BILTEN FEDERALNOG TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA 2022. GODINE

Sarajevo, 16.4.2022. godine

Federalno takmičenje iz matematike učenika srednjih škola održano je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu, 16.4.2022. godine. Na takmičenju je učestvovalo 130 učenika koji su odabrani na kantonalnim takmičenjima, kao i na kvalifikacionom takmičenju.

Prisutnima su se na otvaranju najprije obratili dekan Prirodno-matematičkog fakulteta prof. dr. Nusret Drešković i predsjednica Udruženja matematičara Kantona Sarajevo prof. dr. Senada Kalabušić. Ispred Odsjeka za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta se obratio prof. dr. Esmir Pilav, a ispred takmičarske komisije Admir Beširević.

Učenici su pokazali zavidno znanje, te je u svakom razredu bar jedan učenik osvojio minimalo 80% bodova (ukupno 7 učenika). Dvadeset učenika se plasiralo na Matematičku olimpijadu Bosne i Hercegovine, a 12 učenika na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olimpijadu.

Takmičarsku komisiju za sastavljanje zadataka činili su:

1. V. prof. dr. Zenan Šabanac
2. dr. Franjo Šarčević
3. Admir Beširević, MA
4. Harun Hindija, MA

Takmičarsku komisiju za pregledanje radova činili su:

1. dr. Franjo Šarčević
2. Admir Beširević, MA
3. Harun Hindija, MA
4. Abdullah Jašarević, MA
5. Adisa Bolić
6. Amar Kurić
7. Aldin Adilović
8. Emin Mulaimović

ZADACI

I razred

Zadatak 1. a) Faktorisati na linearne faktore izraz

$$-3n^3 - 4n^2 + n + 2.$$

b) Odrediti sve realne brojeve n za koje nejednakost

$$(n^2 - 1) \cdot x < -3n^3 - 4n^2 + n + 2$$

vrijedi za svaki pozitivan realan broj x.

Zadatak 2. Dokazati da ne postoje cijeli brojevi m i n takvi da vrijedi

$$(m + n + 2)^2 = 3(mn + 1).$$

Zadatak 3. U skupu realnih brojeva riješiti jednačinu $\lfloor x \rfloor^5 + \{x\}^5 = x^5$.

Napomena: Sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo cijeli dio broja x, tj. najveći cijeli broj koji nije veći od x. Na primjer: $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor -3.14 \rfloor = -4, \lfloor 3 \rfloor = 3$. Sa $\{x\}$ označavamo razlomljeni dio broja x, tj. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Na primjer: $\{3.14\} = 0.14, \{-3.14\} = 0.86, \{3\} = 0$.

Zadatak 4. Neka je t tangenta u tački B na opisanu kružnicu oštrouglog raznostraničnog trougla ΔABC. Tačka H je ortocentar tog trougla, a K podnožje normale iz H na t. Ako je L sredina stranice AC, dokazati da je trougao ΔBKL jednakokraki.

Zadatak 5. Ploča formata 13×13 je podijeljena na jedinične kvadratiće. Ana na raspolaganju ima beskonačno mnogo figurica formata 1×3, te k L −figurica (L −figurica je figurica koja se dobije kada se iz kvadrata formata 2×2 ukloni neki kvadratić). Figurice se smiju rotirati. Dino i Ana igraju igru. Dino prekriži jedan kvadratić (po svom izboru), a Anin cilj je da poploča ostatak ploče. Prilikom popločavanja figurice se ne smiju preklapati, te ne smiju izlaziti van okvira ploče.

a) Dokazati da za $k = 1$ Dino može prekrižiti neki kvadratić tako da Ana ne može ispuniti cilj.
b) Dokazati da za $k = 2$ Ana može ispuniti svoj cilj bez obzira koji kvadratić Dino prekrižio.

II razred

Zadatak 1. U četverouglu $ABCD$ vrijedi $AB \parallel CD, BC = CD = 10$ i $AD \perp BD$. Neka je S presjek dijagonala AC i BD, a P središte duži BD. Ako je $CP = 8$, odrediti dužine duži PS i DS.

Zadatak 2. Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da je $a < 2b$. Poznato je da se pri dijeljenju broja a sa c dobija ostatak r, pri dijeljenju broja a sa b se dobija ostatak $2r$, a pri dijeljenju broja b sa c se dobija ostatak r. Dokazati da je broj $\frac{a+b}{2}$ prirodan i djeljiv sa c.

Zadatak 3. Za cijele brojeve a, b vrijedi da je broj $a + b$ rješenje jednačine $x^2 + ax + b = 0$. Odrediti maksimalnu vrijednost koju broj b^2 može uzeti.

Zadatak 4. Dat je raznostranični trougao ΔABC. Tačke A_1, B_1, C_1 su redom središta izlomljenih linija $C - A - B, A - B - C, B - C - A$. Prava p_a sadrži tačku A_1 i paralelna je simetrali ugla $\angle CAB$, prava p_b sadrži tačku B_1 i paralelna je simetrali ugla $\angle ABC$, a prava p_c sadrži tačku C_1 i paralelna je simetrali ugla $\angle BCA$. Dokazati da se prave p_a, p_b, p_c sijeku u jednoj tački, te da ta tačka pripada pravoj TI, gdje su T i I redom težište i centar upisane kružnice trougla ΔABC.

Zadatak 5. U jeziku $\mathcal{J}$ svaka riječ je niz slova a i b, i svaka riječ ima barem jedno i najviše 13 slova. Poznato je da se nadovezivanjem dvije riječi jezika $\mathcal{J}$ uvijek dobija riječ koja nije u jeziku $\mathcal{J}$ (drugim riječima, ako su $x_1 x_2 \dots x_m$ i $y_1 y_2 \dots y_n$ riječi iz $\mathcal{J}$, tada $x_1 x_2 \dots x_m y_1 y_2 \dots y_n$ ne pripada $\mathcal{J}$). Koliko najviše riječi može sadržavati jezik $\mathcal{J}$?

III razred

Zadatak 1. Ako je $\sin\alpha + \cos\beta = a$ i $\cos\alpha + \sin\beta = b$, gdje su a i b realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 \neq 0$, izračunati $\sin(\alpha - \beta)$.

Zadatak 2. Dat je špil koji se sastoji od 2022 karte na kojima su napisani brojevi $1,2,\ldots,2022$ (svaki broj se pojavljuje tačno jednom). Mirko i Emil igraju igru. U jednom potezu Mirko odabere kartu sa brojem a iz špila, a potom Emil odabere kartu sa brojem b iz ostatka špila. Emil onda na tablu napiše tačno jedan od trinoma $x^2 - ax + b$ ili $x^2 - bx + a$, po svom izboru. Karte sa brojevima a i b se odstrane iz špila. Ovaj proces se nastavlja sve dok se špil ne isprazni. Emil pobjeđuje ako na kraju svaki trinom napisan na tabli ima cjelobrojna rješenja, a u suprotnom pobjeđuje Mirko. Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

Zadatak 3. Neka je M sredina hipotenuze AB pravouglog trougla ABC. Tačka P je izabrana na kateti CB tako da je $CP: PB = 1: 2$. Prava kroz vrh B siječe duži AC, AP i PM u tačkama X, Y i Z, redom. Dokazati da simetrala ugla $\angle PZY$ prolazi kroz tačku C ako i samo ako simetrala ugla $\angle PYX$ prolazi kroz tačku C.

Zadatak 4. Naći sve prirodne brojeve $n > 1$ takve da brojevi $n, \phi(n)$ i $d(n)$ čine aritmetički niz u nekom poretku, pri čemu je $\phi(n)$ broj prirodnih brojeva manjih ili jednakih od n i relativno prostih sa n, dok je $d(n)$ broj prirodnih djelioca broja n.

Zadatak 5. Za dati prirodan broj n kažemo da je realan broj x n-dobar ako postoji n prirodnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takvih da je

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

Naći sve prirodne brojeve k za koje je sljedeća tvrdnja tačna:

Ako su a i b realni brojevi takvi da zatvoreni interval $[a, b]$ (ovaj interval uključuje i brojeve a i b) sadrži beskonačno mnogo 2022-dobrih brojeva, onda interval $[a, b]$ sadrži bar jedan k-dobar broj.

IV razred

Zadatak 1. Polinom $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ima realne koeficijente i vrijedi $f(2i) = f(2+i) = 0$. Odrediti vrijednost $a + b + c + d$.

Zadatak 2. Da li brojevi $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ i $\sqrt{7}$ mogu biti članovi (ne nužno uzastopni) istog aritmetičkog niza? Obrazložiti.

Zadatak 3. Neopadajući niz $\{a_n\}_{n\geq 1}$ prirodnih brojeva je takav da a_n dijeli n^2 za sve prirodne brojeve n. Ukoliko nisu svi članovi niza jednaki 1, dokazati da vrijedi jedna od sljedeće dvije tvrdnje:

a) Postoji prirodan broj n_1 takav da je $a_n = n$ za sve prirodne brojeve $n \geq n_1$.
b) Postoji prirodan broj n_2 takav da je $a_n = n^2$ za sve prirodne brojeve $n \geq n_2$.

Zadatak 4. Dat je trougao ΔABC i njegova opisana kružnica Γ. Neka je tačka D podnožje visine iz vrha A trougla ΔABC, a tačke M i N sredine stranica AB i AC, redom. Neka je Q tačka na kružnici Γ dijametralno suprotna tački A i neka je tačka E sredina duži DQ. Pokazati da se prave okomite na duži EM i EN u tačkama M i N, redom, sijeku na pravoj AD.

Zadatak 5. U redu se nalazi $n \geq 3$ neobojenih žetona. Igrači A i B igraju igru u kojoj naizmjenično boje po jedan neobojeni žeton u jednu od 3 određene boje. Igrač A počinje prvi i igra završava kada su svi žetoni obojeni. Igrač A pobjeđuje ako postoje 3 susjedna žetona različite boje, a u suprotnom pobjeđuje igrač B. Za koje n igrač A ima pobjedničku strategiju?

Rješenja zadataka i šema bodovanja za I razred

Zadatak 1. a) Faktorisati na linearne faktore izraz

$$-3n^3 - 4n^2 + n + 2.$$

b) Odrediti sve realne brojeve n za koje nejednakost

$$(n^2 - 1) \cdot x < -3n^3 - 4n^2 + n + 2$$

vrijedi za svaki pozitivan realan broj x.

Rješenje: a) Imamo

$$-3n^3 - 4n^2 + n + 2 = -3n^3 - 3n^2 - n^2 - n + 2n + 2$$

$$= -3n^2(n+1) - n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(-3n^2 - n + 2)$$

$$= (n+1)(-3n^2 - 3n + 2n + 2) = (n+1)\big(-3n(n+1) + 2(n+1)\big)$$

$$= (n+1)^2(2 - 3n).$$

b) Datu nejednakost možemo zapisati u obliku

$$(n-1)(n+1) \cdot x < (n+1)^2(2 - 3n).$$

Za $n = -1$, nejednakost se svodi na $0 < 0$, što nije tačno. Za $n = 1$, nejednakost se svodi na $0 < -4$, što također nije tačno, pa je $n \neq \pm 1$. Razlikujemo sada tri slučaja:

1° $n > 1$. Nakon skraćivanja sa $n + 1 > 0$ nejednakost postaje

$$(n-1) \cdot x < (n+1)(2 - 3n).$$

Kako je $n - 1 > 0$, to je ova nejednakost ekvivalentna sa

$$x < \frac{(n+1)(2-3n)}{n-1}.$$

Međutim, za bilo koje n možemo naći pozitivno $x > \frac{(n+1)(2-3n)}{n-1}$, pa tražena nejednakost neće vrijediti za svako pozitivno x.

$2^\circ \ -1 < n < 1$. Nakon skraćivanja sa $n + 1 > 0$ nejednakost postaje

$$(n-1) \cdot x < (n+1)(2-3n).$$

Kako je $n - 1 < 0$, to je ova nejednakost ekvivalentna sa

$$x > \frac{(n+1)(2-3n)}{n-1}.$$

Ova nejednakost će vrijediti za svako pozitivno x ako i samo ako vrijedi $\frac{(n+1)(2-3n)}{n-1} \leq 0$ (jer ako je $\frac{(n+1)(2-3n)}{n-1} > 0$, postojat će pozitivno x manje od $\frac{(n+1)(2-3n)}{n-1}$). Kako je $n + 1 > 0$ i $n - 1 < 0$, posljednja nejednakost će vrijediti za $2 - 3n \geq 0$, tj. $n \leq \frac{2}{3}$. Dakle, u ovom slučaju je rješenje $n \in \left(-1, \frac{2}{3}\right]$.

$3^\circ \ n < -1$. Nakon skraćivanja sa $n + 1 < 0$ nejednakost postaje

$$(n-1) \cdot x > (n+1)(2-3n).$$

Kako je $n - 1 < 0$, to je ova nejednakost ekvivalentna sa

$$x < \frac{(n+1)(2-3n)}{n-1}.$$

Međutim, kao u prvom slučaju zaključujemo da za bilo koje n možemo naći pozitivno x tako da vrijedi $x > \frac{(n+1)(2-3n)}{n-1}$, pa u ovom slučaju nemamo rješenja.

Dakle, sva rješenja su $n \in \left(-1, \frac{2}{3}\right]$.

