Kanton Sarajevo

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

17. marta/ožujka 2022.

VII razred

Zadatak 1. U trouglu ABC u kojem je $AB < AC$ ugao kod vrha B iznosi $70°$, a ugao između visine i simetrale unutrašnjeg ugla kod vrha A iznosi $10°$. Izračunati ugao kod vrha C.

Zadatak 2. a) Izračunati vrijednost izraza

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2022}\right)$$

b) Odrediti prirodan broj n tako da vrijedi:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=2022$$

Zadatak 3. Naći najmanji četverocifreni broj $\overline{abcd}$ takav da je

a) $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)=45$

b) $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)=18$

Odgovor obrazložiti.

Napomena 1: Za cifru a pretpostavljamo da je različita od nule.

Napomena 2: Cifre a, b, c, d ne moraju nužno biti međusobno različite.

Zadatak 4. Zenan, Admir i Franjo su otišli u kupovinu. Svako je sebi kupio određen broj krušaka. Kada Zenan pojede $1/4$ svojih, Admir $1/2$ svojih i Franjo $1/5$ svojih krušaka, preostane im jednak broj krušaka. Koliko je krušaka kupio svako od njih, ako je Zenan kupio 10 krušaka više od Franje?

Zadatak 5. U jednakokrakom trouglu ΔABC stranica AB je osnovica, a ugao kod vrha C je oštar. Neka je E tačka u kojoj visina iz vrha B siječe stranicu AC i neka je D tačka na produžetku duži BA preko A takva da je DB osnovica jednakokrakog trougla ΔDBE. Neka je F tačka na produžetku CA preko A takva da je prava DF okomita na AC.

a) Dokazati da su prave DE i BC okomite.

b) Dokazati da je $DF = EG$, pri čemu je G presjek pravih DE i BC.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

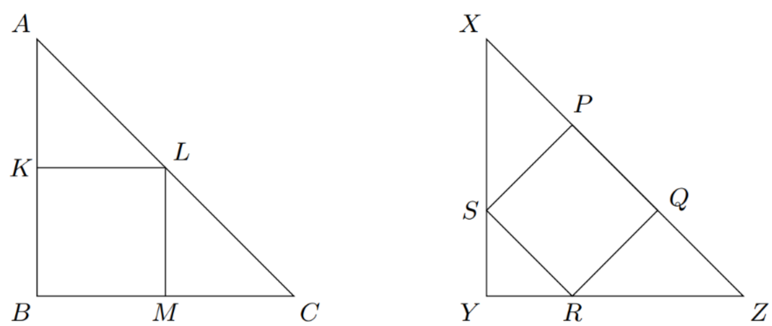
Kanton Sarajevo

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

17. marta/ožujka 2022.

VIII razred

Zadatak 1. Neka su ΔABC i ΔXYZ podudarni jednakokrako-pravougli trouglovi (vrijedi $AB = BC = XY = YZ,\ AC = XZ,\ \angle ABC = \angle XYZ = 90°$). Kvadrati $BMLK$ i $RQPS$ su postavljeni kao na slici. Ako je površina kvadrata $BMLK$ jednaka 189, odrediti površinu kvadrata $RQPS$.



Zadatak 2. Za realne brojeve a, b, c vrijedi $a + b + c = 0$ i $abc = 4$. Odrediti vrijednost izraza $a^3 + b^3 + c^3$.

Zadatak 3. Odrediti sve proste brojeve p i q takve da je $p^2 + q^3$ kvadrat prirodnog broja.

Zadatak 4. Neka je BC najmanja stranica trougla ΔABC. Na stranicama AB i AC su date tačke P i Q redom, tako da vrijedi $BP = CQ = BC$. Na pravoj BC su date tačke M i N takve da je poredak tačaka $M - B - C - N$ i vrijedi $MB = BC = CN$. Prave MP i NQ se sijeku u tački S. Dokazati da se težište trougla ΔMNS poklapa sa centrom upisane kružnice trougla ΔABC.

Zadatak 5. Za nekoliko tročlanih skupova kažemo da su *interesantni* ako svaka dva skupa imaju tačno jedan zajednički element, te ne postoji element koji pripada svim skupovima.

a) Dokazati da ne postoji 8 *interesantnih* tročlanih skupova.

b) Postoji li 7 *interesantnih* tročlanih skupova? Odgovor obrazložiti.

Napomena: Po definiciji skupa, elementi skupa su različiti. Tako je npr. skup $\{1,2,1\}$ isti kao skup $\{1,2\}$, pa samim tim skup $\{1,2,1\}$ nije tročlan (nego dvočlan).

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

Kanton Sarajevo

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

17. marta/ožujka 2022.

IX razred

Zadatak 1. U koordinatnoj ravni su date dvije prave. Jednačina prve prave je $y = \frac{9}{7}x + \frac{5}{3}$, a jednačina druge prave je $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. Izračunati površinu trougla kojeg obrazuju ove dvije prave sa y osom.

Zadatak 2. Naći sve parove (x, y) cijelih brojeva x i y koji su rješenja jednačine

$$x^2 - 4y^2 = 4(y - x).$$

Zadatak 3. Neka su a, b i c tri međusobno različita nenulta realna broja takva da je

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Dokazati da je $|abc| = 1$.

Zadatak 4. Unutar trougla ΔABC sa uglovima $\angle BAC = 70^\circ$ i $\angle ABC = 80^\circ$ data je tačka M. Ako je $\angle ACM = 10^\circ$ i $\angle CBM = 20^\circ$, dokazati da je $AB = MC$.

Zadatak 5. "Matematički loto" je igra koja se igra na sljedeći način: igrač označava šest kvadratića na listiću kvadratnog oblika koji se sastoji od 6×6 kvadratića. Zatim se izvlači šest "gubitnih kvadratića". Igrač pobjeđuje ako na svom listu nije označio niti jedan od gubitnih kvadratića. Dokazati da igrač može popuniti devet loto-listića na način da barem jedan od njih bude dobitni listić.

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja. Sretno!

