a, b, c, d\}$ iz čega slijedi da je $C = \{g, a, b, c, d\}$. Posmatrajmo sada četvrtu petorku D. Ova petorka ne može sadržavati broj g, jer bi inače sličnom logikom kao maloprije zaključili da $D = \{a, b, c, d, g\}$, što je kontradikcija, jer su tada petorke C i D iste. Pošto ne sadrži g, onda D mora sadržavati preostala 4 broja iz C, tj. brojeve $\{a, b, c, d\}$. Međutim, sada D već ima 4 zajednička elementa i sa A i sa B, pa ne smije sadržavati ni broj e ni broj f (u suprotnom bi D sa nekim od A ili B imao 5 zajedničkih elemenata). Ovo je kontradikcija, jer sada D nema petog elementa.

Šema bodovanja.

- a) konstrukcija i dokaz ispravnosti 2023 petorke: **5 bodova**
- b) zaključak da su svi petočlani podskupovi validne petorke: **3 boda**
- prebrojavanje takvih petorki: **1 bod**
- c) validna konstrukcija 3 petorke: **2 boda**
- dokaz da se ne može napraviti 4 ili više petorki: **9 bodova**

Zadatak 3. Riješiti sistem jednačina u skupu realnih brojeva:

$$a + b + c = 5\frac{1}{4}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 11\frac{13}{16}$$

$$a^2 = bc.$$

Rješenje. Pretvorimo prvo mješovite razlomke u razlomke. Dakle, rješavamo sistem:

$$a + b + c = \frac{21}{4}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{189}{16}$$

$$a^2 = bc.$$

Prvo ćemo odrediti broj a na dva načina.

<u>1. način:</u>

Kvadriranjem prve jednadžbe sistema dobivamo:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = \frac{441}{16}.$$

Odatle je, na osnovu druge jednadžbe sistema,

$$ab + bc + ca = \frac{63}{8},$$

pa na osnovu treće jednadžbe sistema slijedi

$$ab + ac + a^2 = \frac{63}{8},$$

tj.

$$a(b + c + a) = \frac{63}{8}.$$

Odatle je

$$a = \frac{63}{8} : \frac{21}{4} = \frac{3}{2}.$$

<u>2. način:</u>

Uvrštavajući $a^2 = bc$ u drugu jednadžbu dobivamo:

$$b^2 + c^2 + bc = \frac{189}{16},$$

tj.

$$(b+c)^2-bc=\frac{189}{16}.$$

Iz prve jednadžbe je $b+c=\frac{21}{4}-a$, a znamo i da je $bc=a^2$, pa iz prethodnoga imamo

$$\left(\frac{21}{4}-a\right)^2-a^2=\frac{189}{16}.$$

Odatle lako slijedi $a=\frac{3}{2}$.

Sada iz uvrštavajući $a=\frac{3}{2}$ iz prve i treće jednadžbe dobivamo sistem dviju jednadžbi s dvije nepoznate:

$$b+c=\frac{15}{4}$$

$$bc=\frac{9}{4}.$$

Rješavajući ga metodom supstitucije, primjerice uvrštavajući $c=\frac{9}{4b}$ u prvu jednadžbu, dobivamo:

$$4b^2-15b+9=0.\ (*)$$

Broj b ćemo također odrediti na dva načina:

<u>1. način:</u>

Srednji član $15b$ ćemo rastaviti tako da je proizvod ta dva člana jednak proizvodu prvog i zadnjeg člana, tj. $9\cdot 4b^2=36b^2$. To možemo postići kao $-15b=-12b-3$. Jednačinu $(*)$ možemo zapisati kao $4b^2-12b-3b+3$, tj. kao

$$4b(b-3)-3(b-3)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(4b-3)(b-4)=0.$$

<u>2. način:</u>

Nakon dijeljenja sa 4 (mada možemo i bez dijeljenja), možemo nadopuniti jednačinu do potpunog kvadrata. Jednačinu $(*)$ možemo zapisati kao $b^2-\frac{15}{4}b+\frac{9}{4}=0$, tj. kao

$$\left(b-\frac{15}{8}\right)^2-\frac{81}{64}=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(b-\frac{15}{8}-\frac{9}{8}\right)\left(b-\frac{15}{8}+\frac{9}{8}\right)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(b-3)(b-\frac{3}{4})=0.$$

Primijetimo da smo na oba načina došli do dvije mogućnosti:

a) $b = 3$, odakle je $c = \frac{3}{4}$;

b) $b = \frac{3}{4}$, odakle je $c = 3$.