Šema bodovanja:

- 3 boda za dio pod a), pri čemu učenik dobija 2 boda ako dođe do oblika $(n+1)(-3n^2 - n + 2)$
- 1 bod za pravilno razdvajanje slučajeva za n (potrebno je da se vidi da učenik razumije da je bitno kojeg je predznaka izraz sa kojim će dijeliti)
- 3 boda za rješavanje slučaja $-1 < n < 1$
- 3 boda za rješavanje slučajeva $n > 1$ i $n < -1$, pri čemu slučaj $n > 1$ nosi 1 bod, a slučaj $n < -1$ nosi 2 boda (ova dva slučaja se mogu objediniti ukoliko učenik posmatra slučaj $n^2 > 1$, tj. $|n| > 1$)

Napomena: U dijelu pod b), zaključak da je $n \neq \pm 1$ ne nosi bodove. Međutim, ukoliko učenik ne provjeri te slučajeve, maksimalno može osvojiti 9 bodova

Zadatak 2. Dokazati da ne postoje cijeli brojevi m i n takvi da vrijedi

$$(m+n+2)^2 = 3(mn+1)$$

Rješenje: Pretpostavimo suprotno. Imamo da $3|(m+n+2)^2$, pa $3|m+n+2$, odakle $9|(m+n+2)^2$. Tada vrijedi i $9|3(mn+1)$, odakle slijedi $3|mn+1$. Dakle, vrijedi $3|m+n+2$ i $3|mn+1$.

Iz $3|mn+1$ slijedi da broj mn daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 3. To je moguće samo ako jedan od brojeva m i n daje ostatak 1, a drugi ostatak 2 pri dijeljenju sa 3. Međutim, u tom slučaju broj $m+n+2$ daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 3, što je kontradikcija.

Dakle, pretpostavka da brojevi s datom osobinom postoje dovela je do kontradikcije, pa zaključujemo da oni ne postoje.

Šema bodovanja:

- 1 bod za zaključak da $3|m+n+2$
- 3 boda za zaključak da $3|mn+1$
- 4 boda za zaključak da jedan od brojeva m i n daje ostatak 1, a drugi ostatak 2 pri dijeljenju sa 3
- 2 boda za privođenje dokaza kraju

Zadatak 3. U skupu realnih brojeva riješiti jednačinu $\lfloor x\rfloor^5+\{x\}^5=x^5$.

Napomena: Sa $\lfloor x\rfloor$ označavamo cijeli dio broja x, tj. najveći cijeli broj koji nije veći od x. Na primjer: $\lfloor 3.14\rfloor=3$, $\lfloor -3.14\rfloor=-4, \lfloor 3\rfloor=3$. Sa $\{x\}$ označavamo razlomljeni dio broja x, tj. $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$. Na primjer: $\{3.14\}=0.14, \{-3.14\}=0.86, \{3\}=0$.

Rješenje 1: Imamo $\lfloor x\rfloor^5+\{x\}^5=x^5=(\lfloor x\rfloor+\{x\})^5=\lfloor x\rfloor^5+5\cdot\lfloor x\rfloor^4\cdot\{x\}+10\cdot\lfloor x\rfloor^3\cdot\{x\}^2+10\cdot\lfloor x\rfloor^2\cdot\{x\}^3+5\cdot\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}^4+\{x\}^5$, odakle dobijamo $5\cdot\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}\cdot(\lfloor x\rfloor^3+2\cdot\lfloor x\rfloor^2\cdot\{x\}+2\cdot\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}^2+\{x\}^3)=0$. Kao u prvom rješenju, za $\lfloor x\rfloor=0$ imamo rješenje $x\in[0,1)$, a za $\{x\}=0$ imamo rješenje $x\in\mathbb{Z}$. U suprotnom, imamo da vrijedi $\lfloor x\rfloor^3+2\cdot\lfloor x\rfloor^2\cdot\{x\}+2\cdot\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}^2+\{x\}^3=0$. Ovu jednakost možemo zapisati u obliku $0=\lfloor x\rfloor^3+\{x\}^3+2\cdot\lfloor x\rfloor^2\cdot\{x\}+2\cdot\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}^2=(\lfloor x\rfloor+\{x\})(\lfloor x\rfloor^2-\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}+\{x\}^2)+2\cdot\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}(\lfloor x\rfloor+\{x\})=(\lfloor x\rfloor+\{x\})(\lfloor x\rfloor^2+\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}+\{x\}^2)=x\cdot(\lfloor x\rfloor^2+\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}+\{x\}^2)$. Rješenje $x=0$ smo već dobili, a na dva načina ćemo pokazati da je nemoguće da vrijedi $\lfloor x\rfloor^2+\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}+\{x\}^2=0$.

I način: Imamo $\lfloor x\rfloor^2+\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}+\{x\}^2=\lfloor x\rfloor^2+\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}+\frac{\{x\}^2}{4}+\frac{3}{4}\{x\}^2=\left(\lfloor x\rfloor+\frac{\{x\}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\{x\}^2$. Kako je $\{x\}>0$, prethodni izraz ne može biti jednak nuli.

II način: Datu jednakost možemo zapisati u obliku $(\lfloor x\rfloor+\{x\})^2=\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}$, tj. $x^2=\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}$. Kako je lijeva strana pozitivna i $\{x\}>0$, to mora vrijediti i $\lfloor x\rfloor>0$. Međutim, kako je $x\geq 1$ (jer je $\lfloor x\rfloor\neq 0$), to je $x>\{x\}$, pa kako je $x>\lfloor x\rfloor$ (jer je $\{x\}\neq 0$), to je $x^2>\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}$, što je kontradikcija.

Šema bodovanja:

- 2 boda za dobijanje jednakosti $5\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}\cdot(\lfloor x\rfloor^3+2\cdot\lfloor x\rfloor^2\cdot\{x\}+2\cdot\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}^2+\{x\}^3)=0$
- 1 bod za zaključak da svi cijeli brojevi x (tj. $\{x\}=0$) jesu rješenje zadatka
- 1 bod za zaključak da svi realni brojevi $x\in[0,1)$ (tj. $\lfloor x\rfloor=0$) jesu rješenje zadatka
- 2 boda za svođenje na oblik $\lfloor x\rfloor^2+\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}+\{x\}^2=0$ u slučaju kad je $\{x\}\neq 0$ i $\lfloor x\rfloor\neq 0$ (1 bod ako se samo dođe do oblika $(\lfloor x\rfloor+\{x\})(\lfloor x\rfloor^2+\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}+\{x\}^2)$ i ne zaključi se da je slučaj $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}=0$ već obrađen)
- 4 boda za dokaz da je nemoguće da vrijedi $\lfloor x\rfloor^2+\lfloor x\rfloor\cdot\{x\}+\{x\}^2=0$

Rješenje 2: Imamo

$$\{x\}^5 = x^5 - \lfloor x \rfloor^5 = (x - \lfloor x \rfloor)(x^4 + x^3 \cdot \lfloor x \rfloor + x^2 \cdot \lfloor x \rfloor^2 + x \cdot \lfloor x \rfloor^3 + \lfloor x \rfloor^4)$$

$$= \{x\} \cdot (x^4 + x^3 \cdot \lfloor x \rfloor + x^2 \cdot \lfloor x \rfloor^2 + x \cdot \lfloor x \rfloor^3 + \lfloor x \rfloor^4).$$

Ako je $\{x\} = 0$, tada ova jednakost očigledno vrijedi, pa su svi cijeli brojevi x rješenje jednačine. Za $\{x\} \neq 0$ nakon skraćivanja sa $\{x\}$ dobijamo $\{x\}^4 = x^4 + x^3 \cdot \lfloor x \rfloor + x^2 \cdot \lfloor x \rfloor^2 + x \cdot \lfloor x \rfloor^3 + \lfloor x \rfloor^4$. Za $\lfloor x \rfloor = 0$ je $\{x\} = x$, pa jednakost vrijedi, tj. svi realni brojevi iz intervala $[0,1)$ su također rješenje. S druge strane, za $\lfloor x \rfloor \neq 0$ su brojevi x i $\lfloor x \rfloor$ istog predznaka, pa su svi sabirci u sumi $x^4 + x^3 \cdot \lfloor x \rfloor + x^2 \cdot \lfloor x \rfloor^2 + x \cdot \lfloor x \rfloor^3$ pozitivni, odakle je $\{x\}^4 > \lfloor x \rfloor^4$. Međutim, očigledno je $1 > \{x\}^4$ i $\lfloor x \rfloor^4 \geq 1$, pa je prethodna jednakost nemoguća.

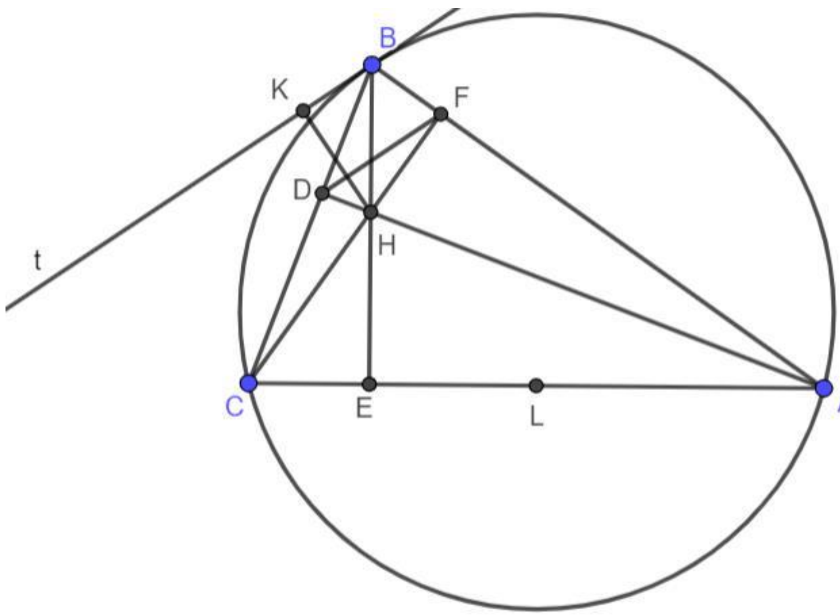
Dakle, rješenja su $x \in \mathbb{Z} \cup (0,1)$.

Šema bodovanja:

- 2 boda za dobijanje jednakosti $\{x\}^5 = \{x\} \cdot (x^4 + x^3 \cdot \lfloor x \rfloor + x^2 \cdot \lfloor x \rfloor^2 + x \cdot \lfloor x \rfloor^3 + \lfloor x \rfloor^4)$
- 1 bod za zaključak da svi cijeli brojevi x (tj. $\{x\} = 0$) jesu rješenje zadatka
- 1 bod za zaključak da svi realni brojevi $x \in [0,1)$ (tj. $\lfloor x \rfloor = 0$) jesu rješenje zadatka
- 1 bod za zaključak da su u suprotnom brojevi x i $\lfloor x \rfloor$ istog predznaka
- 3 boda za zaključak da su svi sabirci u sumi $x^4 + x^3 \cdot \lfloor x \rfloor + x^2 \cdot \lfloor x \rfloor^2 + x \cdot \lfloor x \rfloor^3$ pozitivni
- 2 boda za završetak dokaza

Zadatak 4. Neka je t tangenta u tački B na opisanu kružnicu oštrouglog raznostraničnog trougla ΔABC. Tačka H je ortocentar tog trougla, a K podnožje normale iz H na t. Ako je L sredina stranice AC, dokazati da je trougao ΔBKL jednakokraki.

Rješenje 1: Neka su AD, BE i CF visine trougla ΔABC. Primijetimo da tačke D i F pripadaju kružnici sa prečnikom AC, pa je četverougao $CAFD$ tetivni, odakle je $\angle BDF = 180° - \angle CDF = \angle CAB$. (1) Kako je L centar te kružnice, to je $LF = LD$, tj. tačka L pripada simetrali duži DF. $(*)$

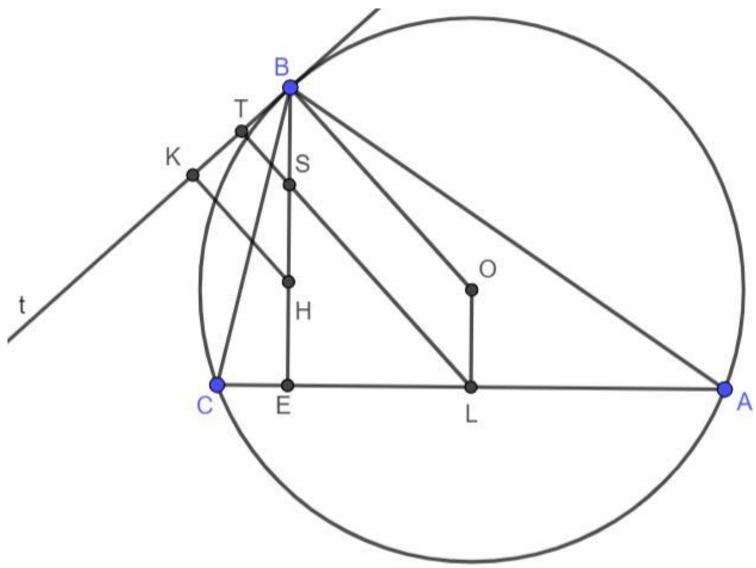


Dalje, primijetimo da tačke D, F, K pripadaju kružnici sa prečnikom BH, odakle je četverougao $DFBK$ tetivni. Međutim, kako po teoremi o uglu između tangente i tetive vrijedi $\angle KBD = \angle CAB = \angle BDF$ (zbog (1)), to je $BK||DF$, tj. četverougao $DFBK$ je trapez. Kako je on pri tome i tetivni, to je jednakokraki trapez. To znači da se simetrale duži BK i DF poklapaju, pa zbog $(*)$ tačka L pripada simetrali duži BK, odakle je $LB = LK$, tj. trougao ΔBKL je jednakokraki, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- 1 bod za zaključak da je $LD = LF$
- 2 boda za zaključak da tačke D, H, F, B, K pripadaju istoj kružnici
- 1 bod za zaključak da je $BK||DF$
- 2 boda za zaključak da je četverougao $DFBK$ jednakokraki trapez
- 4 boda za zaključak da duži KB i DF imaju istu simetralu stranice, te da je zbog toga $LB = LK$ (ili npr. dokazivanje podudarnosti trouglova ΔLFB i ΔLDK)

Rješenje 2: Neka je O centar opisane kružnice trougla ΔABC, a S sredina duži BH. Kako je t tangenta opisane kružnice, to je t okomito na BO. S druge strane, poznato je (a slijedi iz sličnosti troglova BHC i OLM, gdje je M sredina stranice AB), da vrijedi $OL = \frac{BH}{2} = BS$, pa kako su OL i BS paralelne (obje su okomite na AC), to je četverougao $LOBS$ paralelogram. Zbog toga je $LS||OB$, pa je LS okomito na t.



