61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Bihać / Mostar / Sarajevo / Tuzla, 22.05.2021. godine

I RAZRED

Zadatak 1. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da vrijedi

$$ab - c = 22,$$
$$bc - a = 5,$$
$$ca - b = -27.$$

Dokazati da je $a + b + c \neq 0$.

Zadatak 2. Dokazati da je broj $1 + 2^{2021^{2022}} + 3^{2021^{2022}} + \cdots + 2020^{2021^{2022}}$ djeljiv sa 2021.
(Napomena: a^{b^c} znači $a^{(b^c)}$, a ne $(a^b)^c$.)

Zadatak 3. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_{44}$ prirodni brojevi takvi da je $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{44} \leq 125$. Dokazati da među 43 razlike $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots, a_{44} - a_{43}$, postoji barem 10 jednakih.

Zadatak 4. U trapezu $ABCD$ $(AB||CD)$ vrijedi $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{CD}$. Prava paralelna osnovicama trapeza koja prolazi kroz tačku presjeka dijagonala trapeza siječe krak $\overline{AD}$ u tački M. Odrediti $\angle BMC$.

Zadatak 5. U svako polje tabele formata 2020×2021 treba upisati po jedan broj iz skupa $\{0,1,2\}$. Koliko maksimalno možemo upisati jedinica u tu tabelu tako da zbir brojeva u svakom redu i zbir brojeva u svakoj koloni bude djeljiv sa 3? Odgovor obrazložiti!

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Bihać / Mostar / Sarajevo / Tuzla, 22.05.2021. godine

II RAZRED

Zadatak 1. Naći sve kvadratne polinome $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ sa cjelobrojnim koeficijentima a, b, c takve da za sve realne x vrijedi

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2019 \leq P(x) \leq \frac{3}{2}x^2 + 6x + 2023.$$

Zadatak 2. Neka je p prost broj. Odrediti sve parove (a, b) prirodnih brojeva takvih da vrijedi $NZS(a, a+p) = NZS(b, b+p)$.
(Napomena: $NZS(x, y)$ je oznaka za najmanji zajednički sadržilac, odnosno najmanji zajednički višekratnik, prirodnih brojeva x i y.)

Zadatak 3. Riješiti jednačinu u skupu realnih brojeva

$$\frac{1}{\sqrt{2020}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2021}-\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2022}-\sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2021-x}-\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2022-x}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2023-x}-\sqrt{3}}.$$

Zadatak 4. Date su tačke P i Q na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ kvadrata $ABCD$, redom, tako da vrijedi $\overline{BP} = \overline{BQ}$. Ako je tačka S na $\overline{PC}$ takva da je $BS \perp PC$, izračunati $\angle QSD$.

Zadatak 5. U svako polje tabele formata 2020×2021 treba upisati po jedan broj iz skupa $\{0,1,2\}$. Koliko maksimalno možemo upisati jedinica u tu tabelu tako da zbir brojeva u svakom redu i zbir brojeva u svakoj koloni bude djeljiv sa 3? Odgovor obrazložiti!

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Bihać / Mostar / Sarajevo / Tuzla, 22.05.2021. godine

III RAZRED

Zadatak 1. Odrediti sve vrijednosti realnog parametra k za koji jednačina

$$\log(kx) = 2\log(x+1)$$

ima tačno jedno rješenje u skupu realnih brojeva.

Zadatak 2. Neka je a prirodan broj. Dokazati da su sljedeće dvije tvrdnje ekvivalentne:

i) postoji prirodan broj d takav da svaka od jednačina $x^2 - ax + d = 0$ i $x^2 - ax - d = 0$ ima bar jedno cjelobrojno rješenje;

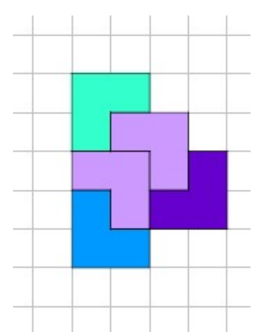
ii) postoje prirodni brojevi b i c takvi da je $a^2 = b^2 + c^2$.

Zadatak 3. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}, x_{2022}$ različiti prirodni brojevi iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2021, 2022\}$. Odrediti najmanju i najveću moguću vrijednost izraza

$$\left|\left|\left|\cdots\left|\left|\left|x_1 - x_2\right| - x_3\right| - x_4\right| - \cdots\right| - x_{2021}\right| - x_{2022}\right|.$$

Zadatak 4. Neka je ΔABC trougao u kojem je $\overline{AB} = \overline{AC}$ i $\angle CAB = 90^\circ$. Ako su M i N tačke na hipotenuzi $\overline{BC}$ takve da je $\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, odrediti $\angle MAN$.