Dakle, sistem ima dva rješenja: $(a, b, c) = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{4}\right)$ i $(a, b, c) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 3\right)$.

Šema bodovanja.

- izračunavanje broja a: **10 bodova**

  I način:

  - izračunavanje izraza $ab + bc + ca$: **2 boda**
  - uvrštavanje $bc = a^2$ u prethodni izraz i faktorizacija na $a(a + b + c)$: **7 bodova**
  - izračunavanje $a = \frac{3}{2}$: **1 bod**

  II način:

  - zapisivanje druge jednadžbe kao $(b + c)^2 - bc$: **4 boda**
  - izražavanje izraza $(b + c)^2 - bc$ preko a: **5 bodova**
  - izračunavanje $a = \frac{3}{2}$: **1 bod**

- izračunavanje brojeva b i c: **10 bodova**
  - svođenje na sistem dvije jednadžbe sa dvije nepoznate: **1 bod**
  - izražavanje jedne varijable preko druge i uvrštavanje u drugu jednačinu (tj. svođenje na jednačinu sa jednom nepoznatom): **3 boda**
  - rješavanje jednačine $4b^2 - 15b + 9 = 0$ (ili ekvivalentne jednačine sa c), te dobijanje rješenja: **6 bodova**

Zadatak 4. Naći sve uređene parove prirodnih brojeva (x, y) za koje vrijedi da je $2xy$ potpun kvadrat nekog prirodnog broja, a $x^2 + y^2$ je prost broj.

Rješenje. Po pretpostavci je $2xy = n^2$ za neki prirodan broj n, a $x^2 + y^2 = p$ za neki prost broj p. Sada je

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = p + n^2,$$

odakle je, prebacivanjem n^2 na lijevu stranu i upotrebom formule za razliku kvadrata,

$$(x + y - n)(x + y + n) = p.$$

Kako je $x + y + n > 0$ i $p > 0$, slijedi da mora i $x + y - n > 0$. Kako je p prost broj, iz prethodnog slijedi da je jedan od faktora $x + y - n, x + y + n$ jednak 1, a da je drugi jednak p.

Kako je $x + y + n > x + y - n$, zaključujemo da mora biti

$$x + y - n = 1,$$

$$x + y + n = p.$$

Sabirajući ove dvije jednakosti, dobivamo

$$2x + 2y = p + 1,$$

tj.

$$2x + 2y = x^2 + y^2 + 1,$$

a to je ekvivalentno sa

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Kako su x i y prirodni brojevi, odavde slijedi

$$x - 1 = 0 \text{ i } y - 1 = 1$$

ili

$$x - 1 = 1 \text{ i } y - 1 = 0,$$

tj. $(x, y) = (1,2)$ ili $(x, y) = (2,1)$.

Provjerom se utvrdi da takvi parovi $(1,2)$ i $(2,1)$ zaista zadovoljavaju uvjete zadatka.

Šema bodovanja.