S druge strane, ako je T sredina duži BK, tada je ST srednja linija trougla ΔHBK, pa je $ST||HK$, odakle je ST okomito na t. Dakle, i LS i ST su okomite na t, pa je to ustvari jedna prava, odakle je LT okomito na t. Sada je u trouglu ΔLBK prava LT i težišni i visina, pa je taj trougao jednakokraki, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- 1 bod za uvođenje tačke O i zaključak da je OB okomito na t
- 3 boda za uvođenje tačke S i zaključak da je četverougao $LOSB$ paralelogram (ne dobijaju se bodovi ako se samo navede da vrijedi $OL = \frac{BH}{2}$)
- 1 bod za zaključak da je LS okomito na t
- 3 boda za uvođenje tačke T i dokazivanje da su tačke L, S, T kolinearne (ili ekvivalentno, definisanje tačke T kao presjeka LS sa T i dokazivanje da je T sredina)
- 2 boda za završetak dokaza

Zadatak 5. Ploča formata 13×13 je podijeljena na jedinične kvadratiće. Ana na raspolaganju ima beskonačno mnogo figurica formata 1×3, te k L −figurica (L −figurica je figurica koja se dobije kada se iz kvadrata formata 2×2 ukloni neki kvadratić). Figurice se smiju rotirati. Dino i Ana igraju igru. Dino prekriži jedan kvadratić (po svom izboru), a Anin cilj je da poploča ostatak ploče. Prilikom popločavanja figurice se ne smiju preklapati, te ne smiju izlaziti van okvira ploče.

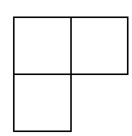
c) Dokazati da za $k = 1$ Dino može prekrižiti neki kvadratić tako da Ana ne može ispuniti cilj.
d) Dokazati da za $k = 2$ Ana može ispuniti svoj cilj bez obzira koji kvadratić Dino prekrižio.

Rješenje: a) Dino će prekrižiti kvadratić označen na slikama. Posmatrajmo bojenje ploče na lijevoj slici. Imamo 57 kvadrata koji su obojeni bojom 1, 56 kvadrata obojenih bojom 3 i 55 kvadratića obojenih bojom 2.

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1		3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	2	1	3		1	3	2	1	3	2
3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1

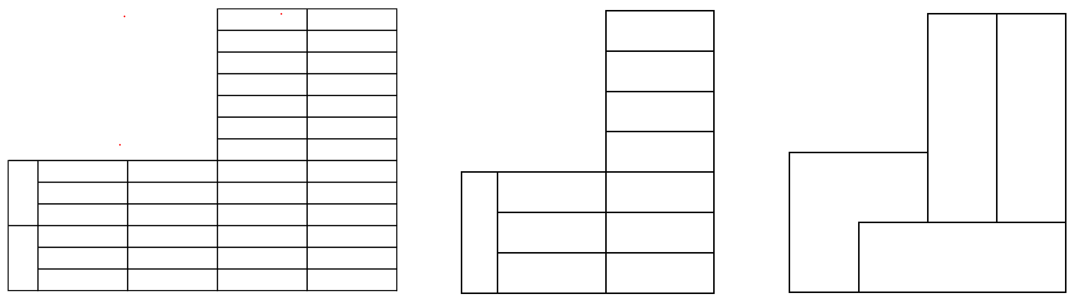
Svaki 3×1 pravugaonik koji stavimo na ploču, prekrit će po jedan kvadratić svake boje. Pošto kvadratića obojenih bojom 1 ima za dva više od onih obojenih bojom 2, a kvadratića obojenih bojom 2 ima za jedan manje od onih bojom 3, znači da ćemo L −figuricom morati pokriti dva kvadratića boje 1, te jedan boje 3. Ovo znači da će L −figurica biti okrenuta na sljedeći način:



Međutim, ako pogledamo desnu sliku, primjećujemo da imamo identičan broj kvadratića obojenih bojama 1, 2, 3 kao i u prethodnom bojenju, što znači da ćemo

L −figuricom opet morati prekriti dva kvadratića boje 1, i jedan boje 3. Međutim, to je nemoguće uraditi ako se L-figurica postavi na način kao u prethodnom bojenju. Dakle, Ana ne može popločati ploču.

b) Posmatrajmo oblik na lijevoj strani sačinjen od 3×1 pravugaonika. On na ploči 13×13 ostavlja prazan kvadrat dimenzija 7×7. Možemo ga zarotirati tako da ne pokriva kvadratić koji je Dino prekrižio.



Posmatrajmo sada oblik u sredini sačinjen od 3×1 pravugaonika. Rotiranjem ovog oblika možemo popločati dio kvadrata dimenzija 7×7 u kojem se ne nalazi prekriženi kvadratić. Na ovaj način nam ostaje kvadrat dimenzija 4×4 koji nije popločan, a sadrži prekriženi kvadratić.

Posmatrajmo sada oblik na desnoj strani sačinjen od tri 3×1 pravugaonika i jedne L −figurice. Popločajmo preostali 4×4 kvadrat ovim oblikom, tako da nam kvadrat koji je prekrižen ostane nepokriven (što opet možemo postići rotacijom). Na ovaj način preostaje kvadrat 2×2 koji sadrži prekriženi kvadratić, što znači da nam preostaje da popločamo samo još dio ploče koji je i dimenzija i oblika kao još jedna preostala L −figurica, koju imamo na raspolaganju. Dakle, u ovom slučaju Ana može popločati ploču.

Šema bodovanja:

Dio pod a) nosi 5 bodova, i to:

- 1 bod za bojenje ploče sa 3 boje i križanje kvadratića koji nije obojen bojom koje je najviše

- 1 bod za zaključak u kojem smjeru mora biti okrenuta L −figurica
- 3 boda za drugo bojenje i dobijanje kontradikcije

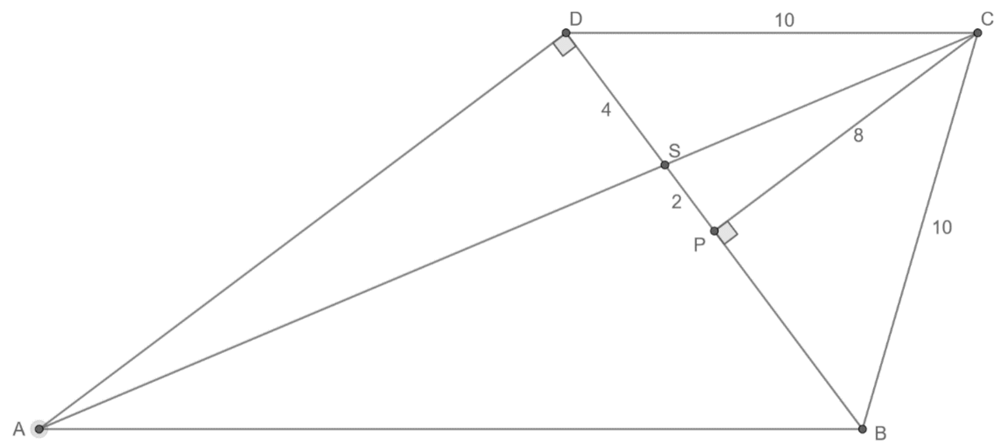
Dio pod b) nosi 5 bodova, i to:

- 2 boda za svođenje na ploču 7×7 koja sadrži prekriženi kvadratić (pri čemu nije iskorištena niti jedna L −figurica)
- 1 bod za svođenje na ploču 4×4 koja sadrži prekriženi kvadratić (pri čemu nije iskorištena niti jedna L −figurica)
- 2 boda za završetak dokaza

Rješenja zadataka i šema bodovanja za II razred

Zadatak 1. U četverouglu $ABCD$ vrijedi $AB \parallel CD, BC = CD = 10$ i $AD \perp BD$. Neka je S presjek dijagonala AC i BD, a P središte duži BD. Ako je $CP = 8$, odrediti dužine duži PS i DS.

Rješenje*:* Kako je trougao ΔBCD jednakokraki, vrijedi $CP \perp BD$. Primjenom Pitagorine teoreme na trougao ΔPCD dobijamo $PD^2 = CD^2 - CP^2 = 10^2 - 8^2 = 36$, pa je $PD = 6$. Dalje, iz $AB \parallel CD$ slijedi $\angle ABD = \angle PDC$ (transverzalni uglovi), što uz $\angle ADB = \angle CPD = 90°$ daje $\Delta ADB \sim \Delta DPC$. Iz posljednje sličnosti imamo $\frac{AD}{CP} = \frac{BD}{PD}$. Kako je P središte duži BD, to je $\frac{BD}{PD} = 2$, pa je i $\frac{AD}{CP} = 2$, odnosno $AD = 16$.



Posmatrajmo trouglove ADS i CPS. Vrijedi $\angle ADS = \angle CPS = 90°$ i $\angle ASD = \angle CSP$ (unakrsni uglovi), pa je $\Delta ASD \sim \Delta CSP$. Odavde slijedi $\frac{DS}{PS} = \frac{AD}{CP} = \frac{16}{8} = 2$, odnosno $DS = 2 \cdot PS$. Iz $DS + PS = PD$ sada dobijamo $3 \cdot PS = 6$, odnosno $PS = 2$ i $DS = 4$.

Šema bodovanja:

- Zaključak $CP \perp BD$: 1 bod
- Izračunavanje dužine duži PD: 1 bod
- Zaključak $\Delta ADB \sim \Delta DPC$ (ili $\Delta ADB \sim \Delta BPC$), te dobivanje odnosa $\frac{AD}{CP}$: 3 boda
- Zaključak $\Delta ASD \sim \Delta CSP$, te dobivanje odnosa $\frac{DS}{PS}$: 3 bodova
- Izračunavanje dužina duži DS i PS: 2 boda

Zadatak 2. Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da je $a < 2b$. Poznato je da se pri dijeljenju broja a sa c dobija ostatak r, pri dijeljenju broja a sa b se dobija ostatak $2r$, a pri dijeljenju broja b sa c se dobija ostatak r. Dokazati da je broj $\frac{a+b}{2}$ prirodan i djeljiv sa c.

Rješenje: Kako broj a pri dijeljenju sa b daje ostatak $2r$, to je $2r < b$ i $a = bq + 2r$, za neko $q \in \mathbb{N}_0$. Međutim, kako je $a < 2b$, to je $q < 2$, pa $q \in \{0,1\}$.

Za $q = 0$ je $a = 2r$. Kako broj a pri dijeljenju sa c daje ostatak r, to je broj $a - r = 2r - r = r$ djeljiv sa c. Međutim, kako se pri dijeljenju b sa c dobija ostatak r, to je $r < c$, odakle slijedi $r = 0$, što je nemoguće zbog $a = 2r$.

Za $q = 1$ je $a = b + 2r$. Sada je $\frac{a+b}{2} = \frac{a+a-2r}{2} = a - r = b + r$, što je prirodan broj djeljiv sa c (jer a daje ostatak r pri dijeljenju sa c, pa je broj $a - r$ djeljiv sa c).

Šema bodovanja:

- 3 boda za zaključak da je $a = 2r$ ili $a = b + 2r$ (tj. da je $q = 0$ ili $q = 1$)
- 4 boda za odbacivanje slučaja $a = 2r$
- 3 boda za rješavanje slučaja $a = b + 2r$

Zadatak 3. Za cijele brojeve a, b vrijedi da je broj $a+b$ rješenje jednačine $x^2+ax+b=0$. Odrediti maksimalnu vrijednost koju broj b^2 može uzeti.