Zadatak 5. Beskonačna ploča je podijeljena na jedinične kvadratiće. Figuru koja se dobije izbacivanjem jednog kvadratića iz kvadrata formata 2×2 zovemo $L-figurom$. Konfiguracijom ćemo zvati svaki raspored $L-figura$ na ploči takav da nikoje dvije $L-figure$ ne pokrivaju isti kvadratić. Ako za svaku $L-figuru$ u konfiguraciji vrijedi da je kvadratić koji zajedno sa tom $L-figurom$ gradi kvadrat formata 2×2 pokriven drugom $L-figurom$, tu konfiguraciju zovemo *savršenom* (na slici je dat primjer *savršene* konfiguracije sa pet $L-figura$). Neka je data *savršena* konfiguracija sa 2021-om $L-figurom$. Dokazati da se nekoliko $L-figura$ (barem jedna, ali ne i sve) iz te *savršene* konfiguracije može ukloniti sa ploče tako da na ploči i dalje ostane *savršena* konfiguracija.



Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Bihać / Mostar / Sarajevo / Tuzla, 22.05.2021. godine

IV RAZRED

Zadatak 1. Odrediti sve vrijednosti realnog parametra m tako da jednačina

$$x^4-(3m+2)x^2+m^2=0$$

ima četiri realna rješenja koja formiraju aritmetičku progresiju.

Zadatak 2. Za dva skupa A i B definišemo skup $A+B$ sa $A+B=\{a+b|a\in A, b\in B\}$. Na primjer, ako je $A=\{1,2,3\}$ i $B=\{4,5,6\}$, onda je $A+B=\{5,6,7,8,9\}$.

a) Odrediti najveći prirodan broj m takav da postoje skupovi A i B, oba podskupovi skupa $\mathbb{N}\cup\{0\}$, takvi da i A i B imaju po m elemenata i vrijedi $A+B=\{0,1,2,\dots,2021\}$.

b) Odrediti najmanji prirodan broj n takav da postoje skupovi A i B, oba podskupovi skupa $\mathbb{N}\cup\{0\}$, takvi da i A i B imaju po n elemenata i vrijedi $A+B=\{0,1,2,\dots,2021\}$.

Zadatak 3. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_{2021}, x_{2022}$ različiti prirodni brojevi iz skupa $\{1,2,3,\dots,2021,2022\}$. Odrediti najmanju i najveću moguću vrijednost izraza

$$\left|\left|\left|\dots\left|\left|\left|x_1-x_2\right|-x_3\right|-x_4\right|-\dots\right|-x_{2021}\right|-x_{2022}\right|.$$

Zadatak 4. Neka je ΔABC trougao u kojem je $\overline{AB}=\overline{AC}$ i $\angle CAB=90^\circ$. Ako su M i N tačke na hipotenuzi $\overline{BC}$ takve da je $\overline{BM}^2+\overline{CN}^2=\overline{MN}^2$, odrediti $\angle MAN$.

Zadatak 5. Ako su m,n,r prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$1+m+n\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2r-1},$$

dokazati da je broj m potpun kvadrat.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

SRETNO!

61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Bihać / Mostar / Sarajevo / Tuzla, 22.05.2021. godine

I RAZRED

Zadatak 1. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da vrijedi

$$ab - c = 22,$$
$$bc - a = 5,$$
$$ca - b = -27.$$

Dokazati da je $a + b + c \neq 0$.

Rješenje

Sabiranjem datih jednakosti dobijemo

$$ab + bc + ca - (a + b + c) = 0,$$

odakle slijedi

$$ab + bc + ca = a + b + c.$$

Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da vrijedi $a + b + c = 0$. Tada bi vrijedilo

$$ab + bc + ca = 0.$$

Sada imamo

$$0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2.$$

U skupu realnih brojeva ovo je jedino moguće ako je $a = b = c = 0$, ali onda ne vrijede date jednakosti iz uslova zadatka.

Dakle, pretpostavka da je $a + b + c = 0$ nas je dovela do kontradikcije, pa mora vrijediti $a + b + c \neq 0$.

Šema bodovanja

2 boda – dobijanje jednakosti $ab + bc + ca = a + b + c$

2 boda – zaključak da iz pretpostavke $a + b + c = 0$ slijedi da je $ab + bc + ca = 0$

3 boda – zaključak da iz prethodne dvije jednakosti slijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 0$

1 bod – zaključak da iz prethodne jednakosti slijedi $a = b = c = 0$

2 boda – zaključak da je $a = b = c = 0$ u kontradikciji sa uslovima zadatka, te da mora biti $a + b + c \neq 0$

Zadatak 2. Dokazati da je broj $1 + 2^{2021^{2022}} + 3^{2021^{2022}} + \cdots + 2020^{2021^{2022}}$ djeljiv sa 2021.