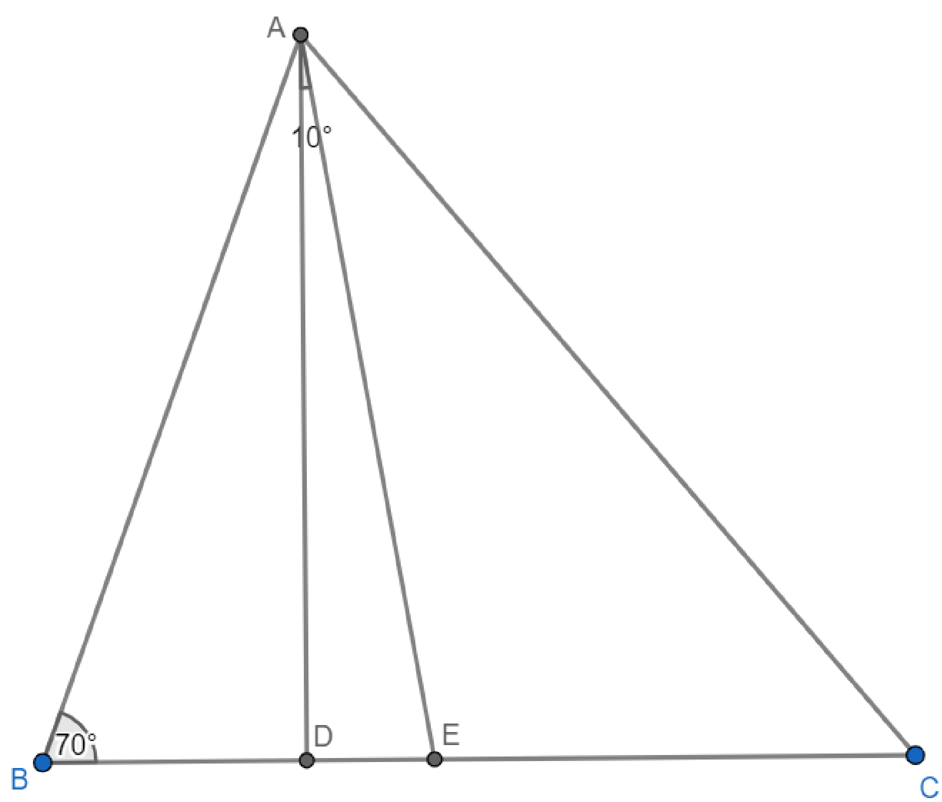
Kanton Sarajevo
KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
17. marta/ožujka 2022.

VII razred

Rješenja

Zadatak 1. U trouglu ABC u kojem je $AB < AC$ ugao kod vrha B iznosi $70°$, a ugao između visine i simetrale unutrašnjeg ugla kod vrha A iznosi $10°$. Izračunati ugao kod vrha C.

Rješenje.



Neka visina iz vrha A siječe stranicu BC u tački D i neka simetrala ugla kod vrha A siječe stranicu BC u tački E. Po uslovu zadatka znamo da je $\angle DAE = 10°$. Imamo da je $\angle BDA = 90°$, pa iz trougla BDA dobijamo da je $\angle BAD = 180° - 70° - 90° = 20°$. Sada je $\angle BAE = 20° + 10° = 30°$. Kako je AE simetrala ugla kod vrha A, to je onda $\angle CAE = \angle BAE = 30°$, tj. dobijamo da je $\angle BAC = 2 \cdot 30° = 60°$. Konačno, imamo da je $\angle BCA = 180° - \angle CBA - \angle CAB = 180° - 70° - 60° = 50°$, tj. ugao kod vrha C iznosi $50°$.

Šema bodovanja:

- uvođenje tačaka D i E: 3 boda
- označavanje ugla $\angle DAE = 10°$: 1 bod
- $\angle BAD = 20°$: 4 boda
- $\angle BAE = 30°$: 2 boda
- zaključak da je $\angle EAC = \angle BAE = 30°$ ili da je $\angle BAC = 2 \cdot \angle BAE = 60°$: 8 bodova
- $\angle BCA = 50°$: 2 boda

Zadatak 2. a) Izračunati vrijednost izraza

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2022}\right)$$

b) Odrediti prirodan broj n tako da vrijedi:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=2022$$

Rješenje. a) Označimo dati izraz sa A. Imamo:

$$A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2022}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\dots\cdot\frac{2020}{2021}\cdot\frac{2021}{2022}$$
$$=(nakon\ skraćivanja\ brojeva\ 2,3,\dots,2021)=\frac{1}{2022}.$$

b) Transformacijom zadane jednadžbe dobivamo

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=2022\Leftrightarrow$$
$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}=2022\Leftrightarrow(nakon\ skraćivanja)$$

$$\frac{n+1}{2}=2022\Leftrightarrow n=4044$$

<u>Šema bodovanja:</u>

a)

- $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2021}{2022}$: 3 boda
- Skraćivanje brojeva 2,3, … ,2021: 4 boda
- Dobijanje rezultata $\frac{1}{2022}$: 1 bod

b)

$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}=500$: 5 bodova

$\frac{n+1}{2}=500$: 6 bodova

$n=999$: 1 bod

Zadatak 3. Naći najmanji četverocifreni broj $\overline{abcd}$ takav da je

a) $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 45$
b) $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 18$

Odgovor detaljno obrazložiti.

Napomena 1: Za cifru a pretpostavljamo da je različita od nule.
Napomena 2: Cifre a, b, c, d ne moraju nužno biti međusobno različite.

Rješenje. a) Imamo da je

$$45 = 9 \cdot 5 = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Ostala rastavljanja broja 45 na četiri faktora ne dolaze u ozbir, jer sadrže faktor veći od 10, a brojevi $a+1, b+1, c+1, d+1$ su najviše 10, pošto su a, b, c, d cifre.

Iz rastava $1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9$ slijedi da su dva od brojeva $a+1, b+1, c+1, d+1$ jednaka 1, da je jedan od tih brojeva jednak 5 i da je jedan od tih brojeva jednak 9.

$a+1$ ne može biti jednako 1 jer bi tada bilo $a = 0$. Tako zaključujemo, u cilju da dobijemo najmanji broj, da je $a+1 = 5$, tj. $a = 4$. Dalje, da bi $\overline{abcd}$ bio najmanji četverocifreni broj s datom osobinom, treba uzeti $b+1 = 1, c+1 = 1$, tj. $b = 0$ i $c = 0$. Ostaje $d+1 = 9$, tj. $d = 8$. Tako smo dobili broj 4008.

Iz rastava $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, sličnim zaključivanjem kao u prethodnom slučaju, dobivamo broj 2024. Taj broj je manji od 4008.
Dakle, najmanji četverocifreni broj sa zadanom osobinom je 2024.

b) Imamo da je

$$18 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 9 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3.$$

Slično kao i pod a, ostala rastavljanja ne dolaze u obzir pošto sadrže faktor veći od 10.

Iz rastava $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6$ dobivamo broj 2005.

Iz rastava $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 9$ dobivamo broj 1008.

Iz rastava $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ dobivamo broj 1022.

Dakle, najmanji četverocifreni broj sa zadanom osobinom je 1008.

Šema bodovanja:

a)

- ispravno zaključivanje svih mogućih slučajeva: 4 boda
- ispravno zaključivanje najmanjeg broja: 4 boda

b)

- ispravno zaključivanje svih mogućih slučajeva: 6 bodova
- ispravno zaključivanje najmanjeg broja: 6 bodova

Zadatak 4. Zenan, Admir i Franjo su otišli u kupovinu. Svako je sebi kupio određen broj krušaka. Kada Zenan pojede $1/4$ svojih, Admir $1/2$ svojih i Franjo $1/5$ svojih krušaka, preostane im jednak broj krušaka. Koliko je krušaka kupio svako od njih, ako je Zenan kupio 10 krušaka više od Franje?

Rješenje. Označimo sa z broj krušaka koje je kupio Zenan, sa a broj krušaka koje je kupio Admir i sa f broj krušaka koje je kupio Franjo.

Iz uvjeta zadatka imamo $z = f + 10$.