Rješenje: Pošto je $a+b$ rješenje date jednačine, vrijedi: $(a+b)^2+a(a+b)+b=0$ tj.

$$2a^2+3ab+b^2+b=0.$$

Posmatrajmo kvadratnu jednačinu:

$$2x^2+3bx+b^2+b=0.$$

Znamo da je rješenje ove jednačine a. Dakle, ona ima cjelobrojno rješenje što implicira da je njena diskriminanta D potpun kvadrat. Neka je $D=m^2$, gdje je $m \geq 0$.

$$9b^2-8b^2-8b=m^2 \Leftrightarrow$$
$$b^2-8b+16=m^2+16 \Leftrightarrow$$
$$(b-4)^2-m^2=16$$
$$(b-4-m)(b-4+m)=16.$$

Pošto su b i m cijeli brojevi, imamo da su i $b-4-m$ i $b-4+m$ cijeli brojevi. Dalje, iz $m \geq 0$ slijedi $b-4+m \geq b-4-m$, što znači da su mogući sljedeći slučajevi:

$$(b-4-m, b-4+m) \in \{(1,16),(2,8),(\pm 4, \pm 4),(-8,-2),(-16,-1)\}$$

Ako je $b-4-m=1$ i $b-4+m=16$, oduzimanjem ove dvije jednakosti dobijamo $2m=15$, što je nemoguće.
Ako je $b-4-m=-16$ i $b-4+m=-1$, oduzimanjem ove dvije jednakosti dobijemo da je $2m=15$, što je nemoguće.
Ako je $b-4-m=2$ i $b-4+m=8$, oduzimanjem ove dvije jednakosti dobijemo da je $2m=6$, pa je $m=3$ i $b=9$.
Ako je $b-4-m=4$ i $b-4+m=4$, oduzimanjem ove dvije jednakosti dobijemo da je $2m=0$, pa je $m=0$ i $b=8$.
Ako je $b-4-m=-4$ i $b-4+m=-4$, oduzimanjem ove dvije jednakosti dobijemo da je $2m=0$, pa je $m=0$ i $b=0$.
Ako je $b-4-m=-8$ i $b-4+m=-2$, oduzimanjem ove dvije jednakosti dobijemo da je $2m=6$, pa je $m=3$ i $b=-1$.

Dakle, $b \in \{-1,0,8,9\}$, pa je maksimalna vrijednost od b^2 jednaka $9^2=81$.

Šema bodovanja:

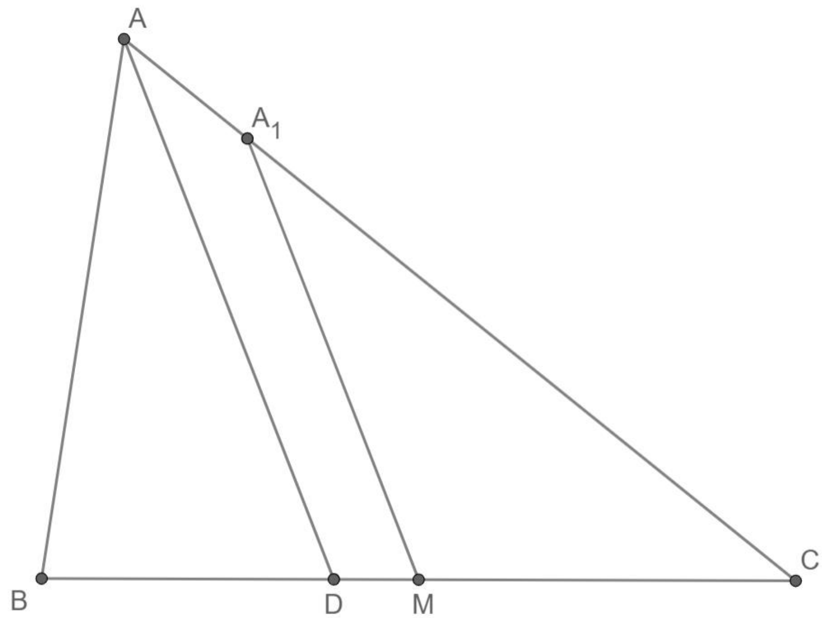
- Uvrštavanje $a+b$ u početnu jednačinu, i sređivanje izraza: 2 boda
- Posmatranje dobijenog izraza kao kvadratnu jednačinu po a: 2 boda
- Zaključivanje da korijen diskriminante od novonastale kvadratne jednačine mora biti nenegativan cijeli broj: 1 boda

- Kvadriranje korijena diskriminante i dodavanje 16 da bi dobili potpun kvadrat: 2 boda
- Faktorisanje razlike kvadrata: 1 bod
- Razmatranje svih slučajeva i dobivanje tačnog rezultata: 2 boda

Napomena: Jednakost $2a^2 + 3ab + b^2 + b = 0$ se može dobiti i primjenom Vijetovih pravila. Također, ta jednačina se može riješiti uvođenjem najvećeg zajedničkog djelioca brojeva a i b, pri čemu je neophodno posebno razmotriti slučajeve $a = 0$ i $b = 0$.

Zadatak 4. Dat je trougao ABC. Tačke A_1, B_1, C_1 su redom središta izlomljenih linija CAB, ABC, BCA. Prava p_a sadrži tačku A_1 i paralelna je simetrali ugla $\angle CAB$, prava p_b sadrži tačku B_1 i paralelna je simetrali ugla $\angle ABC$, te prava p_c sadrži tačku C_1 i paralelna je simetrali ugla $\angle BCA$. Dokazati da se prave p_a, p_b, p_c sijeku u jednoj tački, te da ta tačka pripada pravoj TI, gdje su T i I redom težište i centar upisane kružnice trougla ABC.

Rješenje: Označimo dužine stranica AB, BC, CA trougla ABC redom sa c, a, b. Neka simetrala ugla $\angle CAB$ siječe stranicu BC u D, a prava p_a siječe stranicu BC u M. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo $b \geq c$.



Na osnovu teoreme o simetrali ugla vrijedi $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$, odnosno $BD = \frac{c}{b} \cdot CD$. Imamo

$$BD + CD = AB \Leftrightarrow$$

$$\frac{c}{b} \cdot CD + CD = a \Leftrightarrow$$

$$CD \cdot \frac{b+c}{b} = a \Leftrightarrow$$

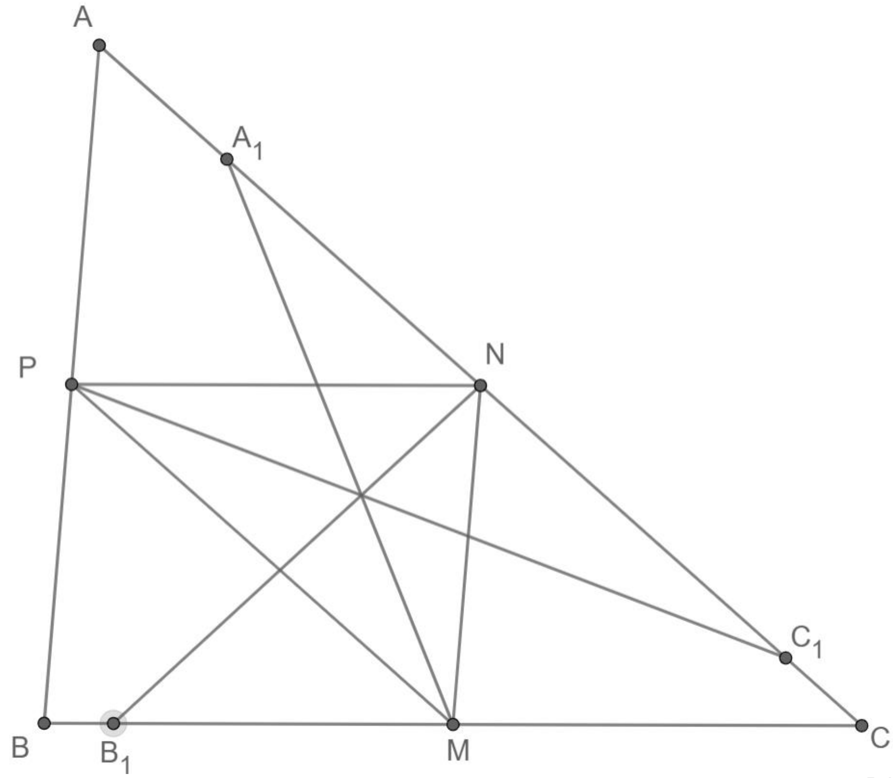
$$CD = \frac{ab}{b+c} \Rightarrow BD = \frac{c}{b} \cdot \frac{ab}{b+c} = \frac{ac}{b+c}$$

S druge strane, kako je A_1 središte izlomljene linije BAC, vrijedi $CA_1 = \frac{BA+AC}{2} = \frac{b+c}{2}$. Sada iz Talesove teoreme ($A_1M \parallel AD$) dobijamo $\frac{CM}{CD} = \frac{CA_1}{CA}$, odnosno

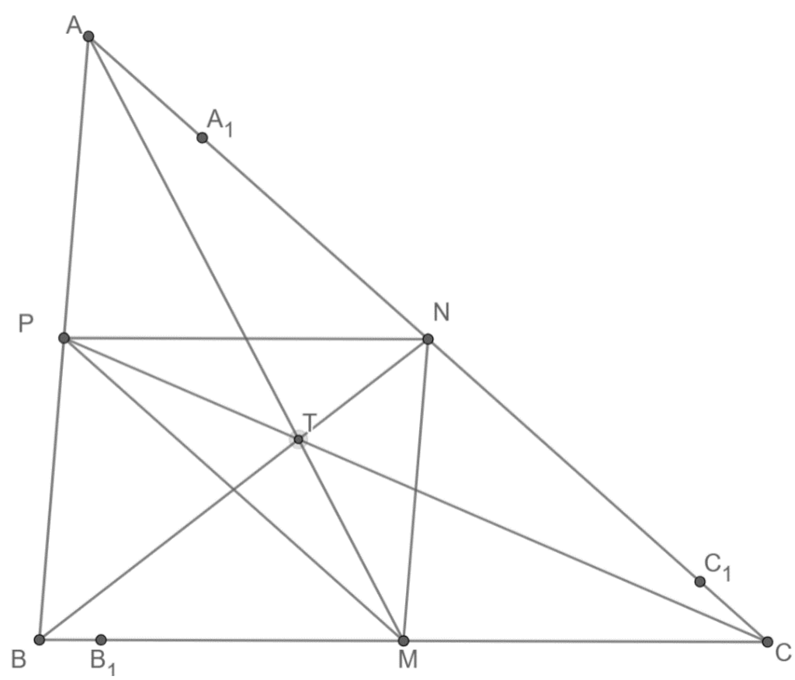
$$CM = CD \cdot \frac{CA_1}{CA} = \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{\frac{b+c}{2}}{b} = \frac{a}{2}$$

Dakle, M je središte stranice BC.

Ukoliko sa N označimo presjek pravih p_b i CA, a sa P presjek pravih p_c i AB, analogno dobijamo da su N i P redom središta stranica CA i AB.



Kako je prava A_1M paralelna simetrali ugla $\angle CAB$, vrijedi $\angle NA_1M = \frac{\angle BAC}{2}$. Zbog $MN \parallel AB$ (MN je srednja linija) vrijedi $\angle MNC = \angle BAC$. Ugao $\angle MNC$ je vanjski za trougao MNA_1, pa je $\angle A_1MN = \angle MNC - \angle MA_1N = \angle BAC - \frac{\angle BAC}{2} = \frac{\angle BAC}{2}$.



Kako iz paralelograma $APMN$ imamo $\angle PMN = \angle PAN = \angle BAC$, to dobijamo da je prava MA_1 simetrala ugla $\angle PMN$. Analogno dobijamo da su prave NB_1 i PC_1 redom simetrale uglova $\angle MNP$ i $\angle NPM$. Zaključujemo, ove tri prave se sijeku u centru upisane kružnice trougla MNP.
Označimo tačku presjeka pravih p_a, p_b, p_c sa S. Pokažimo da ona pripada pravoj TI. Posmatrajmo homotetiju $\mathcal{H}(T, -2)$, gdje je T težište trougla ABC. Poznato je da vrijedi $\frac{AT}{TM} = \frac{BT}{TN} = \frac{CT}{TP} = 2$, pa ova homotetija slika trougao MNP u trougao ABC. Zato centar upisane kružnice trougla MNP slika u centar opisane kružnice trougla ABC, odnosno tačku S slika u tačku I. Zaključujemo da su tačke S i I kolinearne s centrom homotetije, tj. da tačka S pripada pravoj TI.

Šema bodovanja:

- Izražavanje dužina duži BD i CD preko dužina stranica trougla: 1 bod
- Dobivanje relacije $\frac{CM}{CD} = \frac{CA_1}{CA}$: 1 bod
- Zaključak da prave p_a, p_b, p_c polove naspramne stranice: 2 boda
- Zaključak da je p_a simetrala ugla $\angle PMN$ (ili ekvivaletan zaključak): 1 boda
- Zaključak da se p_a, p_b, p_c sijeku u centru upisane kružnice trougla MNP: 2 boda
- Posmatranje homotetije $\mathcal{H}(T, -2)$: 2 bod
- Zaključak da prava TI sadrži tačku presjeka p_a, p_b, p_c: 1 bod

Zadatak 5. U jeziku $\mathcal{J}$ svaka riječ je niz slova a i b, i svaka riječ ima barem jedno i najviše 13 slova. Poznato je da se nadovezivanjem dvije riječi jezika $\mathcal{J}$ uvijek dobija riječ koja nije u jeziku $\mathcal{J}$ (drugim riječima, ako su $x_1x_2 \dots x_m$ i $y_1y_2 \dots y_n$ riječi iz $\mathcal{J}$, tada $x_1x_2 \dots x_m y_1 y_2 \dots y_n$ ne pripada $\mathcal{J}$). Koliko najviše riječi može sadržavati jezik $\mathcal{J}$?