(Napomena: a^{b^c} znači $a^{(b^c)}$, a ne $(a^b)^c$.)

Rješenje 1

Neka je $n = 2021^{2022}$ i $S = 1 + 2^n + 3^n + \cdots + 2020^n$.

S ima paran broj sabiraka i može se napisati u obliku

$$S=(1+2020^n)+(2^n+2019^n)+\cdots+(1010^n+1011^n).$$

Izrazi u zagradama su oblika $p^n+(2021-p)^n$, gdje je $p=1,2,\ldots,1010$.

Kako za neparan prirodan broj m vrijedi faktorizacija

$$a^m+b^m=(a+b)(a^{m-1}-a^{m-2}b+\cdots-ab^{m-2}+b^{m-1}),$$

i kako je $n=2021^{2022}$ neparan broj, to je

$$p^n+(2021-p)^n=(p+(2021-p))(p^{n-1}-p^{n-2}(2021-p)+\cdots-p(2021-p)^{n-2}+(2021-p)^{n-1}).$$

Dakle, $p^n+(2021-p)^n$ je djeljivo sa $p+(2021-p)=2021$ za sve $p=1,2,\ldots,1010$, pa je i S djeljivo sa 2021.

Šema bodovanja

3 boda – uparivanje sabiraka p^n i $(2021-p)^n$ u sumi S

4 boda – faktorizacija izraza $p^n+(2021-p)^n$ iz koje se može zaključiti djeljivost sa 2021

3 boda – zaključak da su svi sabirci u sumi S djeljivi sa 2021, te da je zbog toga i suma S djeljiva sa 2021

Napomena: Učenik može dobiti 1 bod ako zaključi da sabirak 2020^n daje ostatak -1 pri djeljenju sa 2021

Rješenje 2

Kao i u prethodnom rješenju dobijamo da je S zbir sabiraka oblika $p^n+(2021-p)^n$, $p=1,2,\ldots,1010$.

Kako je za n neparno

$$(2021-p)^n\equiv(-p)^n\equiv-p^n\pmod{2021},$$

to je

$$p^n+(2021-p)^n\equiv p^n-p^n\equiv 0\pmod{2021},$$

za sve $p=1,2,\ldots,1010$, pa je i $S\equiv 0\pmod{2021}$. Dakle, S je djeljivo sa 2021.

Šema bodovanja

3 boda – uparivanje sabiraka p^n i $(2021-p)^n$ u sumi S

2 boda – zaključak da je $(2021-p)^n\equiv(-p)^n\pmod{2021}$

2 boda – zaključak da je $(-p)^n\equiv-p^n\pmod{2021}$ zbog toga što je n neparan broj

3 boda – zaključak da su svi sabirci u sumi S djeljivi sa 2021, te da je zbog toga i suma S djeljiva sa 2021

Napomena: Učenik može dobiti 1 bod ako zaključi da je $2020^n\equiv-1\pmod{2021}$

Zadatak 3. Neka su $a_1,a_2,\ldots,a_{44}$ prirodni brojevi takvi da je $1\le a_1<a_2<\cdots<a_{44}\le 125$. Dokazati da među 43 razlike $a_2-a_1,a_3-a_2,a_4-a_3,\ldots,a_{44}-a_{43}$, postoji barem 10 jednakih.

Rješenje

Neka je $d_j=a_{j+1}-a_j$ ($j\in\{1,2,\ldots,43\}$). Imamo da je

$$d_1+d_2+\cdots+d_{43}=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots(a_{44}-a_{43})=a_{44}-a_1\le 125-1=124$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da se među ovim razlikama svaka vrijednost pojavljuje najviše 9 puta.

Najmanja vrijednost koju navedena suma može uzeti je tada

$$9\cdot1+9\cdot2+9\cdot3+9\cdot4+7\cdot5=125>124,$$

što je očigledna kontradikcija. Do kontradikcije nas je dovela pretpostavka da se svaka vrijednost pojavljuje najviše 9 puta, pa je ona netačna. Dakle, postoji razlika koja se pojavljuje barem 10 puta.

Šema bodovanja

4 boda – zaključak da je $d_1 + d_2 + \cdots + d_{43} \leq 124$

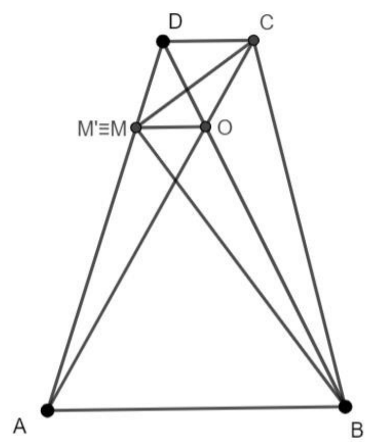
4 boda – zaključak da u slučaju kada se nijedna razlika ne pojavljuje 10 puta vrijedi da je najmanja vrijednost koju suma $d_1 + d_2 + \cdots + d_{43}$ može uzeti jednaka $9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 7 \cdot 5$

1 bod – računanje vrijednosti sume $9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 7 \cdot 5$

1 bod – zaključak da nas je pretpostavka dovela do kontradikcije i da postoji razlika koja se pojavljuje barem 10 puta.