Nakon što je Zenan pojeo $1/4$ svojih krušaka, ostalo mu je $\frac{3}{4}z$ krušaka. Nakon što je Admir pojeo $1/2$ svojih krušaka, ostalo mu je $\frac{1}{2}a$ krušaka. Nakon što je Franjo pojeo $1/5$ svojih krušaka, ostalo mu je $\frac{4}{5}f$ krušaka.

Iz

$$\frac{3}{4}z = \frac{4}{5}f$$

imamo $15z = 16f$, tj. $f = \frac{15}{16}z$. Uvrštavanjem u $z = f + 10$ dobivamo

$$z = \frac{15}{16}z + 10,$$

tj.

$$z = 160.$$

Sada je $f = \frac{15}{16} \cdot 160 = 150$.

Iz

$$\frac{4}{5}f = \frac{1}{2}a$$

dobivamo

$$a = \frac{8}{5}f = 240.$$

Dakle, Zenan je kupio 160 krušaka, Admir 240 krušaka, a Franjo 150 krušaka.

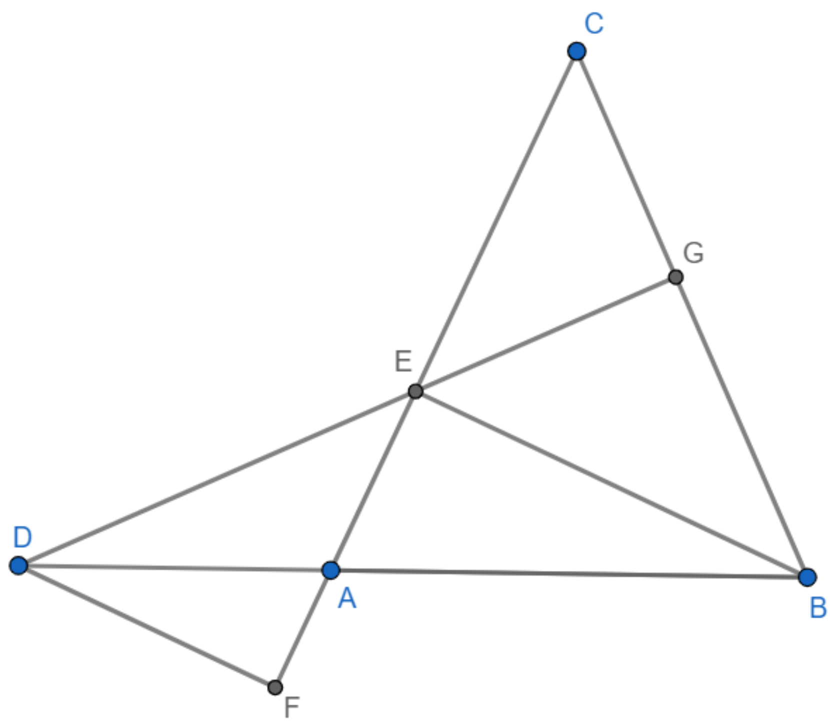
Šema bodovanja:

- zapisivanje uvjeta $z = f + 10$: 1 bod
- zaključak koliko je Zenanu, Admiru i Franji ostalo krušaka: 6 bodova
- dolazak do jednakosti $f = \frac{15}{16} z$ (ili ekvivalentne): 3 boda
- $z = 160$: 3 boda
- $f = 150$: 3 boda
- $a = 240$: 4 boda

Zadatak 5. U jednakokrakom trouglu ΔABC stranica AB je osnovica, a ugao kod vrha C je oštar. Neka je E tačka u kojoj visina iz vrha B siječe stranicu AC i neka je D tačka na produžetku duži BA preko A takva da je DB osnovica jednakokrakog trougla ΔDBE. Neka je F tačka na produžetku CA preko A takva da je prava DF okomita na AC.

a) Dokazati da su prave DE i BC okomite.
b) Dokazati da je $DF = EG$, pri čemu je G presjek pravih DE i BC.

Rješenje.



a) Označimo uglove $\angle CAB = \angle CBA = \alpha$. Tada je $\angle ACB = 180° - 2\alpha$. Kako je $\angle AEB = 90°$, iz trougla ABE dobijamo da je $\angle ABE = 180° - 90° - \angle BAE = 90° - \alpha$. Pošto je DBE jednakokraki trougao, to je $\angle EDB = \angle EBD = 90° - \alpha$. Sada iz trougla DBG imamo $\angle DGB = 180° - \angle GDB - \angle GBD = 180° - (90° - \alpha) - \alpha = 90°$, pa su prave DE i BC okomite, što je i trebalo dokazati.

b) Posmatrajmo trouglove DFE i EGB. Dokazat ćemo da su oni podudarni. Izračunajmo uglove u ta dva trougla. Imamo da je $\angle EBG = \angle EBC = 90° - \angle ECB = 90° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha - 90°$, pa je $\angle BEG = 90° - \angle EBG = 90° - (2\alpha - 90°) = 180° - 2\alpha$. S druge strane, imamo da je $\angle DEF = \angle CEG = 90° - \angle ECG = 90° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha - 90°$, pa je $\angle EDF = 90° - \angle DEF = 180° - 2\alpha$.

Dakle, sada imamo da je $DE = EB, \angle EDF = \angle BEG$ i $\angle DEF = \angle EBG$, pa su po pravilu USU trouglovi DFE i EGB podudarni. Iz toga slijedi da je $DF = EG$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

a)

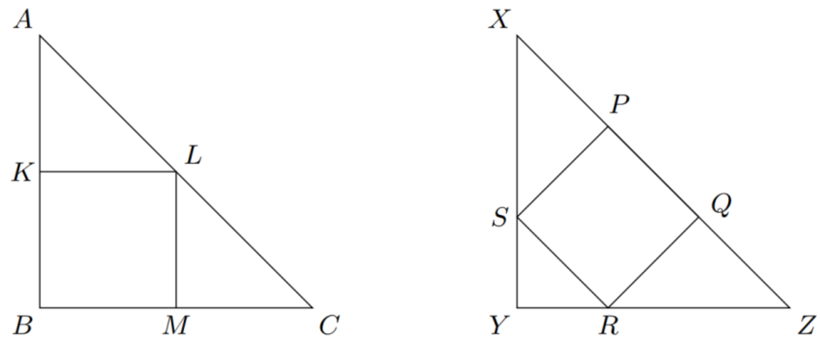
- označavanje uglova $\angle CAB = \angle CBA$: 1 bod
- izračunavanje ugla $\angle EBD$: 2 boda
- $\angle EBD = \angle EDB$: 1 bod
- izračunavanje ugla $\angle EDB$: 2 boda
- posmatranje trougla BDG i izračunavanje $\angle BGD$: 3 boda

b)

- izračunavanje uglova trougla EBG: 3 boda
- izračunavanje uglova trougla DFE: 3 boda
- dokaz da su ta dva trougla podudarna: 4 boda
- konačni zaključak: 1 bod

Rješenja zadataka za VIII razred

Zadatak 1. Neka su ΔABC i ΔXYZ podudarni jednakokrako-pravougli trouglovi (vrijedi $AB = BC = XY = YZ,\ AC = XZ,\ \angle ABC = \angle XYZ = 90°$). Kvadrati $BMLK$ i $RQPS$ su postavljeni kao na slici. Ako je površina kvadrata $BMLK$ jednaka 189, odrediti površinu kvadrata $RQPS$.