Rješenje: Odgovor je $2^{14} - 2^7$ riječi.

Kako su na raspolaganju dva slova, broj mogućih riječi dužine k je 2^k, pa riječi dužine između 1 i 13 ukupno ima $2^1 + 2^2 + \dots + 2^{13} = 2^{14} - 1$.

Posmatrajmo sve moguće riječi dužine barem između 7 i 13. Njih ukupno ima $2^{14} - 1 - (2^1 + 2^2 + \dots + 2^7) = 2^{14} - 1 - (2^7 - 1) = 2^{14} - 2^7$. Kako se nadovezivanjem dvije riječi dužine barem 7 dobija riječ dužine barem 14, to jezik $\mathcal{J}$ može sadržavati sve ove riječi. Dakle, broj $2^{14} - 2^7$ se može dostići.

Pokažimo sada da je ovaj broj zaista maksimalan mogući broj riječi. Pretpostavimo suprotno, tj. da jezik $\mathcal{J}$ sadrži više riječi . Tada $\mathcal{J}$ sadrži riječ x dužine manje od 7 (jer smo prethodno pokazali da može sadržavati najviše $2^{14} - 2^7$ riječi dužine barem 7). Posmatrajmo parove riječi (y, xy) gdje je y proizvoljna riječ dužine 7, a xy riječ dobijena nadovezivanjem riječi x i y. Ovih parova ima onoliko koliko ima riječi dužine 7, tj. ima ih 2^7. Za svaki ovakav par riječi najviše jedna može biti u jeziku $\mathcal{J}$ (u suprotnom su u jeziku riječi x, y i xy što je kontradikcija s uslovom), tj. barem po jedna riječ iz svakog ovakvog para nije u $\mathcal{J}$. Dakle, u ovom slučaju jezik $\mathcal{J}$ može sadržavati najviše $2^{14} - 1 - 2^7 < 2^{14} - 2^7$ riječi, što je kontradikcija s pretpostavkom da sadrži više od $2^{14} - 2^7$ riječi.

Ovim je pokazano da je traženi najveći broj riječi u jeziku $\mathcal{J}$ jednak $2^{14} - 2^7$.

Šema bodovanja:

- Određivanje broja riječi dužine između 1 i 13: 1 bod
- Navođenje konstrukcije kojom se dostiže $2^{14} - 2^7$ riječi: 2 boda
- Dokaz da je konstrukcija validna: 1 boda
- Tvrdnja da u suprotnom $\mathcal{J}$ sadrži riječ x dužine manje od 7: 1 bod
- Nadovezivanje svih riječi dužine 7 na x: 3 boda
- Kompletiranje dokaza da $\mathcal{J}$ ne može sadržavati više od $2^{14} - 2^7$ riječi: 2 boda

Rješenja zadataka i šema bodovanja za III razred

Zadatak 1. Ako je $\sin\alpha + \cos\beta = a$ i $\cos\alpha + \sin\beta = b$, gdje su a i b realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 \neq 0$, izračunati $\sin(\alpha - \beta)$.

Rješenje: Kvadriranjem zadanih jednakosti dobivamo:

$$a^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$b^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\cos\alpha\sin\beta$$

Sabiranjem gornjih jednakosti, uz primjenu osnovnog trigonometrijskog identiteta, dobivamo

$$2 + 2(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = a^2 + b^2,$$

pa primjenom adicione formule za sinus i dijeljenjem dobivamo:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{a^2 + b^2}{2} - 1$$

Oduzimanjem tih jednakosti, uz primjenu adicione formule za kosinus, formule za kosinus dvostrukog ugla, formule za pretvorbu zbira/razlike u proizvod, činjenice da je sinus neparna funkcija i gore izračunate vrijednosti za $\sin(\alpha + \beta)$, dobivamo:

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2\beta + 2(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = \\
&= \cos 2\beta - \cos 2\alpha + 2\sin(\alpha - \beta) = \\
&= 2\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) + 2\sin(\alpha - \beta) = \\
&= 2\sin(\alpha - \beta)[\sin(\alpha + \beta) + 1] = \\
&= 2\sin(\alpha - \beta)\frac{a^2 + b^2}{2} = \sin(\alpha - \beta)(a^2 + b^2),
\end{aligned}$$

odakle je

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Šema bodovanja:

- kvadriranje zadanih jednakosti: 1 bod
- dobivanje relacije $2 + 2(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = a^2 + b^2$: 1 bod
- izračunavanje $\sin(\alpha + \beta)$: 1 bod
- dobivanje relacije $a^2 - b^2 = \cos 2\beta - \cos 2\alpha + 2\sin(\alpha - \beta)$: 2 boda
- dobivanje relacije $a^2 - b^2 = 2\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) + 2\sin(\alpha - \beta)$: 3 boda
- izračunavanje $\sin(\alpha - \beta)$: 2 boda

Zadatak 2. Dat je špil koji se sastoji od 2022 karte na kojima su napisani brojevi $1,2, \dots ,2022$ (svaki broj se pojavljuje tačno jednom). Mirko i Emil igraju igru. U jednom potezu Mirko odabere kartu sa brojem a iz špila, a potom Emil odabere kartu sa brojem b iz ostatka špila. Emil onda na tablu napiše tačno jedan od trinoma $x^2 - ax + b$ ili $x^2 - bx + a$, po svom izboru. Karte sa brojevima a i b se odstrane iz špila. Ovaj proces se nastavlja sve dok se špil ne isprazni. Emil pobjeđuje ako na kraju svaki trinom napisan na tabli ima cjelobrojna rješenja, a u suprotnom pobjeđuje Mirko. Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

Rješenje: Ako Mirko odabere kartu s brojem a, Emil može odabrati kartu s brojem $b = a + 1$ i formirati trinom

$$x^2 - (a + 1)x + a$$

čije su nule cijeli brojevi a i 1.

Emil također može odabrati kartu s brojem $b = a - 1$ i formirati kvadratni trinom

$$x^2 - ax + a - 1$$

čije su nule cijeli brojevi $a - 1$ i 1.

U svakom koraku, ako je a paran, Emil može odabrati $a - 1$, a ako je a neparan broj, Emil može odabrati $a + 1$. Na taj način osigurava da će u svakom koraku, sve do kraja kada preostanu dvije karte, moći odabrati jednu od dvije karte koje su u špilu bile susjedne karti koju je odabrao Mirko.

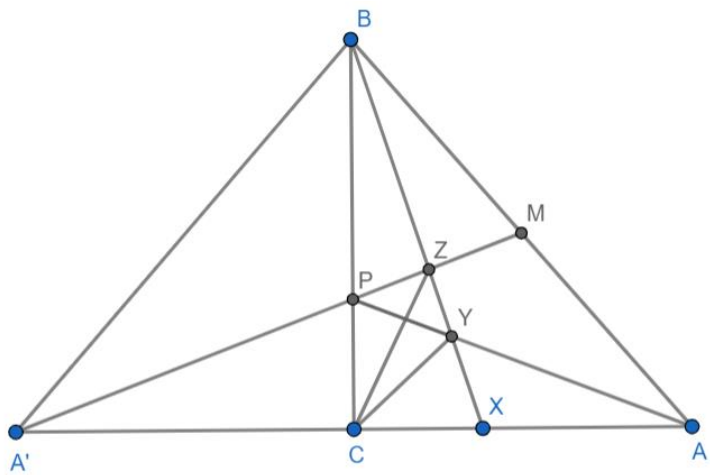
Dakle, Emil ima pobjedničku strategiju.

Šema bodovanja:

- zaključak da ukoliko Mirko odabere broj a, Emil može odabrati brojeve $a + 1$ ili $a - 1$ i formirati kvadratni trinom sa cijelim rješenjima: 6 bodova
- uparivanje brojeva $(2k, 2k - 1)$ i krajnji zaključak: 4 boda

Zadatak 3. Neka je M sredina hipotenuze AB pravouglog trougla ABC. Tačka P je izabrana na kateti CB tako da je $CP: PB = 1: 2$. Prava kroz vrh B siječe duži AC, AP i PM u tačkama X, Y i Z, redom. Dokazati da simetrala ugla $\angle PZY$ prolazi kroz tačku C ako i samo ako simetrala ugla $\angle PYX$ prolazi kroz tačku C.

Rješenje: Primijetimo da je tvrdnja da tačka C leži na simetrali ugla $\angle PZY$ ekvivalentna tome da je C jednako udaljena od pravih ZP i ZY. Slično, tvrdnja da tačka C leži na simetrali ugla $\angle PYX$ je ekvivalnetna tome da je C jednako udaljena od pravih YP i YX. Dokazat ćemo da neovisno od odabira prave BX, tačka C je jednako udaljena od pravih ZP i YP, iz čega će slijediti tvrdnja zadatka (jer ako je C na simetrala ugla $\angle PZY$, to znači da je $d(C, ZP) = d(C, ZY)$, pri čemu je d funkcija udaljenosti tačke od prave, a kako je $d(C, ZP) = d(C, YP)$ dobijamo $d(C, YP) = d(C, YX)$ pa je C i na simetrali ugla $\angle PYX$, a slično vrijedi i u obrnutom smjeru).



Preslikajmo tačku A preko C u tačku A'. Tada je BC težišnica u trouglu $A'AB$, a kako je $BP: PC = 2: 1$, to je tačka P težište ovog trougla. Ovo znači da su tačke A', P i M kolinearne, jer je M sredina stranice AB. Sada, kako su trouglovi $A'CP$ i ACP podudarni (SUS), to je $\angle A'PC = \angle APC$, tj. tačka C leži na simetrali ugla $A'PY$. Međutim, ovo nam govori da je tačka C jednako udaljena od pravih PA' i PY, odnosno pravih PZ i PY, što smo i htjeli dokazati.

Šema bodovanja:

- opažanje da je dovoljno dokazati da je C jednako udaljena od PY i PZ (ili ekvivalentna tvrdnja): 3 boda
- dodavanje tačke A' i dokaz da je P težište trougla BAA': 3 boda
- dokaz da su tačke A', P i M kolinearne: 2 boda
- dokaz da je $\angle A'PC = \angle CPA$ i krajnji zaključak: 2 boda

Zadatak 4. Naći sve prirodne brojeve $n > 1$ takve da brojevi $n, \phi(n)$ i $d(n)$ čine aritmetički niz u nekom poretku, pri čemu je $\phi(n)$ broj prirodnih brojeva manjih ili jednakih od n i relativno prostih sa n, dok je $d(n)$ broj prirodnih djelioca broja n.

Rješenje: Pretpostavimo da ova tri broja čine aritmetički niz. Pošto je očito $n > \phi(n)$ i $n > d(n)$ razlikujemo dva slučaja:

$1°$ poredak u aritmetičkom nizu je $\phi(n) < d(n) < n$, tj. vrijedi $d(n) = \frac{n+\phi(n)}{2}$ $(*)$. Ovo znači da je $d(n) > \frac{n}{2}$. Kako su svi djelioci broja n koji su manji od n, ujedno manji ili jednaki $\frac{n}{2}$, to generalno vrijedi da je $d(n) \leq \frac{n}{2} + 1$. Dakle, vrijedi $\frac{n}{2} < d(n) \leq \frac{n}{2} + 1$, pa mora vrijediti $d(n) = \frac{n}{2} + 1$, tj. n je djeljiv sa svim brojevima $1,2, \dots, \frac{n}{2}$ i n. Ovo nam prvo govori da n mora biti paran. Neka je $n = 2k$. Primijetimo da $n = 2$ ne zadovoljava uslove, jer brojevi 2,2,1 ne čine aritmetičku progresiju. Za $n > 2$, pošto $\frac{n}{2} - 1 = k - 1 | n = 2k$, dobijamo da $k - 1 | 2k - 2(k-1) = 2$, tj. $k - 1 \in \{1,2\}$. Za $k = 2$ dobijamo $n = 4$, a za $k = 3$, dobijamo $n = 6$. Provjerom utvrđujemo da za $n = 4, 6$ brojevi $\phi(n), d(n)$ i n zaista čine aritmetički niz.