Zadatak 4. U trapezu $ABCD$ ($AB||CD$) vrijedi $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{CD}$. Prava paralelna osnovicama trapeza koja prolazi kroz tačku presjeka dijagonala trapeza siječe krak $\overline{AD}$ u tački M. Odrediti $\angle BMC$.

Rješenje



Neka je tačka M' na kraku $\overline{AD}$ takva da je $\overline{AM'} = \overline{AD}$. Tada je $\overline{DM'} = \overline{DC}$. Kako je zbog paralelnosti $\angle BAD + \angle ADC = 180°$, to je $\angle AM'B + \angle DM'C = \frac{180° - \angle BAD}{2} + \frac{180° - \angle ADC}{2} = 180° - \frac{\angle BAD + \angle ADC}{2} = 90°$, zbog čega je $\angle BM'C = 90°$.

Neka je O presjek dijagonala trapeza. Dokazat ćemo da vrijedi $OM'||AB$, odakle će slijediti da se tačke M i M' poklapaju. Zbog sličnosti trouglova ΔAOB i ΔCOD (ili iz Talesove teoreme) vrijedi $\frac{\overline{DO}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DM'}}{\overline{AM'}}$. Na osnovu obrata Talesove teoreme vrijedi $M'O||AB$, pa se tačke M' i M poklapaju, pa je $\angle BMC = \angle BM'C = 90°$.

Šema bodovanja

3 boda – definisinje tačke M' te dokazivanje da za nju vrijedi $\angle BM'C = 90°$

2 boda – zaključak da je za poklapanje tačaka M i M' dovoljno pokazati da je OM' paralelno osnovicama trapeza

1 bod – zaključak da je za prethodno navedenu paralelnost dovoljno pokazati odnos $\frac{\overline{DO}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{DM'}}{\overline{AM'}}$

3 boda – dokaz prethodnog odnosa

1 bod – zaključak da zbog poklapanja tačaka M i M' vrijedi da je $\angle BMC = \angle BM'C = 90°$

Zadatak 5. U svako polje tabele formata 2020×2021 treba upisati po jedan broj iz skupa $\{0,1,2\}$. Koliko maksimalno možemo upisati jedinica u tu tabelu tako da zbir brojeva u svakom redu i zbir brojeva u svakoj koloni bude djeljiv sa 3? Odgovor obrazložiti!

Rješenje

Pretpostavimo da je u tabelu upisano n nula i d dvica. Pošto u jednom redu imamo 2021 polja, da bi zbir brojeva u tom redu bio djeljiv sa 3 moramo u njemu imati bar jednu dvicu ili bar dvije nule. Dakle, mora vrijediti $d + \frac{n}{2} \geq 2020$. Slično, kako u jednoj koloni imamo 2020 polja, da bi zbir brojeva u toj koloni bio

djeljiv sa 3 ona mora sadržavati bar jednu nulu ili bar dvije dvice. Dakle, vrijedi $n+\frac{d}{2}\geq 2021$. Sabiranjem dvije dobivene nejednakosti i dijeljenjem sa $\frac{3}{2}$ dobijamo da je $d+n\geq 2694$, pa je broj jedinica u tabeli sigurno manji ili jednak od $2020\cdot 2021-2694$.
Sada ćemo konstruisati primjer tabele sa tačno toliko jedinica. Uzet ćemo da je $n=1348$ i $d=1346$. Rasporedimo 1348 nula u horizontalnim parovima počev od gornjeg lijevog ćoška (u 674 redova i 1348 kolona) i 1346 dvica u vertikalnim parovima počev od donjeg desnog ćoška (u 1346 redova i 673 kolone), a ostala polja popunimo jedinicama (pogledati sliku ispod). Kako je $674+1346=2020$ i $1348+673=2021$, to će u prvih 674 redova biti po dvije nule, dok će u preostalim redovima biti po jedna dvica, a u prvih 1348 kolona će biti po jedna nula, dok će u ostalim kolona biti po dvije dvice, čime smo zadovoljili uslov da je zbir brojeva u svakom redu i svakoj koloni djeljiv sa 3. Dakle, maksimalan broj jedinica je jednak $2020\cdot 2021-2694=4079726$.