Rješenje: Kako su trouglovi ΔABC i ΔXYZ jednakokrako-pravougli, to vrijedi $\angle BAC = \angle BCA = \angle YXZ = \angle YZX = 45°$. Neka su x i y redom dužine stranica kvadrata $BMLK$ i $RQPS$, tj. $BK = KL = LM = MB = x$ i $PQ = QR = RS = SP = y$.

Kako je $\angle AKL = 90°$, a imamo $\angle KAL = 45°$, to je trougao ΔAKL jednakokraki pravougli. Zato je $AK = KL = x$. Sada je $AB = AK + KB = x + x = 2x = BC$. Iz Pitagorine teoreme za trougao ΔABC dobijamo $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (2x)^2 + (2x)^2 = 8x^2$, odakle dobijamo $AC = \sqrt{8x^2} = 2x\sqrt{2}$.
Kako je $\angle SPX = 90°$ i $\angle PXS = 45°$, to je trougao ΔSPX jednakokrako-pravougli, pa je $XP = PS = y$. Analogno zaključujemo da je trougao ΔZQR jednakokraki pravougli, pa je $ZQ = RQ = y$. Sada je $ZX = ZQ + QP + PX = y + y + y = 3y$. Iz $AC = ZX$ dobijamo $2x\sqrt{2} = 3y$, odnosno $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x$. Kako je $P_{BMLK} = 189$, odnosno $x^2 = 189$, imamo $P_{RQPS} = y^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x\right)^2 = \frac{8}{9}x^2 = \frac{8}{9} \cdot 189 = 168$.

Šema bodovanja:

- 1 bod za zaključak $\angle BAC = \angle BCA = \angle YXZ = \angle YZX = 45°$;
- 2 boda za zaključak da je trougao ΔAKL jednakokraki;
- 3 boda za zaključak $AB = 2x$;
- 2 boda za zaključak da su trouglovi ΔSPX i ΔZQR jednakokraki;
- 4 boda za zaključak $ZX = 3y$.
- 5 bodova za dobijanje veze x i y ($y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x$);
- 3 boda za pravilno izračunavanje površine kvadrata $RQPS$.

Zadatak 2. Za realne brojeve a, b, c vrijedi $a + b + c = 0$ i $abc = 4$. Odrediti vrijednost izraza $a^3 + b^3 + c^3$.

Rješenje 1: Iz $a + b + c = 0$ imamo $a + b = -c$. Kubirajući ovu jednakost dobijamo:

$$(a + b)^3 = (-c)^3 \Leftrightarrow$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3 \Leftrightarrow$$
$$a^3 + 3ab(a + b) + b^3 = -c^3 \Leftrightarrow$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(a + b)$$

Kako je $a + b = -c$, to je $-3ab(a + b) = -3ab \cdot (-c) = 3abc = 3 \cdot 4 = 12$, pa je $a^3 + b^3 + c^3 = 12$.

Šema bodovanja:

- 5 bodova za ideju kubiranja relacije $a + b = -c$;
- 3 boda za dobijanje $a^3 + b^3 + c^3 = -3a^2b - 3ab^2$;
- 4 boda ako se izraz $3a^2b + 3ab^2$ zapiše u obliku $3ab(a + b)$;
- 4 boda ako se u $3ab(a + b)$ vrijednost $a + b$ zamijeni sa $-c$.
- 4 boda za pravilan završetak računa.

Rješenje 2: Iz $a + b + c = 0$ imamo $a + b = -c$. Sada dobijamo:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + c^3 = -c(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) + c^3$$
$$= -c((a + b)^2 - 3ab) + c^3 = -c((-c)^2 - 3ab) + c^3$$
$$= -c(c^2 - 3ab) + c^3 = -c^3 + 3abc + c^3 = 3abc = 12.$$

Šema bodovanja:

- 2 boda za rastavljanje $a^3 + b^3$ kao zbira kubova;
- 3 boda za uvrštavanje $a + b = -c$;
- 6 bodova za zapisivanje $a^2 - ab + b^2$ kao $(a + b)^2 - 3ab$;
- 4 boda za zapisivanje druge zagrade u obliku $c^2 - 3ab$;
- 5 bodova za pravilan završetak računanja izraza.

Rješenje 3: Kubiranjem relacije $a + b + c = 0$ dobijamo:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 6abc = 0 \Leftrightarrow$$
$$a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3bc(b + c) + 3ac(a + c) + 6abc = 0 \Leftrightarrow$$
$$a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(-c) + 3bc(-a) + 3ac(-b) + 6abc = 0 \Leftrightarrow$$
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc - 3abc - 3abc + 6abc = 0 \Leftrightarrow$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 12.$$

Šema bodovanja:

- 3 boda za ideju kubiranja relacije $a + b + c = 0$;
- 3 boda za pravilno kubiranje te relacije;
- 5 bodova za grupisanje $3a^2b + 3ab^2$ (kao i ostala dva para), te zapisivanje u obliku $3ab(a + b)$;
- 5 bodova ako se u tim parovima uvrsti $a + b = -c, b + c = -a, a + c = -b$;
- 4 boda za pravilan završetak računanja izraza.

Zadatak 3. Odrediti sve proste brojeve p i q takve da je $p^2 + q^3$ kvadrat prirodnog broja.

Rješenje: Neka je $p^2 + q^3 = x^2$, gdje je x prirodan broj. Imamo $q^3 = x^2 - p^2$, odnosno $q^3 = (x-p)(x+p)$. Očigledno je $x - p > 0$ i $x + p > 0$. Pošto je q prost broj, jedini pozitivni djelioci broja q^3 su $1, q, q^2, q^3$. S druge strane, kako je $x - p < x + p$, to nam preostaju samo sljedeća dva slučaja:

1° $x - p = 1,\ x + p = q^3$

Dobijamo $(x+p) - (x-p) = q^3 - 1$, odnosno

$$2p = (q-1)(q^2+q+1)$$

Djelioci broja $2p$ su $1, 2, p, 2p$ i vrijedi $q - 1 < q^2 + q + 1$, pa su mogući sljedeći slučajevi (jer je $p \geq 2$):

(i) $q - 1 = 1,\ q^2 + q + 1 = 2p$

Iz prve jednačine dobijamo $q = 2$, pa uvrštavanjem u drugu dobijamo $2p = 2^2 + 2 + 1 = 7$, što je nemoguće.

(ii) $q - 1 = 2,\ q^2 + q + 1 = p$

Iz prve jednačine dobijamo $q = 3$, pa uvrštavanjem u drugu dobijamo $p = 3^2 + 3 + 1 = 13$. Kako je $13^2 + 3^3 = 196 = 14^2$, jedno rješenje je $(p, q) = (13, 3)$.