$2°$ poredak u aritmetičkom nizu je $d(n) < \phi(n) < n$, tj. vrijedi $\phi(n) = \frac{n+d(n)}{2}$ $(*)$. Neka je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ za proste brojeve $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ i prirodne brojeve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Poznato je (Eulerova funkcija) da je $\phi(n) = (p_1 - 1) \dots (p_k - 1) p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}$. Iz $(*)$ slijedi da je $\phi(n) > \frac{n}{2}$, što nam govori da n mora biti neparan broj (jer ukoliko je $n = 2k$, tada brojevi $2,4, \dots, 2k$ sigurno nisu relativno prosti sa n, pa je $\phi(n) \leq \frac{n}{2}$). Sada iz $2\phi(n) = n + d(n)$ i činjenice da je n neparan broj, zaključujemo da je i $d(n)$ neparan broj, što nam govori da je n potpun kvadrat, tj. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 2$. Poznato je da je $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$, pa $(*)$ postaje:

$$2(p_1 - 1) \dots (p_k - 1) p_1^{\alpha_1 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} + (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

Ovo nam govori da $p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1} | (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$, pa je $p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1} \leq (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$. Međutim, kako za $p_i \geq 3$ (n je neparan) i $\alpha_i \geq 2$ vrijedi $p_i^{\alpha_i - 1} \geq 3^{\alpha_i - 1} \geq \alpha_i + 1$ (zadnja nejednakost vrijedi, jer za $\alpha_i = 2$ je $3 \geq 3$, a povećavanjem α_i za 1, desna strana se poveća za samo jedan, dok se lijeva strana pomnoži sa 3, pa će lijeva strana biti strogo veća od desne), pri čemu jednakost vrijedi samo za $p_i = 3$ i $\alpha_i = 2$ (za $p_i \geq 5$, na početku vrijedi stroga nejednakost $p_i > 3$, pa će vrijediti i za veće α_i, a vidjeli smo da za $p_i = 3$ jednakost vrijedi samo na početku za $\alpha_i = 2$), možemo zaključiti da n smije imati samo jedan prosti djelioc $p_1 = 3$ i da je $\alpha_1 = 2$, tj. $n = 9$. Provjerom utvrđujemo da za $n = 9$ brojevi $d(n), \phi(n)$ i n zaista čine aritmetički niz.

Dakle, brojevi n za koje vrijedi tvrdnja zadatka su $n = 4, 6, 9$.

Šema bodovanja:

- rješavanje prvog slučaja: 4 boda
  - zaključak da $1,2, \ldots, \frac{n}{2}$ moraju dijeliti n: 2 boda
  - zaključak da su jedine mogućnosti $n = 2, 4, 6$: 2 boda
- rješavanje drugog slučaja: 6 bodova
  - dokaz da su n i $d(n)$ neparni brojevi: 1 bod
  - dokaz da su $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 2$: 1 bod
  - dokaz da je $(*)$ moguće jedino za $n = 9$: 4 boda (pri čemu se dodjeljuju parcijalni bodovi ukoliko učenik dobije samo konačno mnogo mogućnosti za n, pri čemu broj bodova može biti od 0 do 4, u zavisnosti od koliko slučajeva učenik dobije)

Napomena: zaključak da je $n > \phi(n)$ i $n > d(n)$ ne nosi bodove, međutim ako učenik ne napomene ovo, najviše može osvojiti 9 bodova.

Zadatak 5. Za dati prirodan broj n kažemo da je realan broj x n-dobar ako postoji n prirodnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n$ takvih da je

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Naći sve prirodne brojeve k za koje je sljedeća tvrdnja tačna:

Ako su a i b realni brojevi takvi da zatvoreni interval $[a, b]$ (ovaj interval uključuje i brojeve a i b) sadrži beskonačno mnogo 2022-dobrih brojeva, onda interval $[a, b]$ sadrži bar jedan k-dobar broj.

Rješenje: Dokazat ćemo da tvrdnja vrijedi za sve $k \geq 2021$. Posmatrajmo sljedeće slučajeve:

$1°$ $k \geq 2022$. Uzmimo proizvoljan 2022-dobar broj $x \in [a, b]$. Imamo da vrijedi $x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2022}}$ za neke prirodne brojeve $a_1, \dots, a_{2022}$. Međutim, onda je i $x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2021}} + \frac{1}{(k-2021)a_{2022}} + \frac{1}{(k-2021)a_{2022}} + \dots + \frac{1}{(k-2021)a_{2022}}$, pri čemu se sabirak $\frac{1}{(k-2021)a_{2022}}$ pojavljuje $k - 2021$ puta. Ovo nam govori da je x ujedno i k-dobar broj.

$2°$ $k \leq 2020$. Posmatrajmo interval $[a, b] = [2021, 2021 + \frac{1}{100}]$. Ovaj interval sadrži beskonačno mnogo 2022-dobrih brojeva (naime, svi brojevi oblika $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} + \frac{1}{n}$, gdje imamo 2021 jedinicu, a n je prirodan broj veći ili jednak 100, su 2022-dobri). Posmatrajmo neki broj $x \in [2021, 2021 + \frac{1}{100}]$. Pretpostavimo da je on k-dobar, tj. $x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}$ za neke prirodne brojeve $a_1, \dots, a_k$. Međutim, imamo da je $x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} \leq 1 + 1 + \dots + 1 = k \leq 2020$, što je kontradikcija. Dakle, nijedno $k \leq 2020$ nema traženu osobinu.

$3°$ $k = 2021$. Po tekstu zadatka postoji beskonačno mnogo 2022-torki $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i2022})$ takvih da je $a \leq S_i = \frac{1}{a_{i1}} + \frac{1}{a_{i2}} + \dots + \frac{1}{a_{i2022}} \leq b$. Usmjerimo brojeve u svakoj ovakvoj 2022-torci, tj. pretpostavimo da je $a_{i1} \leq a_{i2} \leq \dots \leq a_{i2022} (*)$. Posmatrajmo sada beskonačne nizove $a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \dots$ za $k = 1, 2, \dots, 2022$ (tj. posmatramo nizove elemenata na prvoj poziciji u svim 2022-torkama, na drugoj poziciji, itd.). Primijetimo da nije moguće da su svi ovi nizovi ograničeni, jer ako je $a_{ik} \leq N_k$, za svako i i svako $k = 1, 2, \dots, 2022$, onda je 2022-torki $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i2022})$ samo konačno mnogo (najviše $N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_{2022}$), što je kontradikcija. Dakle, postoji broj $1 \leq t \leq 2022$ takav da su nizovi $a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \dots$ za $k = t, t + 1, \dots, 2022$ neograničeni $(**)$ (jer ako je niz

$a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \dots$ neograničen za neko k, onda je on neograničen i za $k+1$, zbog $(*)$, a znamo da je bar jedan od posmatranih nizova neograničen). Posmatrajmo sada sumu $W_i = \frac{1}{a_{i1}} + \frac{1}{a_{i2}} + \cdots + \frac{1}{a_{i(t-1)}}$ (ukoliko je $t=1$, ova suma je zapravo jednaka 0). Imamo da $S_i = W_i + \frac{1}{a_{it}} + \cdots + \frac{1}{a_{i2022}} \in [a,b]$. Ovo nam očito govori da je $W_i \le b$. Međutim, kako sumu $\frac{1}{a_{it}} + \cdots + \frac{1}{a_{i2022}}$ možemo učiniti proizvoljno malom (zbog $(**)$) to mora vrijediti i $W_i \ge a$, jer u suprotnom, ako je $W_i = a - \epsilon$, za neko $\epsilon > 0$, mogli bi uzeti dovoljno velike $a_{it}, \dots, a_{i2022}$ takve da je suma $\frac{1}{a_{it}} + \cdots + \frac{1}{a_{i2022}} < \epsilon$, pa bi imali da je $S_i < a$, što je kontradikcija. Dakle, broj W_i je $(t-1)$-dobar. Sada slično kao i prvom slučaju, za $1 \le t-1 \le 2021$, broj W_i možemo napisati kao $W_i = \frac{1}{a_{i1}} + \frac{1}{a_{i2}} + \cdots + \frac{1}{a_{i(t-1)}} = \frac{1}{a_{i1}} + \frac{1}{a_{i2}} + \cdots + \frac{1}{a_{i(t-2)}} + \frac{1}{(2023-t)a_{i(t-1)}} + \cdots + \frac{1}{(2023-t)a_{i2022}}$ (pri čemu se sabirak $\frac{1}{(2023-t)a_{i(t-1)}}$ pojavljuje $2023-t$ puta), što znači da je W_i 2021-dobar broj iz intervala $[a,b]$. S druge strane, ako je $t-1=0$, tj. $t=1$, imamo da $W_i = 0 \in [a,b]$, pa možemo odabrati dovoljno veliko N tako da broj $T = \frac{2021}{N} = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N}$, također pripada intervalu $[a,b]$ (npr. uzmemo $N = \left\lceil \frac{2021}{b} \right\rceil$). U svakom slučaju, našli smo realan broj koji pripada intervalu $[a,b]$ i koji je 2021-dobar, pa $k = 2021$ također zadovoljava uslove zadatka.

Šema bodovanja:

- rješavanje slučaja $k \ge 2022$: 1 bod
- rješavanje slučaja $k \le 2020$: 2 boda
- rješavanje slučaja $k = 2021$: 7 bodova
  - usmjeravanje 2022-torki i zaključak da počevši od nekad nizovi koji se sastoje od elemenata na istoj poziciji u 2022-torkama moraju biti neograničeni: 4 boda
    (za ovaj dio učenici mogu dobiti parcijalne bodove za slabije, ali slične zaključke)
  - pronalazak broja u intervalu $[a,b]$ koji je t dobar za $2021 \ge t \ge 0$ i krajnji zaključak: 3 boda

Rješenja zadataka i šema bodovanja za IV razred

Zadatak 1. Polinom $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ima realne koeficijente i vrijedi $f(2i)=f(2+i)=0$. Odrediti vrijednost $a+b+c+d$.

Rješenje 1: Koeficijenti polinoma su realni pa kompleksni korijeni dolaze u konjugovano kompleksnim parovima. Zbog toga su pored $2i$ i $2+i$ korijeni polinoma također i njima konjugovano kompleksni $-2i$ i $2-i$.

Pošto je polinom četvrtog stepena (sa vodećim koeficijentom 1), nema drugih korijena osim pomenuta četiri, to se on može napisati kao

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2i)\cdot(x+2i)\cdot\big(x-(2+i)\big)\cdot\big(x-(2-i)\big) \\ &= (x^2+4)\cdot(x^2-4x+5) \end{aligned}$$

$$f(x)=x^4-4x^3+9x^2-16x+20$$

Zbir koeficijenata $a+b+c+d$ je $-4+9-16+20=9$.

Šema bodovanja:

- zaključak da su i $-2i$ i $2-i$ korijeni polinoma (3 boda)
- izražavanje polinoma kao $f(x)=(x-2i)\cdot(x+2i)\cdot\big(x-(2+i)\big)\cdot\big(x-(2-i)\big)$ (3 boda)
- sređivanje izraza i dobijanje $f(x)=x^4-4x^3+9x^2-16x+20$ (2 boda)
- dobijanje koeficijenata a, b, c, d i računanje vrijednosti izraza $a+b+c+d$ (2 boda)

Rješenje 2: Kao u *Rješenju 1* dobijemo da je:

$$f(x)=(x-2i)\cdot(x+2i)\cdot\big(x-(2+i)\big)\cdot\big(x-(2-i)\big)$$

Iz $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ dobijamo da je $f(1)=1+a+b+c+d$, pa je $a+b+c+d=f(1)-1$, odnosno

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= (1-2i)\cdot(1+2i)\cdot\big(1-(2+i)\big)\cdot\big(1-(2-i)\big)-1 \\ &= (1-2i)\cdot(1+2i)\cdot(-1-i)\cdot(-1+i)-1 \\ &= (1^2+2^2)\cdot(1^2+1^2)-1=9 \end{aligned}$$

Šema bodovanja:

- zaključak da su i $-2i$ i $2-i$ korijeni polinoma (3 boda)
- izražavanje polinoma kao $f(x)=(x-2i)\cdot(x+2i)\cdot\big(x-(2+i)\big)\cdot\big(x-(2-i)\big)$ (3 boda)
- zaključak da je $a+b+c+d=f(1)-1$ (2 boda)
- računanje $f(1)-1$ (2 boda)

Zadatak 2. Da li brojevi $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ i $\sqrt{7}$ mogu biti članovi (ne nužno uzastopni) istog aritmetičkog niza? Obrazložiti.

Rješenje: Aritmetički niz se definiše kao $a_n = c + n \cdot d$, gdje su c i d realni brojevi.

Ako su brojevi $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ i $\sqrt{7}$ članovi nekog aritmetičkog niza, onda postoje prirodni brojevi n_1, n_2 i n_3 za koje vrijedi

$$\sqrt{3} = c + n_1 \cdot d,$$

$$\sqrt{5} = c + n_2 \cdot d,$$

$$\sqrt{7} = c + n_3 \cdot d.$$

Ako od drugog izraza oduzmemo prvi, a od trećeg izraza oduzmemo drugi, dobijemo

$$\sqrt{5} - \sqrt{3} = (n_2 - n_1) \cdot d,$$

$$\sqrt{7} - \sqrt{5} = (n_3 - n_2) \cdot d.$$

Dijeljenjem dobijenih izraza dobijemo

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{n_3 - n_2}{n_2 - n_1}.$$

Ovo bi značilo da je $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ racionalan broj.