0	**0**	1	1	1	1	...	1	1	1
1	1	**0**	**0**	1	1	...	1	1	1
1	1	1	1	**0**	**0**	...	1	1	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	1	1	1	...	**2**	1	1
1	1	1	1	1	1	...	**2**	1	1
1	1	1	1	1	1	...	1	**2**	1
1	1	1	1	1	1	...	1	**2**	1
1	1	1	1	1	1	...	1	1	**2**
1	1	1	1	1	1	...	1	1	**2**

Šema bodovanja
4 boda – pronalaženje optimalne konstrukcije sa $2020\cdot 2021-2694$ jedinica
1 bod – zaključak da u svakom redu mora biti bar jedna dvica ili bar dvije nule, i da u svakoj koloni mora biti bar jedna nula ili bar dvije dvice
3 boda – dobijanje nejednakosti $d+\frac{n}{2}\geq 2020$ i $n+\frac{d}{2}\geq 2021$ (dobijanje samo jedne od ovih nejednakosti vrijedi 2 boda)
2 boda – zaključak da je $d+n\geq 2694$

Napomena:

Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.

61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Bihać / Mostar / Sarajevo / Tuzla, 22.05.2021. godine

II RAZRED

Zadatak 1. Naći sve kvadratne polinome $P(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ sa cjelobrojnim koeficijentima a, b, c takve da za sve realne x vrijedi

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2019 \leq P(x) \leq \frac{3}{2}x^2 + 6x + 2023.$$

Rješenje 1

Primijetimo da datu nejednakost možemo zapisati u obliku

$$\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2017 \leq P(x) \leq \frac{3}{2}(x+2)^2 + 2017.$$

Sada za $x = -2$ dobijamo $2017 \leq P(-2) \leq 2017$, tj. $P(-2) = 2017$. S druge strane, kako za svkao x vrijedi $\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2017 \geq 2017$, to je $P(x) \geq 2017$ za sve x, što zbog $P(-2) = 2017$ znači da parabola $y = P(x)$ dostiže minimalnu vrijednost za $x = -2$. Dakle, mora vrijediti $a > 0$ (jer samo tad parabola ima minimum) i tačka $(-2{,}2017)$ je tjeme parabole, pa je $P(x) = a(x+2)^2 + 2017$. Dakle, imamo

$$\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2017 \leq a(x+2)^2 + 2017 \leq \frac{3}{2}(x+2)^2 + 2017.$$

Očigledno je $a = 1$ jedina cjelobrojna vrijednost za koju vrijedi data nejednakost za sve x, pa je $P(x) = (x+2)^2 + 2017 = x^2 + 4x + 2021$, što je jedino rješenje zadatka.

Šema bodovanja

2 boda – dobijanje nejednakosti u obliku $\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2017 \leq P(x) \leq \frac{3}{2}(x+2)^2 + 2017$

1 bod – zaključak da je $P(-2) = 2017$

2 boda – zaključak da parabola $y = P(x)$ mora dostizati minimum za $x = -2$ (tj. da je tjeme parabole u tački $(-2{,}2017)$)

2 boda – zaključak da mora vrijediti $P(x) = a(x+2)^2 + 2017$

2 boda – zaključak da mora vrijediti $a = 1$

1 bod – pravilno izračunavanje $P(x)$

Rješenje 2

Za $a \geq 2$ bi zbog desne strane nejednakosti vrijedilo $\left(a-\frac{3}{2}\right)x^2+(b-6)x+c-2023 \leq 0$ za sve x, što je nemoguće jer ovaj kvadratni polinom nema maksimuma zbog $a-\frac{3}{2}>0$. Slično, za $a \leq 0$ bi zbog lijeve strane nejednakosti vrijedilo $\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+(2-b)x+2019-c \leq 0$, što je nemoguće zbog $\frac{1}{2}-a>0$.
Dakle, $a=1$.
Sada je lijeva strana nejednakosti ekvivalentna sa $\frac{x^2}{2}+(b-2)x+c-2019 \geq 0$. Ovo će vrijediti za svako realno x ako je $D_1=(b-2)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot(c-2019) \leq 0$ (1). Slično, desna strana nejednakosti postaje $\frac{x^2}{2}+(6-b)x+2023-c \geq 0$, što vrijedi za sve realne x ako je $D_2=(6-b)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot(2023-c) \leq 0$ (2). Sabiranjem (1) i (2) nakon sređivanja dobijamo $2\cdot(b-4)^2 \leq 0$, pa mora vrijediti $b=4$. Sada se (1) svodi na $4 \leq 2(c-2019)$, odakle je $c \geq 2021$, dok se (2) svodi na $4 \leq 2(2023-c)$, odakle je $c \leq 2021$. Dakle, $c=2021$, pa je $P(x)=x^2+4x+2021$.