2° $x - p = q,\ x + p = q^2$

Dobijamo $(x+p) - (x-p) = q^2 - q$, odnosno

$$2p = q(q-1)$$

Djelioci broja $2p$ su $1, 2, p, 2p$ i vrijedi $q - 1 < q$, pa su mogući sljedeći slučajevi:

(i) $q - 1 = 1,\ q = 2p$

Iz prve jednačine dobijamo $q = 2$, pa iz druge $2p = 2$, odnosno $p = 1$, što nije rješenje jer 1 nije prost broj

(ii) $q - 1 = 2,\ q = p$

U ovom slučaju dobijamo $p = q = 3$. Kako je $3^2 + 3^3 = 36 = 6^2$, jedno rješenje je $(p, q) = (3, 3)$.

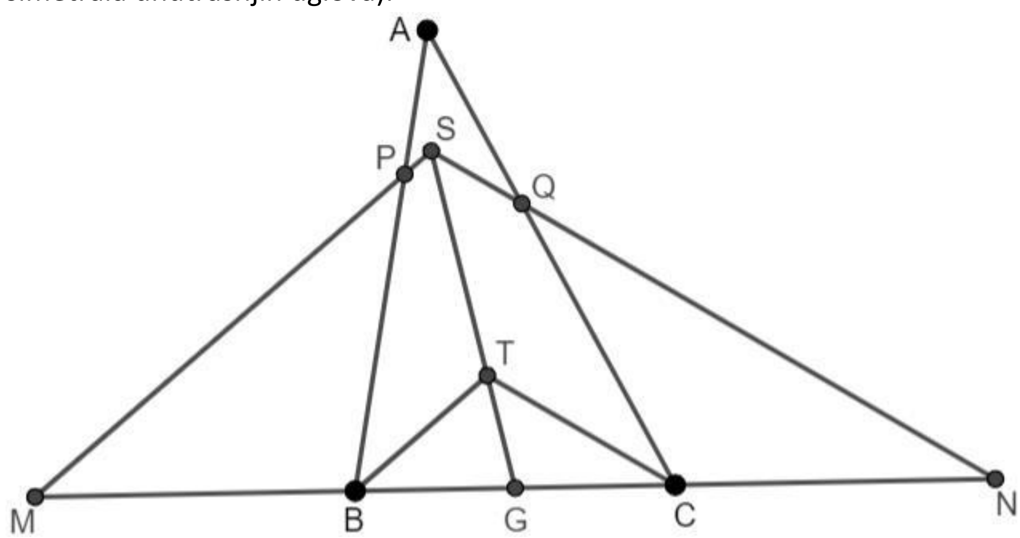
Šema bodovanja:

- 1 bod za faktorizaciju $q^3 = (x-p)(x+p)$;
- 5 bodova za pravilno zaključivanje jedinih mogućih slučajeva za brojeve $x - p$ i $x + p$ (obavezno je napisati da su to jedini slučajevi iz razloga što je q prost broj);
- 2 boda za odbacivanje slučajeva u kojima je $x - p > x + p$ (ili rješavanje tih slučajeva i dobijanje da u njima nema rješenja);
- 6 bodova za rješavanje slučaja $x - p = 1,\ x + p = q^3$;
- 6 bodova za rješavanje slučaja $x - p = q,\ x + p = q^2$.

Zadatak 4. Neka je BC najmanja stranica trougla ΔABC. Na stranicama AB i AC su date tačke P i Q redom, tako da vrijedi $BP = CQ = BC$. Na pravoj BC su date tačke M i N takve da je raspored tačaka $M - B - C - N$ i vrijedi $MB = BC = CN$. Prave MP i NQ se sijeku u tački S. Dokazati da se težište trougla ΔMNS poklapa sa centrom upisane kružnice trougla ΔABC.

Rješenje 1: Kako je $MB = BC = BP$, to je $\angle BMP = \angle BPM$. S druge strane, kako je $\angle ABC$ vanjski ugao trougla ΔMBP, to je $\angle ABC = \angle BMP + \angle BPM = 2 \cdot \angle BMP$, tj. $\angle BMP = \frac{\angle ABC}{2}$. Međutim, to znači da je prava MP paralelna sa simetralom unutrašnjeg ugla kod vrha B trougla ΔABC.

Neka je G sredina stranice BC. Kako je $MB = CN$, to je G i sredina stranice MN. Neka je T težište trougla ΔMNS. Kako težište dijeli svaku težišnicu u omjeru $1:2$, to je T tačka na SG takva da je $\frac{GT}{TS} = \frac{1}{2}$. S druge strane, kako je $BG = \frac{BC}{2}$ i $MB = BC$, to je $\frac{BG}{MB} = \frac{1}{2} = \frac{GT}{TS}$, pa iz obrata Talesove teoreme zaključujemo da je $BT || MS$. Međutim, to znači da je BT ustvari simetrala ugla $\angle ABC$. Analogno pokazujemo da je CT simetrala ugla $\angle BCA$, što znači da je T ustvari centar upisane kružnice trougla ΔABC (jer je centar upisane kružnice ustvari presjek simetrala unutrašnjih uglova).

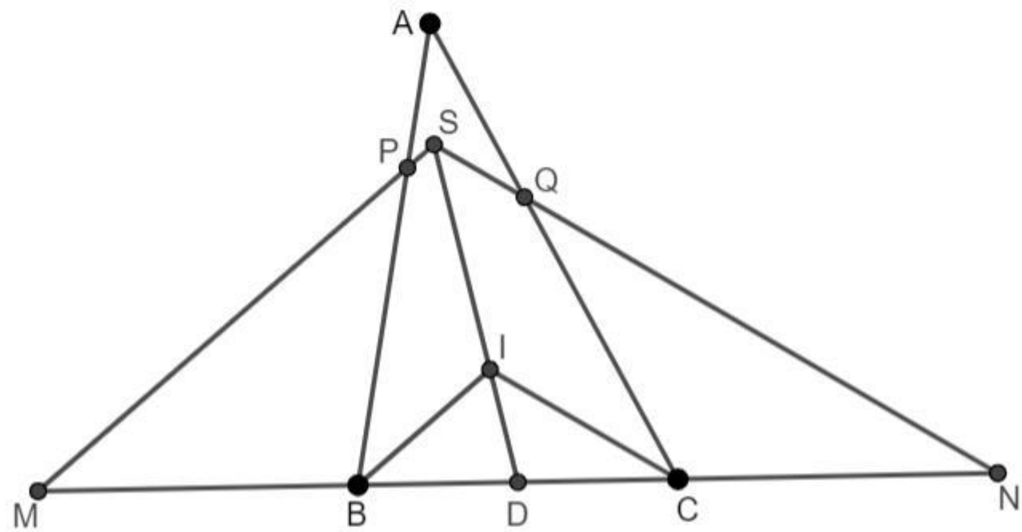


Šema bodovanja

- 2 boda za dobijanje $\angle BMP = \frac{\angle ABC}{2}$;
- 4 boda za zaključak da je prava MP paralelna sa simetralom unutrašnjeg ugla kod vrha B trougla ΔABC;
- 7 bodova za dokaz da je $BT || MP$;
- 3 boda za zaključak da T pripada simetrali unutrašnjeg ugla kod vrha B trougla ΔABC;
- 4 boda za kompletiranje dokaza.