Dokazaćemo da je $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ iracionalan broj. Prvo ćemo racionalizovat nazivnik

$$\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{35} + \sqrt{21} - 5 - \sqrt{15}}{2}.$$

Sada moramo dokazati da je $\sqrt{35} + \sqrt{21} - \sqrt{15}$ iracionalan broj. Pretpostavimo da je on racionalan broj, tj.

$$\sqrt{35} + \sqrt{21} - \sqrt{15} = q \in \mathbb{Q}.$$

Napisat ćemo ovu jednakost na drugi način i kvadrirati

$$\sqrt{7} \cdot \left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right) = q + \sqrt{15},$$

$$7 \cdot \left(8 + 2\sqrt{15}\right) = q^2 + 2q\sqrt{15} + 15.$$

Sređivanjem dobijemo

$$56 - 15 - q^2 = \sqrt{15} \cdot (2q - 14).$$

Lijeva strana jednakosti je racionalan broj, a desna je racionalan samo ako je $q = 7$. Međutim, tada ne vrijedi jednakost. Kontradikcija! Ovo znači da je $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ iracionalan broj, a samim tim brojevi $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ i $\sqrt{7}$ ne mogu biti članovi nekog aritmetičkog niza.

Šema bodovanja:

- izraziti brojeve $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ i $\sqrt{7}$ kao članove aritmetičkog niza $\sqrt{3} = c + n_1 \cdot d$, $\sqrt{5} = c + n_2 \cdot d$ i $\sqrt{7} = c + n_3 \cdot d$ (2 boda)
- dobijanje izraza $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{n_3-n_2}{n_2-n_1}$ (2 boda)
- posmatranje racionalnosti izraza $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (1 bod)
- dokaz da je $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ iracionalan broj (5 bodova)

Zadatak 3. Neopadajući niz $\{a_n\}_{n\geq 1}$ prirodnih brojeva je takav da a_n dijeli n^2 za sve prirodne brojeve n. Ukoliko nisu svi članovi niza jednaki 1, dokazati da vrijedi jedna od sljedeće dvije tvrdnje:

c) Postoji prirodan broj n_1 takav da je $a_n = n$ za sve prirodne brojeve $n \geq n_1$.
d) Postoji prirodan broj n_2 takav da je $a_n = n^2$ za sve prirodne brojeve $n \geq n_2$.

Rješenje: Primijetimo da za proste brojeve p vrijedi $a_p = 1, a_p = p$ ili $a_p = p^2$. Budući da nisu svi članovi niza 1 i niz je neopadajući, za sve proste brojeve p veće od nekog t vrijedi $a_p = p$ ili $a_p = p^2$. Dokažimo sada da ako je $a_k > k$ za neki prirodan broj k, tada je i $a_{k+1} > k+1$. Da bi to dokazali dovoljno je dokazati da vrijedi $a_{k+1} > a_k$. Ako to ne bi vrijedilo, onda je $a_k = a_{k+1}$, pa a_k dijeli i k^2 i $(k+1)^2$, zbog čega dijeli i $nzd(k^2, (k+1)^2\ ) \ =\ 1$, što je nemoguće. Dakle, $a_{k+1} > k+1$. Sada je i $a_t > t$ za sve $t > k$, pa je i $a_p = p^2$ za sve proste $p > k$. Sada primijetimo da ako je $a_n = n^2$ da je tada $\frac{(n+1)^2}{a_{n+1}} < \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$. Za $n > 2$ vrijedi $\frac{(n+1)^2}{a_{n+1}} < 2$, pa je $\frac{(n+1)^2}{a_{n+1}} = 1$ (jer je $\frac{(n+1)^2}{a_{n+1}}$ prirodan broj). Dakle, vrijedi $a_t = t^2$ za sve $t \ \geq\ p$, što je i trebalo dokazati. Ostaje slučaj kada za sve k vrijedi $a_k \ \leq\ k$. To znači da je $a_p = p$ za sve proste p veće od nekog t. Već smo dokazali da nikoja dva susjedna člana nisu jednaka, pa za svaka dva prosta $p < q$ veća od t vrijedi $p = a_p < a_{p+1} <\ldots< a_q = q$. Ovo znači da je $a_i = i$ za sve članove između. Kako ovo vrijedi za proizvoljna dva prosta broja, a prostih brojeva ima beskonačno mnogo, zaključujemo da je $a_i = i$ počevši od nekog člana.

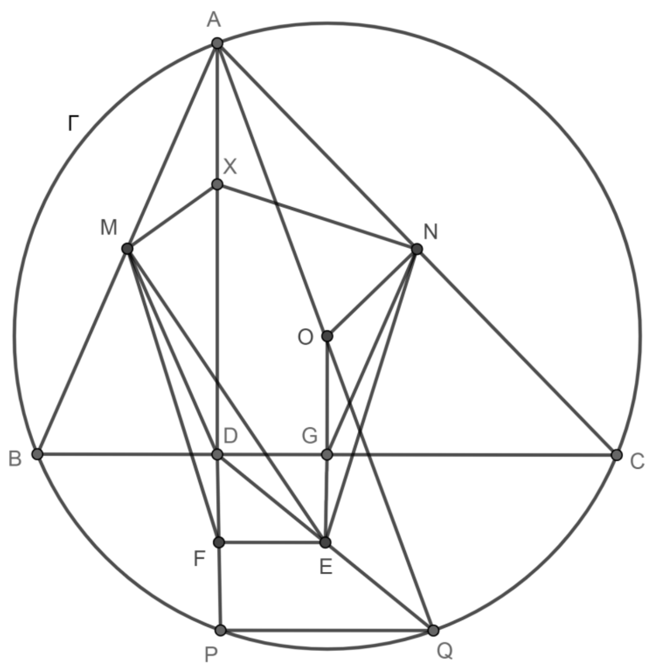
Šema bodovanja:

- $a_p = 1, a_p = p$ ili $a_p = p^2$ za sve proste p (1 bod)
- $a_n = n^2 \ \Rightarrow\ a_{n+1} = (n+1)^2$ (4 boda)
- $a_p = p^2$ za neko prosto $p \Rightarrow a_n = n^2$ za sve veće n (1 bod)
- $a_k < a_{k+1}$ za sve k kad je a_k > 1 (1 bod)
- $a_p = p$ za sve proste p počevši od nekog $\Rightarrow a_n = n$ za sve n počevši od nekog (3 boda)

Zadatak 4. Dat je trougao ΔABC i njegova opisana kružnica Γ. Neka je tačka D podnožje visine iz vrha A trougla ΔABC, a tačke M i N sredine stranica AB i AC, redom. Neka je Q tačka na kružnici Γ dijametralno suprotna tački A i neka je tačka E sredina duži DQ. Pokazati da se prave okomite na duži EM i EN u tačkama M i N, redom, sijeku na pravoj AD.

***Rješenje*.**

Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je $AB < AC$. Produžimo visinu AD do presjeka P sa opisanom kružnicom Γ. Označimo sa F sredinu duži DP. Ugao $\measuredangle APQ$ je ugao nad prečnikom AQ kružnice Γ, pa je $\measuredangle APQ = 90°$. Sada je $PQ \parallel BC$ jer je i ugao $\measuredangle ADC = 90°$.



Duž FE je srednjica trougla ΔDPQ, pa je $FE \parallel PQ$, odnosno $FE \parallel BC$. Centar O kružnice Γ je sredina prečnika AQ, pa je EO srednjica trougla ΔADQ, odakle je $EO \parallel AD$. Budući da je $AD \perp BC$, to je i $OE \perp BC$, pa je OE simetrala stranice BC (zbog toga što je O centar opisane kružnice Γ). Ako sa G označimo presjek OE i BC, tačka G će biti sredina stranice BC. Dokazali smo da je $GE \perp DG$, kao i da je $GE \parallel DF$ i $FE \parallel DG$, pa je četverougao $FEGD$ pravougaonik. Iz pravougaonika $FEGD$ imamo $FD = EG$.

Duž GN je srednjica trougla ΔABC, pa je $GN = \frac{AB}{2}$ i $\measuredangle CGN = \measuredangle CBA$. Tačka M je, kao središte hipotenuze trougla ΔABD, centar opisane kružnice oko trougla ΔABD. Iz toga je $DM = BM = \frac{AB}{2}$, kao i $\measuredangle MDB = \measuredangle DBM = \measuredangle CBA$.

Primijetimo da su trouglovi ΔMDF i ΔNGE podudarni, jer je $GN = DM$, $FD = EG$ i $\measuredangle NGE = \measuredangle CGN + 90° = \measuredangle CBA + 90° = \measuredangle MDB + 90° = \measuredangle MDF$. Odavde je $FM = EN$. Duži MN i FE su srednjice trouglova ΔABC i ΔDPQ, redom, i obje su paralelne stranici BC, pa je $FE \parallel MN$. Sada iz $FM = EN$ i $FE \parallel MN$ imamo da je četverougao $MFEN$ jednakokraki trapez, a samim tim i tetivni četverougao.

Definišimo tačku X kao presjek opisane kružnice oko tetivnog četverougla $MFEN$ i prave AF. Kako je $\measuredangle EFX = 90°$, to je EX prečnik kružnice opisane oko četverougla $MFEN$. Sada su uglovi $\measuredangle ENX$ i $\measuredangle EMX$, kao uglovi nad prečnikom EX, jednaki $90°$. Ovo upravo znači da se prave okomite na duži EM i EN u tačkama M i N, redom, sijeku u tački X na pravoj AD.

Šema bodovanja:

- dokaz da je četverougao $FEGD$ pravougaonik (2 boda)
- dokaz da su trouglovi ΔMDF i ΔNGE podudarni (3 boda)
- zaključak da je četverougao $MFEN$ tetivni (3 boda)
- zaključak da je EX prečnik kružnice opisane oko $MFEN$ i da je presjek pravih okomitih na duži EM i EN u tačkama M i N, redom, upravo tačka X (2 boda)

Zadatak 5. U redu se nalazi $n \geq 3$ neobojenih žetona. Igrači A i B igraju igru u kojoj naizmjenično boje po jedan neobojeni žeton u jednu od 3 određene boje. Igrač A počinje prvi i igra završava kada su svi žetoni obojeni. Igrač A pobjeđuje ako postoje 3 susjedna žetona različite boje, a u suprotnom pobjeđuje igrač B. Za koje n igrač A ima pobjedničku strategiju?

Rješenje: Za $n \leq 4$ drugi igrač pobjeđuje ponavljajući boju prvog iz prethodnog poteza, bojeći bilo koji žeton.

Primijetimo da za $n = 5$ pobjeđuje prvi igrač. Igrač A u prvom potezu oboji prvi žeton u neku boju. Ako drugi igrač oboji 3. ili 4. žeton on oboji drugi od ta dva u drugu boju i tada su dva susjedna različite boje i oba susjedna njima su neobojena. Prvi će onda u sljedećem potezu obojiti jedan od dva susjedna u treću boju i pobijediti. Ako drugi igrač oboji 2. žeton, prvi će obojiti 5. žeton u drugačiju boju. Tada drugi treba obojiti 3. ili 4. i prvi će moći obezbijediti da su ili 2., 3. i 4. različite boje ili 3., 4. ili 5. različite boje (jer će žeton koji drugi odigra biti drugačiji ili od 2. ili od 5.). Ako drugi igrač oboji 5. žeton, tada prvi boji 2. u drugačiju boju i imamo istu situaciju.

Primijetimo da za parno n pobjeđuje drugi igrač (posmatranje slučaja $n = 6$ može pomoći da se primijeti). Drugi igrač podijeli sve žetone u parove susjednih (1. i 2., 3. i 4., …). Kad god A oboji jedan žeton nekog para, B oboji drugi u istu boju. Na kraju će u svaka tri susjedna biti neka dva susjedna iste boje, pa pobjeđuje B.

Sada primijetimo da se strategija A za $n = 5$ može generalizovati za sve neparne. A oboji 1. žeton u prvom potezu, ako B. oboji bilo koji osim 2. i zadnjeg, A boji susjedni u drugu boju tako da su s obje strane neobojeni žetoni susjedi. Tada A u sljedećem potezu može pobijediti. Ako B oboji 2., A će obojiti 5. i bojit će razne žetone osim 3. i 4. bilo kojim bojama dok B ne oboji jedan od njih. B će morati prvi obojiti jer ako samo ta dva susjedna ostanu neobojena, on će biti na potezu. Tada A pobjeđuje kao i za $n = 5$. Slučaj kada B oboji zadnji žeton je analogan (tada će A obojiti 4. od kraja).