Šema bodovanja

2 boda – zaključak da mora vrijediti $a=1$
3 boda – zaključak da lijeva strana nejednakosti vrijedi za svako realno x ako i samo ako je zadovoljena nejednakost (1), a da desna strana nejednakosti vrijedi za svako realno x ako i samo ako je zadovoljena nejednakost (2) (ukoliko učenik ima jednu od prethodne dvije nejednakosti dobija 2 boda)
3 boda – sabiranje nejednakosti (1) i (2) i zaključak da je $b=4$
2 boda – dobijane nejednakosti $c \geq 2021$ i $c \leq 2021$ i zaključak $c=2021$

Zadatak 2. Neka je p prost broj. Odrediti sve parove (a,b) prirodnih brojeva takvih da vrijedi $NZS(a,a+p=NZSb,b+p$.
(Napomena: $NZS(x,y)$ je oznaka za najmanji zajednički sadržilac, odnosno najmanji zajednički višekratnik, prirodnih brojeva x i y.)

Rješenje

Neka je $d=NZD(a,a+p)$ (NZD je oznaka za najveći zajednički djelilac). Tada imamo da $d|a$ i $d|a+p$, iz čega zaključujemo da $d|(a+p)-a=p$. Pošto je p prost broj, zaključujemo da d može biti ili jednako p (u slučaju kada p dijeli a) ili jednako 1 (u slučaju kada p ne dijeli a). Pošto je $NZS(a,a+p)=\frac{a(a+p)}{NZD(a,a+p)}$, zaključujemo da je $NZS(a,a+p)=\frac{a}{p}(a+p)$ ukoliko p dijeli a, odnosno $NZS(a,a+p)=a(a+p)$ ukoliko p ne dijeli a. Analogno imamo da je $NZS(b,b+p)=\frac{b}{p}(b+p)$ ukoliko je b djeljiv sa p i $NZS(b,b+p)=b(b+p)$ u suprotnom.
Ukoliko je jedan od brojeva a,b djeljiv sa p, a drugi nije (npr. $p|a, p\nmid b$), tada $p|NZS(a,a+p)$, a $p \nmid NZS(b,b+p)$ (jer ako $p\nmid b$ onda $p \nmid b+p$), pa je nemoguće da vrijedi $NZS(a,a+p)=NZS(b,b+p$.
Dakle, ili su oba broja a,b djeljiva sa p ili nije nijedan. U oba slučaja jednakost NZS-ova se svodi na

$$a(a+p) = b(b+p) \Leftrightarrow$$

$$a^2 - b^2 = bp - ap \Leftrightarrow$$

$$(a-b)(a+b+p) = 0.$$

Ova jednačina može vrijediti jedino ukoliko je $a = b$, jer ako je $a - b \neq 0$, dobijamo da je $a + b + p = 0$, što nije moguće jer su a, b, p prirodni brojevi.

Dakle, jedina rješenja su parovi (a, b) gdje je $a = b$.

Šema bodovanja

2 boda – zaključak da je NZD brojeva a i $a + p$ (ili b i $b + p$) jednak 1 (ako $p \nmid a$) ili p (ako $p|a$)

2 boda – zaključak da je $NZS(a, a + p) = a(a + p)$ u slučaju da $p \nmid a$, odnosno $NZS(a, a + p) = \frac{a(a+p)}{p}$ u slučaju $p|a$ (i isto to za b)

2 boda – zaključak da su ili oba broja a, b djeljivi sa p ili nije nijedan

2 boda – ispravno rješavanje slučaja kad nijedan od brojeva a, b nije djeljiv sa p

2 boda – ispravno rješavanje slučaja kada su oba broja a, b djeljivi sa p

Zadatak 3. Riješiti jednačinu u skupu realnih brojeva

$$\frac{1}{\sqrt{2020}-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2021}-\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2022}-\sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2021-x}-\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2022-x}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2023-x}-\sqrt{3}}.$$

Rješenje

Primijetimo da mora biti $0 \leq x \leq 2021$ i $x \neq 2020$.

Racionalizacijom dobijamo

$$\frac{\sqrt{2020}+\sqrt{x}}{2020-x} + \frac{\sqrt{2021}+\sqrt{x+1}}{2021-(x+1)} + \frac{\sqrt{2022}-\sqrt{x+2}}{2022-(x+2)} = \frac{\sqrt{2021-x}+\sqrt{1}}{2021-x-1} + \frac{\sqrt{2022-x}+\sqrt{2}}{2022-x-2} + \frac{\sqrt{2023-x}+\sqrt{3}}{2023-x-3}.$$

Množenjem sa $2020 - x \neq 0$ dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$\sqrt{2020}+\sqrt{x}+\sqrt{2021}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2022}-\sqrt{x+2} = \sqrt{2021-x}+\sqrt{1}+\sqrt{2022-x}+\sqrt{2}+\sqrt{2023-x}+\sqrt{3}. \quad (*)$$

Lako vidimo da je $x = 1$ rješenje jednačine $(*)$.