Rješenje 2: Neka je I centar upisane kružnice trougla ΔABC, te neka prava SI siječe BC u D. Kako je $MB = BC = BP$, to je $\angle BMP = \angle BPM$. S druge strane, kako je $\angle ABC$ vanjski ugao trougla ΔMBP, to je $\angle ABC = \angle BMP + \angle BPM = 2 \cdot \angle BMP$, tj. $\angle BMP = \frac{\angle ABC}{2} = \angle IBC$. To znači da je $MP||BI$. Analogno je $NS||CI$.

Sada je iz Talesove teoreme $\frac{BD}{MB} = \frac{DI}{IS} = \frac{DC}{CN}$. Međutim, kako je $MB = CN (= BC)$, to je $BD = DC$, tj. D je sredina stranice BC, a samim tim i sredina duži MN. Sada je $\frac{DI}{IS} = \frac{BD}{MB} = \frac{\frac{BC}{2}}{BC} = \frac{1}{2}$. Dakle, I je tačka na težišnici trougla ΔMNS takva da dijeli težišnicu u omjru $1: 2$, pa je tačka I težište tog trougla, što je i trebalo dokazati.



Šema bodovanja

- 2 boda za dobijanje $\angle BMP = \frac{\angle ABC}{2}$;
- 4 boda za $MP||BI$ i $NS||CI$;
- 8 bodova za dokaz da je D sredina duži MN (6 od ovih 8 bodova se dobija ako se samo konstatuje da je D sredina duži BC);
- 6 bodova za dokaz da je I težište trougla ΔMNS.

Zadatak 5. Za nekoliko tročlanih skupova kažemo da su *interesantni* ako svaka dva skupa imaju tačno jedan zajednički element, te ne postoji element koji pripada svim skupovima.

a) Dokazati da ne postoji 8 *interesantnih* tročlanih skupova.
b) Postoji li 7 *interesantnih* tročlanih skupova? Odgovor obrazložiti.

Napomena: Po definiciji skupa, elementi skupa su različiti. Tako je npr. skup $\{1,2,1\}$ isti kao skup $\{1,2\}$, pa samim tim skup $\{1,2,1\}$ nije tročlan (nego dvočlan).

Rješenje:

a) Pretpostavimo suprotno, da postoji 8 *interesantnih* tročlanih skupova. Neka je jedan od njih $S = \{x, y, z\}$. Kako svaki od preostalih 7 skupova sadrži tačno jedan od elemenata x, y, z, to se po Dirihleovom principu neki od tih elemenata nalazi u bar 3 skupa. Neka je to bez umanjenja opštosti x, te neka se on nalazi u skupovima S_1, S_2, S_3. Kako se x ne nalazi u svim skupovima, to postoji skup koji ne sadrži x, nazovimo ga S_4. Kako skupovi $S, S_1, S_2 S_3$ imaju zajednički element x, to oni nemaju drugih zajedničkih elemenata. S druge strane, svaki od ta četiri skupa ima zajednički element (različit od x) sa S_4. Zbog toga su sva četiri elementa $S \cap S_4, S_1 \cap S_4, S_2 \cap S_4, S_3 \cap S_4$ različita, što je nemoguće jer skup S_4 sadrži samo tri elementa. Dakle, ne postoji 8 *interesantnih* tročlanih skupova.

b) Postoji 7 interesantnih tročlanih skupova. Naime, za skupove $\{A, B, C\}, \{A, D, E\}, \{A, F, G\}, \{B, D, F\}, \{B, E, G\}, \{C, D, G\}, \{C, E, F\}$ vidimo da svaka dva skupa imaju tačno jedan zajednički element, te ne postoji element koji pripada svim skupovima.

Šema bodovanja:

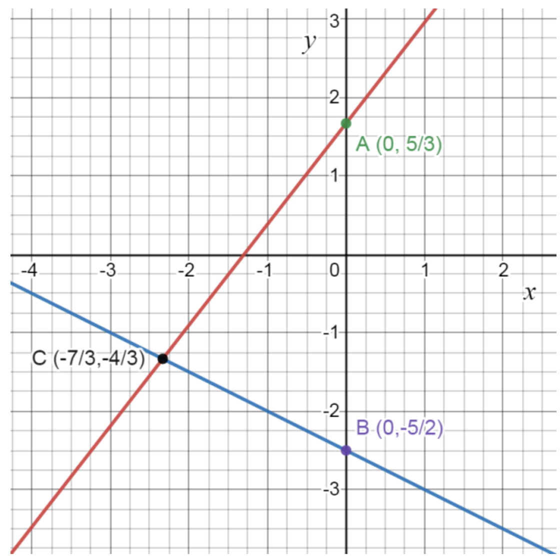
- 14 bodova nosi dio pod a), pri čemu se 4 boda dobijaju za zaključak da postoje četiri skupa koji sadrže isti element (ili ekvivalentno, kad fiksiramo jedan skup, da pored njega postoje tri koja sadrže neki njegov element), dok 10 bodova nosi ostatak dokaza.
- 6 bodova nosi dio pod b).

Rješenja zadataka za IX razred

Zadatak 1. U koordinatnoj ravni su date dvije prave. Jednačina prve prave je $y = \frac{9}{7}x + \frac{5}{3}$, a jednačina druge prave je $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. Izračunati površinu trougla kojeg obrazuju ove dvije prave sa y osom.

Rješenje:
Na slici desno je crvenom bojom nacrtana prava y_1, a plavom bojom prava y_2. Odredimo prvo koordinate tačaka A i B u kojima prave y_1 i y_2 sijeku y osu. Kako se tačke A i B nalaze na y osi, njihova x koordinata je jednaka 0. Dakle, $x_A = x_B = 0$. y koordinate tačaka A i B ćemo dobiti ako u jednačine za y_1 i y_2 uvrstimo $x = 0$. Dobijemo $y_A = \frac{5}{3}$ i $y_B = -\frac{5}{2}$.
Nađimo sada koordinate tačke C u kojoj se sijeku prave y_1 i y_2. Za tačku presjeka vrijedi:

$$y_C = \frac{9}{7}x_C + \frac{5}{3} = -\frac{1}{2}x_C - \frac{5}{2},$$



a ovo je jednačina za koordinatu x_C čije je rješenje $x_C = -\frac{7}{3}$. Za y koordinatu tačke C uvrštavanjem dobijemo $y_C = -\frac{4}{3}$. Dužina stranice AB trougla ABC je jednaka $AB = |y_A| + |y_B| = y_A - y_B = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{25}{6}$. Dužina visine trougla ABC iz vrha C na stranicu AB je ustvari jednaka apsolutnoj vrijednosti x koordinate tačke C. Dakle $h_c = |x_C| = \frac{7}{3}$.
Sada je površina trougla ABC jednaka

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}h_c \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{25}{6} = \frac{175}{36} = 4\frac{31}{36}.$$

Šema bodovanja
- zaključak da je $x_A = x_B = 0$ 1 bod
- izračunavanje y_A i y_B 4 boda
- jednačina iz koje se može odrediti x koordinata tačke C: $\frac{9}{7}x_C + \frac{5}{3} = -\frac{1}{2}x_C - \frac{5}{2}$ 3 boda
- izračunavanje x_C 3 boda
- pronalaženje dužine stranice AB 2 boda
- shvatanje da je dužina visine na stranicu AB jednaka $|x_C|$ 4 boda
- izračunavanje površine P_{ABC} 3 boda
- Napomena: Nije nužno crtanje grafika, ali se može bodovati sa maksimalnih 2 boda ako je učenik nacrtao grafik i nije riješio zadatak do kraja.