Šema bodovanja:

- Dokaz za bilo koje $n \geq 5$ (1 bod)
- Dokaz za sve parne n (4 boda)
  - Uparivanje u susjedne žetone (1 bod od ova 4)
- Dokaz za sve neparne n (5 bodova)
  - Dovoljno je prvom igraču da napravi dva susjedna različite boje kojima su susjedi neobojeni (1 od 5 bodova)

Konačni rezultati federalnog takmičenja iz matematike učenika I razreda

Rang	Ime i prezime	Škola	1	2	3	4	5	Ukupno
1	Benjamin Mujkić	Druga gimnazija Sarajevo	10	10	10	10	10	50
2	Abdullah Fehratbegović	Druga gimnazija Sarajevo	9	10	10	10	1	40
3	Isa Švrakić	Druga Gimnazija Sarajevo	10	10	7	10	1	38
4	Vedad Kozica	Druga gimnazija Sarajevo	10	10	10	0	1	31
5	Faruk Ibrahimović	Druga gimnazija Sarajevo	9	10	10	1	0	30
6	Ajša Borovina	Druga gimnazija Sarajevo	5	10	7	0	5	27
7	Senada Zaketović	Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	6	10	4	2	0	22
7	Sara Smajić	Richmond Park International School Sarajevo	8	9	4	1	0	22
9	Ines Jozić	Druga gimnazija Sarajevo	6	10	3	1	0	20
10	Muhamed Numanović	Behram-begova medresa u Tuzli	4	10	1	0	0	15
11	Fatih-Efe Memišević	Druga Gimnazija Sarajevo	0	10	4	0	0	14
11	Kerim Fetić	Prva gimnazija u Zenici	9	1	4	0	0	14
13	Filip Krištić	Opća realna gimnazija KŠC sv. Josip Sarajevo	4	4	1	1	0	10
14	Eldar Hamzić	Srednja medicinska škola Tuzla	4	0	2	1	0	7
15	Nadja Smajkić	JU Srednja elektrotehnička škola "Salih-Salko Ćurić" Mostar	2	1	0	0	3	6
15	Amela Smolo	Gimnazija "Visoko" Visoko	3	0	3	0	0	6
15	Lejla Baturić	Behram-Begova medresa u Tuzli	3	0	3	0	0	6
18	Iman Kržalić	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	4	0	0	1	0	5
18	Kerim Fazlić	Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla	4	0	1	0	0	5
20	Sumeja Hasanspahić	Gimnazija "Muhsin Rizvić" Breza	2	2	0	0	0	4
20	Arif Begić	Druga Gimnazija Sarajevo	4	0	0	0	0	4
22	Nejla Mameledžija	Mješovita srednja škola "Travnik" Travnik	3	0	0	0	0	3
22	Nadija Džolota	JU Srednja elektrotehnička škola "Salih-Salko Ćurić" Mostar	3	0	0	0	0	3
22	Ilhana Kvakić	Gimnazija "Visoko" Visoko	3	0	0	0	0	3
22	Amina Devedžija	Druga gimnazija Sarajevo	3	0	0	0	0	3
22	Lamija Sabitović	JU Srednja škola Jablanica	3	0	0	0	0	3
27	Ahmed Ibišević	Druga Gimnazija Sarajevo	0	1	1	0	0	2
28	Armin Grabovac	Gimnazija "Visoko" Visoko	1	0	0	0	0	1
29	Ajdina Herceglija	Gimnazija "Visoko" Visoko	0	0	0	0	0	0
29	Erna Hirkić	JU "Gimnazija" Cazin	0	0	0	0	0	0
29	Minel Vrco	Mješovita srednja škola "Travnik" Travnik	0	0	0	0	0	0
29	Mustafa Čeho	SMŠ "Zijah Dizdarević" Kiseljak	0	0	0	0	0	0
29	Selver Sarajlić	Behram-begova medresa u Tuzli	0	0	0	0	0	0
29	Nadira Ćulov	STŠ „Hasib Hadžović“	0	0	0	0	0	0

Učenik Benjamin Mujkić se plasirao i na Matematičku olimpijadu BiH i na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olimpijadu, dok su se učenici Abdullah Fehratbegović i Isa Švrakić plasirali na Matematičku olimpijadu BiH.

Konačni rezultati federalnog takmičenja iz matematike učenika II razreda

Rang	Ime i prezime	Škola	1	2	3	4	5	Ukupno
1	Ilma Čeljo	Druga Gimnazija Sarajevo	10	10	9	10	2	41
2	Harun Alibegović	Richmond Park International Secondary School Sarajevo	10	10	9	0	10	39
3	Ahmed Spahić	Druga Gimnazija Sarajevo	10	5	10	0	9	34
4	Asja Ćatić	Druga Gimnazija Sarajevo	10	6	8	1	5	30
5	Naida Gavranović	Druga Gimnazija Sarajevo	7	7	8	0	5	27
6	Emina Hasanbegović	Druga Gimnazija Sarajevo	10	7	2	1	6	26
7	Emina Suljić	Treća gimnazija Sarajevo	10	1	5	0	2	18
7	Sarah Mrakić	Mješovita srednja škola "Travnik" Travnik	10	6	2	0	0	18
9	Tarik Agić	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	10	2	2	0	3	17
9	Osman Puščul	Gimnazija "Visoko" Visoko	10	1	4	0	2	17
11	Imran Čustović	Druga gimnazija Sarajevo	10	1	5	0	0	16
11	Ammar Turbić	Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	8	6	1	0	1	16
13	Elmas Hamidović	Srednja tehnička škola Zavidovići	9	1	4	0	0	14
13	Kerim Mujkanović	Gimnazija "Musa Ćazim Ćatić" Tešanj	10	0	4	0	0	14
13	Fatima Huskanović	Behram-Begova medresa u Tuzli	10	2	1	0	1	14
16	Husein Jašić	Behram-Begova medresa u Tuzli	3	2	7	0	0	12
17	Hanis Đonko	JU Druga gimnazija Mostar	5	1	4	0	0	10
18	Emir Halilović	Elektro-tehnička škola Tuzla	3	0	4	0	1	8
19	Affan Kaknjo	Prva gimnazija u Zenici	2	2	0	0	3	7
20	Emina Džajić	JU Srednja škola "Konjic" Konjic	5	1	0	0	0	6
21	Sara Adilović	Elči Ibrahim- pašina medresa u Travniku	2	0	0	0	3	5
21	Amar Pehilj	JU Druga gimnazija Mostar	0	0	4	0	1	5
21	Amina Bukvić	Gimnazija "Rizah Odžečkić" Zavidovići	5	0	0	0	0	5
21	Ajša Brka	Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj	2	0	2	0	1	5
25	Aiša Žužo	Elči Ibrahim-pašina medresa u Travniku	2	0	2	0	0	4
26	Nadža Ganić	MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko	0	0	2	0	0	2
26	Mia Hodžić	Gimnazija KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	2	0	0	0	0	2
28	Adnan Kadić	JU Gimnazija "Bihać" Bihać	1	0	0	0	0	1
28	Amir Džafić	MSŠ „Enver Pozderović" Goražde	0	1	0	0	0	1
28	Tarik Gutlić	JU MSŠ "Bosanski Petrovac" Bosanski Petrovac	0	1	0	0	0	1
28	Berina Hodžić	SMŠ "Zijah Dizdarević" Fojnica	1	0	0	0	0	1
32	Lamija Joldić	Elči Ibrahim- pašina medresa u Travniku	0	0	0	0	0	0

Učenici Ilma Čeljo i Harun Alibegović su se plasirali i na Matematičku olimpijadu BiH i na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olimpijadu, dok su se učenici Ahmed Spahić, Asja Ćatić, Naida Gavranović i Emina Hasanbegović plasirali na Matematičku olimpijadu BiH.

Konačni rezultati federalnog takmičenja iz matematike učenika III razreda

Rang	Ime i prezime	Škola	1	2	3	4	5	Ukupno
1	Ervin Macić	Druga gimnazija Sarajevo	10	10	10	8	4	42
2	Emira Ibrahimović	Druga gimnazija Sarajevo	10	10	10	1	1	32
3	Mirnes Fehrić	Druga gimnazija Sarajevo	10	10	3	7	0	30
4	Hana Zaimović	Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj	4	10	5	0	0	19
5	Vedran Selimović	Richmond Park International Secondary School Tuzla	3	10	5	0	0	18
5	Esmir Zoletić	JU Gimnazija "Živinice" Živinice	10	7	0	1	0	18
7	Adian Krivić	Druga gimnazija Sarajevo	4	10	0	3	0	17
8	Admir Zatega	Druga gimnazija Sarajevo	4	10	0	1	0	15
9	Anđela Milanović	Franjevačka klasična gimnazija Visoko	10	0	0	3	0	13
10	Asja Rahmanović	Druga gimnazija Sarajevo	10	0	0	2	0	12
11	Rubina Rekic	Gimnazija "Cazin" Cazin	10	1	0	0	0	11
11	Amina Krnjić	Mješovita srednja škola "Travnik" Travnik	10	1	0	0	0	11
11	Salih Letić	Richmond Park International Secondary School Sarajevo	1	10	0	0	0	11
14	Emin Begić	MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko	10	0	0	0	0	10
15	Ilhan Erović	Druga Gimnazija Sarajevo	8	0	0	0	0	8
16	Adna Mujkanović	Gimnazija "Musa Ćazim Ćatić" Tešanj	4	0	3	0	0	7
16	Edin Hasanović	Elektro-tehnička škola Tuzla	3	4	0	0	0	7
18	Lejla Nuhić	JU Druga gimnazija "Mostar" Mostar	5	1	0	0	0	6
19	Dženan Midžić	JU Gimnazija "Bihać" Bihać	4	1	0	0	0	5
20	Enis Adilović	MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko	4	0	0	0	0	4
20	Elmir Kevilj	Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj	4	0	0	0	0	4
20	Emina Sarajlić	Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	4	0	0	0	0	4
20	Maida Biber	JU Srednja škola "Konjic" Konjic	4	0	0	0	0	4
20	Tarik Mujkić	Gimnazija "Rizah Odžečkić" Zavidovići	4	0	0	0	0	4
25	Irma Topčagić	Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	3	0	0	0	0	3
25	Lamija Pridjevčić	Gimnazija "Musa Ćazim Ćatić" Tešanj	2	1	0	0	0	3
25	Berina Karić	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	3	0	0	0	0	3
25	Adin Frljak	Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo	3	0	0	0	0	3
25	Haris Macić	JU Srednja škola "Konjic" Konjic	3	0	0	0	0	3
25	Ilma Hindija	Gimnazija Visoko Visoko	3	0	0	0	0	3
31	Azra Alihodža	Elči Ibrahim- pašina medresa u Travniku	2	0	0	0	0	2
31	Alen Zubović	Treća Gimnazija Sarajevo	2	0	0	0	0	2
33	Haira Tolja	Elči Ibrahim- pašina medresa u Travniku	0	0	0	0	0	0

Učenici Ervin Macić, Emira Ibrahimović i Mirnes Fehrić su se plasirali i na Matematičku olimpijadu BiH i na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olimpijadu.

Konačni rezultati federalnog takmičenja iz matematike učenika IV razreda

Rang	Ime i prezime	Škola	1	2	3	4	5	Ukupno
1	Boris Stanković	Druga gimnazija Sarajevo	10	10	10	10	10	50
1	Naida Purišević	Druga gimnazija Sarajevo	10	10	10	10	10	50
3	Haris Imamović	Druga gimnazija Sarajevo	10	10	10	0	10	40
4	Esma Mašić	Druga gimnazija Sarajevo	7	0	10	10	10	37
5	Ahmed Softić	Mješovita srednja škola "Travnik" Travnik	10	7	6	0	10	33
5	Adi Hujić	Druga gimnazija Sarajevo	10	10	10	1	2	33
7	Imana Alibašić	Druga gimnazija Sarajevo	6	9	1	0	10	26
7	Lamija Borovina	Druga gimnazija Sarajevo	10	6	0	0	10	26
9	Eldar Buzadžić	Gimnazija "Dr Mustafa Kamarić" Gračanica	10	2	2	0	1	15
10	Ajla Hasanbegović	Druga gimnazija Sarajevo	10	2	0	0	2	14
11	Melika Alibegić	MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko	10	3	0	0	0	13
11	Iman Kovač	Prva gimnazija u Zenici	10	3	0	0	0	13
13	Ajša Herceglija	Medresa "Osman ef. Redžović" Visoko	7	3	0	0	2	12
13	Sara Dautbegović	KŠC "Sveti Pavao" Zenica	10	2	0	0	0	12
13	Kanita Rakovac	Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	10	2	0	0	0	12
16	Belma Pirija	JU Srednja škola "Konjic" Konjic	10	0	0	0	0	10
16	Aida Mazalović	Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	10	0	0	0	0	10
16	Alma Jusufbegović	JU Srednja škola "Konjic" Konjic	10	0	0	0	0	10
19	Nina Brkić	Gimnazija "Musa Ćazim Ćatić", Tešanj	6	3	0	0	0	9
20	Edin Živojević	MSŠ „Enver Pozderović“ Goražde	5	3	0	0	0	8
20	Mahir Salihbašić	MSŠ "Srebrenik" Srebrenik	5	3	0	0	0	8
22	Faruk Sijerčić	Gimnazija "Visoko" Visoko	7	0	0	0	0	7
23	Almedin Mešić	Richmond Park International Secondary School Tuzla	3	0	0	0	3	6
24	Dado Škrgić	JU Gimnazija "Cazin" Cazin	0	0	0	0	5	5
25	Alen Hrnjić	JU Gimanzija "Bihać" Bihać	3	1	0	0	0	4
25	Anastasija Ferraby	Franjevačka klasična gimnazija Visoko	3	1	0	0	0	4
27	Ammar Haljković	STŠ „Hasib Hadžović“ Goražde	3	0	0	0	0	3
27	Ajla Hadžović	STŠ „Hasib Hadžović“ Goražde	3	0	0	0	0	3
29	Anur Smailhodžić	MSŠ „Enver Pozderović“ Goražde	0	0	0	0	0	0
29	Ismihana Klisura	Elči Ibrahim-pašina Medresa u Travniku	0	0	0	0	0	0
Nezvanična konkurencija								
3	Jovan Vuković		10	10	10	0	10	40

Učenici Boris Stanković, Naida Purišević, Haris Imamović, Esma Mašić, Ahmed Softić i Adi Hujić su se plasirali i na Matematičku olimpijadu BiH i na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olimpijadu, dok su se učenici Imana Alibašić i Lamija Borovina plasirali na Matematičku olimpijadu BiH.