Ako je $x > 1$, onda je

$$\sqrt{2020} > \sqrt{2021-x}, \sqrt{2021} > \sqrt{2022-x}, \sqrt{2022} > \sqrt{2023-x},$$

$$\sqrt{x} > \sqrt{1}, \sqrt{x+1} > \sqrt{2}, \sqrt{x+2} > \sqrt{3},$$

pa vrijedi da je

$$\sqrt{2020}+\sqrt{x}+\sqrt{2021}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2022}-\sqrt{x+2}>$$
$$>\sqrt{2021-x}+\sqrt{1}+\sqrt{2022-x}+\sqrt{2}+\sqrt{2023-x}+\sqrt{3}.$$

Dakle, jednačina $(*)$ ne može imati rješenje veće od 1.

Slično, za $x<1$ je

$$\sqrt{2020}<\sqrt{2021-x}, \sqrt{2021}<\sqrt{2022-x}, \sqrt{2022}<\sqrt{2023-x},$$

$$\sqrt{x}<\sqrt{1}, \sqrt{x+1}<\sqrt{2}, \sqrt{x+2}<\sqrt{3},$$

pa vrijedi da je

$$\sqrt{2020}+\sqrt{x}+\sqrt{2021}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2022}-\sqrt{x+2}$$
$$<\sqrt{2021-x}+\sqrt{1}+\sqrt{2022-x}+\sqrt{2}+\sqrt{2023-x}+\sqrt{3},$$

i jednačina $(*)$ ne može imati rješenje manje od 1.

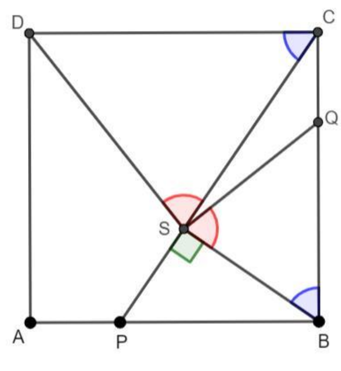
Dakle, jedino rješenje jednačine je $x=1$.

Šema bodovanja
2 boda – dobijanje jednačine $(*)$
1 bod – konstatacija da je $x=1$ rješenje jednačine
4 boda – dokazivanje da je nemoguće da vrijedi $x>1$ (ili dokazivanje da je nemoguće da vrijedi $x<1$)
3 boda – dokazivanje slučaja koji nije dokazan u gornjem koraku
Napomena: Da bi učenik dobio svih 10 bodova, potrebno je da konstatuje da je jednačina $(*)$ ekvivalentna sa polaznom jednačinom za $x\neq 2020$ ili da provjeri da rješenje $x=1$ zadovoljava početnu jednačinu (inače gubi jedan bod).

Zadatak 4. Date su tačke P i Q na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ kvadrata $ABCD$, redom, tako da vrijedi $\overline{BP}=\overline{BQ}$. Ako je tačka S na $\overline{PC}$ takva da je $BS\perp PC$, izračunati $\angle QSD$.

Rješenje 1

Zbog $\angle PBS=90°-\angle CBS=\angle BCS$, pravougli trouglovi ΔPBS i ΔBSC su slični odakle je $\frac{\overline{BS}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{CD}}$, tj. $\frac{\overline{BS}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$, odakle su zbog $\angle QBS=90°-\angle BCS=\angle SCD$ trouglovi ΔBSQ i ΔCSD slični (pravilo SUS). Zbog toga je $\angle CSD=\angle BSQ$, pa dobijamo $\angle QSD=\angle QSC+\angle CSD=90°-\angle BSQ+\angle CSD=90°$.



Šema bodovanja

2 boda – zaključak da je za $\angle QSD = 90°$ dovoljno dokazati sličnost trouglova ΔBSQ i ΔCSD

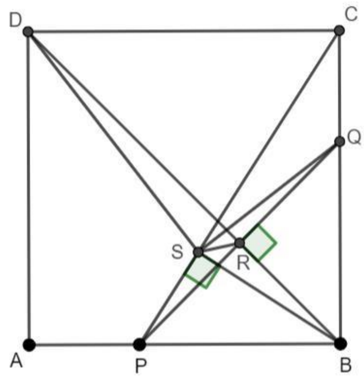
2 boda – zaključak da je za tu sličnost dovoljno dokazati $\frac{\overline{BS}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$

4 boda – zaključak da su pravougli trouglovi ΔPBS i ΔBSC i da odatle slijedi $\frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}$