Zadatak 2. Naći sve parove (x, y) cijelih brojeva x i y koji su rješenja jednačine

$$x^2 - 4y^2 = 4(y - x).$$

Rješenje:

Jednačina se može napisati u obliku

$$x^2 + 4x = 4y^2 + 4y.$$

Nadopunimo obje strane jednačine na potpun kvadrat

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 4 = (2y)^2 + 2 \cdot 2y + 1 - 1,$$

$$(x + 2)^2 - 4 = (2y + 1)^2 - 1,$$

$$(x + 2)^2 - (2y + 1)^2 = 3.$$

Iskoristimo sada formulu za razliku kvadrata. Dobijemo

$$(x + 2 - 2y - 1) \cdot (x + 2 + 2y + 1) = 3,$$

$$(x - 2y + 1) \cdot (x + 2y + 3) = 3.$$

Budući da su x i y cijeli brojevi i 3 prost broj, razlikujemo četiri slučaja:

1. $x - 2y + 1 = 1$ i $x + 2y + 3 = 3$. Odavde dobijemo $x - 2y = 0$ i $x + 2y = 0$. Sabiranjem ove dvije jednačine dobijemo $2x = 0$, odakle je $x = 0$. Uvrštavanjem $x = 0$ u bilo koju jednačinu sistema dobijemo $y = 0$.
2. $x - 2y + 1 = 3$ i $x + 2y + 3 = 1$. Odavde dobijemo $x - 2y = 2$ i $x + 2y = -2$. Sabiranjem ove dvije jednačine dobijemo $2x = 0$, odakle je $x = 0$. Uvrštavanjem $x = 0$ u bilo koju jednačinu sistema dobijemo $y = -1$.
3. $x - 2y + 1 = -1$ i $x + 2y + 3 = -3$. Odavde dobijemo $x - 2y = -2$ i $x + 2y = -6$. Sabiranjem ove dvije jednačine dobijemo $2x = -8$, odakle je $x = -4$. Uvrštavanjem $x = -4$ u bilo koju jednačinu sistema dobijemo $y = -1$.
4. $x - 2y + 1 = -3$ i $x + 2y + 3 = -1$. Odavde dobijemo $x - 2y = -4$ i $x + 2y = -4$. Sabiranjem ove dvije jednačine dobijemo $2x = -8$, odakle je $x = -4$. Uvrštavanjem $x = -4$ u bilo koju jednačinu sistema dobijemo $y = 0$.

Dakle, sva rješenja naše jednačine su $(x, y) \in \{(0,0),\ (0,-1),\ (-4,-1),\ (-4,0)\}$.

Šema bodovanja

- transformacija date jednačine u oblik $x^2 + 4x = 4y^2 + 4y$ 2 boda
- nadopunjavanje obje strane jednačine na potpun kvadrat, tj. dobijanje izraza $(x + 2)^2 - 4 = (2y + 1)^2 - 1$ 4 boda
- transformacija u oblik $(x + 2)^2 - (2y + 1)^2 = 3$ 1 bod
- korištenje formule za razliku kvadrata, tj. dobijanje izraza $(x - 2y + 1) \cdot (x + 2y + 3) = 3$ 3 boda
- razlikovanje i rješavanje četiri slučaja 10 bodova (4×2,5 bodova)
- Napomena: pogođena rješenja bez postupka se mogu bodovati maksimalno sa 2 boda.

Zadatak 3. Neka su a, b i c tri međusobno različita nenulta realna broja takva da je

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}.$$

Dokazati da je $|abc|=1$.

Rješenje I:

Množenjem sa abc gornja jednakost postaje

$$a^2bc+ac=ab^2c+ab=abc^2+bc.$$

Iz $a^2bc+ac=ab^2c+ab$, $ab^2c+ab=abc^2+bc$ i $a^2bc+ac=abc^2+bc$, rearanžiranjem i faktorisanjem dobijemo

$$abc(a-b)=a(b-c),$$
$$abc(b-c)=b(c-a),$$
$$abc(a-c)=c(b-a).$$

Kako su a, b i c tri različita nenulta realna broja, to imamo da je

$$bc=\frac{b-c}{a-b}, ac=\frac{c-a}{b-c} \ i \ ab=\frac{b-a}{a-c}.$$

Množenjem ovih jednakosti dobijemo da je

$$a^2b^2c^2=\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{c-a}{b-c}\cdot\frac{b-a}{a-c}=1,$$

odakle korijenovanjem slijedi

$$|abc|=1.$$

Šema bodovanja

- množenje jednakosti sa abc 2 boda
- rastavljanje na tri jednakosti $a^2bc+ac=ab^2c+ab$, $ab^2c+ab=abc^2+bc$ i $a^2bc+ac=abc^2+bc$ 3 boda
- dobijanje jednakosti $abc(a-b)=a(b-c), abc(b-c)=b(c-a), abc(a-c)=c(b-a)$ 3 boda
- izražavanje $bc, ac \ i \ ab$ preko količnika 6 bodova (po 2 boda za svaki izraz)
- množenje i dobijanje izraza $a^2b^2c^2=\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{c-a}{b-c}\cdot\frac{b-a}{a-c}=1$ 4 boda
- dobijanje $|abc|=1$ 2 boda

Rješenje II:

Imamo da vrijedi

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}\Rightarrow a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{b-c}{bc},$$
$$a+\frac{1}{b}=c+\frac{1}{a}\Rightarrow a-c=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab},$$
$$b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}\Rightarrow b-c=\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=\frac{c-a}{ac}.$$

Množenjem dobijemo

$$(a-b)(a-c)(b-c)=\frac{b-c}{bc}\cdot\frac{b-a}{ab}\cdot\frac{c-a}{ac}=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{a^2b^2c^2}.$$

Odavde vidimo da mora vrijediti $a^2b^2c^2 = 1$, odakle slijedi da je

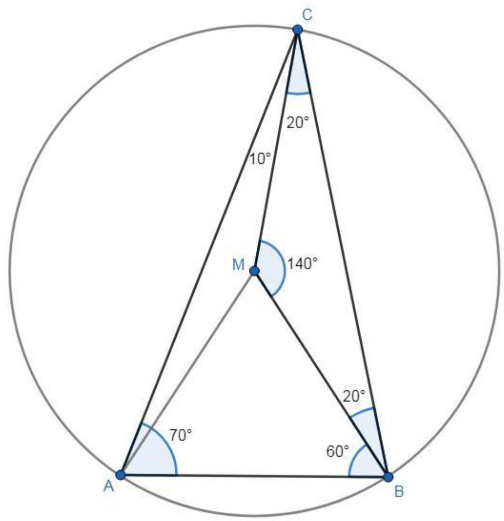
$$|abc| = 1.$$

Šema bodovanja

- rastavljanje na tri jednakosti $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c}, a + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{a}, b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$ 3 boda
- dobijanje izraza $a - b = \frac{b-c}{bc}, a - c = \frac{b-a}{ab}, b - c = \frac{c-a}{ac}$ 6 bodova
- množenje dobijenih jednakosti i dobijanje izraza $(a-b)(a-c)(b-c) = \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{a^2b^2c^2}$ 5 bodova
- izvođenje zaključka da je $a^2b^2c^2 = 1$ 4 boda
- dobijanje $|abc| = 1$ 2 boda

Zadatak 4. Unutar trougla ΔABC sa uglovima $\angle BAC = 70^{\circ}$ i $\angle ABC = 80^{\circ}$ data je tačka M. Ako je $\angle ACM = 10^{\circ}$ i $\angle CBM = 20^{\circ}$, dokazati da je $AB = MC$.