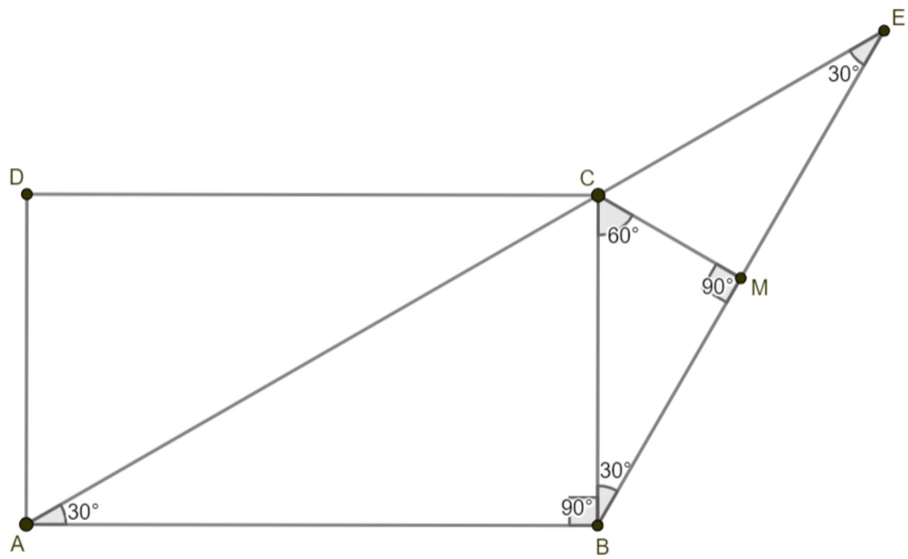
- dobijanje jednačine $(x + y)^2 = p + n^2$: **3 boda**
- faktorizacija prethodne jednačine preko razlike kvadrata: **2 boda**
- ispravan zaključak da je jedini mogući slučaj $x + y - n = 1$ i $x + y + n = p$: **7 bodova**
- dobijanje jednačine $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$: **5 bodova**
- dobijanje rješenja $(x, y) = (2,1)$ i $(x, y) = (1,2)$: **2 boda**
- provjera rješenja: **1 bod**

Zadatak 5. Dat je pravougaonik $ABCD$. Tačka E leži sa one strane prave BC na kojoj nisu tačke A i D, tako da vrijedi $BE = BA$ i $CE = CB$. Poznato je da je površina pravougaonika $ABCD$ četiri puta veća od površine trougla BCE. Ako je dužina stranice $AD = 10$, odrediti dužinu duži AE.

Rješenje. Iz uslova zadatka je $AD = BC = CE = 10$. Neka je M sredina stranice BE. Tada, pošto je trougao CBE jednakokraki, duž CM je zapravo i visina u trouglu CBE. Imamo da je površina pravouganika jednaka $10 \cdot AB = 10 \cdot BE$, a površina trougla CBE jednaka je $\frac{CM \cdot BE}{2}$, pa iz uslova zadatka vrijedi

$$10 \cdot BE = 4 \cdot \frac{CM \cdot BE}{2},$$

tj. $CM = 5 = \frac{BC}{2}$. Iz Pitagorine teoreme u trouglu CMB dobijamo $\frac{BE}{2} = BM = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$, tj. $AB = BE = 10\sqrt{3}$.



Posmatrajući pravougli trougao BCM, oučavamo da je kod njega kateta CM duplo manja od hipotenuze BC, što znači da taj trougao ima uglove $30°, 60°, 90°$, odnosno $\angle MBC = 30°, \angle MCB = 60°$.

Kako je $CB = CE$, to su i uglovi $\angle CBE$ i $\angle BEC$ jednaki, pa je $\angle BEC = 30°$. S druge strane, imamo da je $\angle ABE = 90° + \angle CBE = 90° + 30° = 120°$, a kako je $AB = BE$, slijedi da je $\angle BAE = \angle BEA = 30°$. Dakle vrijedi $\angle BEC = 30° = \angle BEA$, pa tačke E, C, A leže na istoj pravoj. Sada je $AE = AC + CE = \sqrt{10^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2} + 10 = 30$.

Šema bodovanja.

- uvođenje tačke M: **1 boda**
- dobijanje $CM = \frac{BC}{2}$: **2 boda**
- zaključak da su uglovi u trouglu BMC jednaki $30°, 60°, 90°$: **5 bodova**
- dobijanje $\angle BEC = 30°$: **2 boda**
- dobijanje $\angle BEA = 30°$: **2 boda**
- dokaz da tačke A, C, E leže na istoj pravoj: **5 boda**
- izračun AE: **3 boda**