Rješenje:



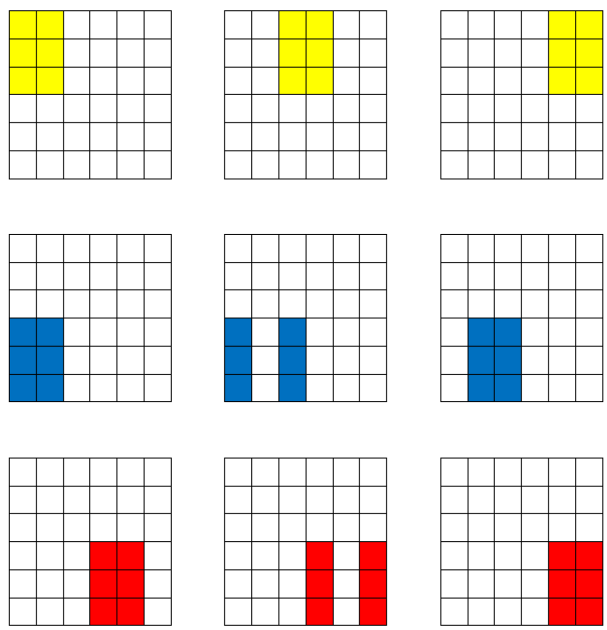
Zbir uglova u trouglu je $180°$, pa je ugao $\angle ACB = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 30°$. Ugao $\angle MCB$ je jednak $\angle MCB = \angle ACB - \angle ACM = 20°$. Pošto je $\angle CBM = \angle MCB = 20^{\circ}$ to je trougao MBC jednakokraki sa jednakim stranicama $MB = MC$. Iz trougla MBC dobijemo ugao $\angle BMC = 180° - \angle CBM - \angle MCB = 140°$. Kako je trougao MBC jednakokraki možemo opisati kružnicu k sa centrom u tački M i poluprečnikom $MB = MC$. Ugao $\angle BMC = 140°$ predstavlja centralni ugao nad tetivom BC. Primijetimo da je ugao $\angle BAC = 70°$ jednak polovini ugla $\angle BMC$. Ovo znači da je ugao $\angle BAC$ periferijski ugao nad tetivom BC, pa tačka A pripada kružnici k. Dakle, k je opisana kružnica trougla ABC. Sada je trougao AMB jednakokraki, jer stranice AM i BM predstavljaju poluprečnike opisane kružnice k. Budući da je ugao $\angle ABM = \angle ABC - \angle CBM = 60°$ to je trougao AMB jednakokraki trougao sa jednim uglom 60°. Iz ovoga direktno imamo da su i ostali uglovi trougla AMB jednaki 60°, pa je trougao AMB ustvari jednakostranični. Iz jednakostraničnosti trougla AMB imamo $AB = MB$, a pošto smo već dokazali da je $MB = MC$, imamo da je $AB = MC$ čime je tražena tvrdnja dokazana.

Šema bodovanja

- izračunavanje ugla $\angle \mathrm{ACB} = 30°$ 1 bod
- izračunavanje ugla $\angle MCB = 20°$ 1 bod
- primijetiti da je trougao MBC jednakokraki 3 boda
- uvođenje kružnice k sa centrom u tački M i poluprečnikom $MB = MC$ 3 boda
- zaključak da je $\angle BAC$ periferijski ugao nad tetivom BC i da tačka A pripada kružnici k 6 bodova
- izračunavanje ugla $\angle ABM = 60°$ 1 bod
- zaključak da je trougao AMB jednakostraničan 3 boda
- zaključak $AB = BM = MC$ 2 boda
- Napomena 1: Nije nužno crtanje slika, ali se može bodovati sa maksimalnih 2 boda ako je učenik nacrtao sliku, označio uglove koji se mogu izračunati, ali nije riješio zadatak do kraja.
- Napomena 2: Ako učenik samo kaže: "Kako je ugao $\angle BMC = 140° = 2 \cdot 70° = 2 \cdot \angle BAC$, to je tačka M centar opisane kružnice trougla ΔABC", bez da napomene da je to zato što je $BM = MC$, dobija samo 1 bod za taj zaključak. Ukoliko su preostali koraci kod učenika dobri (nakon što na pogrešan način zaključi da je M centar opisane kružnice), dobija polovinu bodova na te preostale zaključke.

Zadatak 5. "Matematički loto" je igra koja se igra na sljedeći način: igrač označava šest kvadratića na listiću kvadratnog oblika koji se sastoji od 6×6 kvadratića. Zatim se izvlači šest "gubitnih kvadratića". Igrač pobjeđuje ako na svom listu nije označio niti jedan od gubitnih kvadratića. Dokazati da igrač može popuniti devet loto-listića na način da barem jedan od njih bude dobitni listić.

Rješenje:
Na sljedećoj slici je prikazano kako igrač može popuniti 9 listića tako da sigurno jedan bude dobitni.



Pretpostavimo suprotno, tj. da su svi ovi listići gubitni. Da bi svi listići u prvom redu bili gubitni, moramo potrošiti 3 "gubitna" kvadratića na gornjoj polovini listića (po jednog unutar svakog "žutog" pravougaonika dimenzije 2×3). Tada će 3 preostala "gubitna" kvadratića morati popuniti neka polja u donjoj polovini listića. Prema Dirichletovom principu, bar 2 od preostala 3 "gubitna" kvadratića će biti u donjem lijevom 3×3 ili donjem desnom 3×3 kvadratu. Pretpostavimo da su najmanje dva "gubitna" kvadratića u donjem lijevom 3×3 kvadratu (tako da niti jedan od "plavih" listića nije dobitni), što znači da je najviše 1 "gubitni" kvadratić u donjem desnom uglu 3×3. U ovom slučaju jedan od "crvenih" listića neće imati označen niti jedan "gubitni" kvadratić, jer se "gubitni" kvadratić nalazi u jednoj od 3 kolone. Vrijedi i obrnuto, ako su barem dva "gubitna" kvadratića u donjem desnom uglu 3×3, tada jedan od "plavih" listića neće imati označen niti jedan "gubitni" kvadratić.
Dakle, igrač može popuniti 9 devet loto-listića na način da barem jedan od njih bude dobitni.

Šema bodovanja
- Nalaz konstrukcije koja rješava zadatak bez strogog dokaza da je to zaista rješenje zadatka 10 bodova
- Formalni dokaz da igrač sa tako popunjenim listićima sigurno osvaja dobitak 10 bodova