2 boda – zaključak da su prethodne dvije jednakosti ekvivalentne, te da odatle slijedi $\angle QSD = 90°$

Rješenje 2

Kako je $\angle PBD = \angle CBD = 45°$, to su trouglovi ΔPBD i ΔCBD podudarni (pravilo SUS), tj. $\overline{PD} = \overline{DQ}$, pa je četverougao $PBQD$ deltoid. Zbog toga je $BD \perp PQ$. Neka je $\{R\} = BD \cap PQ$. Kako je $\angle QCD + \angle QRD = 90° + 90° = 180°$, to je četverougao $DRQC$ tetivan. S druge strane, iz sličnosti pravouglih trouglova ΔPBS i ΔPBC slijedi $\frac{\overline{PB}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$, tj. $\overline{PB}^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PS}$. Također, na isti način iz sličnosti trouglova ΔPBR i ΔPBQ slijedi $\overline{PB}^2 = \overline{PR} \cdot \overline{PQ}$. Iz posljednje dvije jednakosti je $\overline{PC} \cdot \overline{PS} = \overline{PR} \cdot \overline{PQ}$, što znači da je četverougao $SRQC$ tetivan (iz potencije tačke P ili iz sličnosti trouglova ΔPSR i ΔPQC). Dakle, tačke S, R, Q, C, D pripadaju jednoj kružnici, zbog čega je $\angle QSD = \angle QRD = 90°$.



Šema bodovanja

1 bod – zaključak da je $BD \perp PQ$

1 bod – uvođenje tačke R i dokaz da su tačke R, Q, C, D konciklične

1 bod – zaključak da je za $\angle QSD = 90°$ dovoljno dokazati da i tačka S pripada toj kružnici

2 boda – zaključak da je dovoljno dokazati $\overline{PC} \cdot \overline{PS} = \overline{PR} \cdot \overline{PQ}$

4 boda – dobijanje jednakosti $\overline{PB}^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PS}$ i $\overline{PB}^2 = \overline{PR} \cdot \overline{PQ}$ (po 2 boda za svaku, pri čemu se ovi bodovi ne dobijaju ukoliko učenik ranije nije konstatovao da je dovoljno dokazati $\overline{PC} \cdot \overline{PS} = \overline{PR} \cdot \overline{PQ}$)

1 bod – zaključak da zbog prethodnih jednakosti vrijedi $\angle QSD = 90°$

Zadatak 5. U svako polje tabele formata 2020×2021 treba upisati po jedan broj iz skupa $\{0,1,2\}$. Koliko maksimalno možemo upisati jedinica u tu tabelu tako da zbir brojeva u svakom redu i zbir brojeva u svakoj koloni bude djeljiv sa 3? Odgovor obrazložiti!

Rješenje

Pretpostavimo da je u tabelu upisano n nula i d dvica. Pošto u jednom redu imamo 2021 polja, da bi zbir brojeva u tom redu bio djeljiv sa 3 moramo u njemu imati bar jednu dvicu ili bar dvije nule. Dakle, mora vrijediti $d + \frac{n}{2} \geq 2020$. Slično, kako u jednoj koloni imamo 2020 polja, da bi zbir brojeva u toj koloni bio djeljiv sa 3 ona mora sadržavati bar jednu nulu ili bar dvije dvice. Dakle, vrijedi $n + \frac{d}{2} \geq 2021$. Sabiranjem dvije dobivene nejednakosti i dijeljenjem sa $\frac{3}{2}$ dobijamo da je $d + n \geq 2694$, pa je broj jedinica u tabeli sigurno manji ili jednak od $2020 \cdot 2021 - 2694$.

Sada ćemo konstruisati primjer tabele sa tačno toliko jedinica. Uzet ćemo da je $n = 1348$ i $d = 1346$. Rasporedimo 1348 nula u horizontalnim parovima počev od gornjeg lijevog ćoška (u 674 redova i 1348 kolona) i 1346 dvica u vertikalnim parovima počev od donjeg desnog ćoška (u 1346 redova i 673 kolone), a ostala polja popunimo jedinicama (pogledati sliku ispod). Kako je $674 + 1346 = 2020$ i $1348 + 673 = 2021$, to će u prvih 674 redova biti po dvije nule, dok će u preostalim redovima biti po jedna dvica, a u prvih 1348 kolona će biti po jedna nula, dok će u ostalim kolona biti po dvije dvice, čime smo zadovoljili uslov da je zbir brojeva u svakom redu i svakoj koloni djeljiv sa 3. Dakle, maksimalan broj jedinica je jednak $2020 \cdot 2021 - 2694 = 4079726$.

0	**0**	1	1	1	1	...	1	1	1
1	1	**0**	**0**	1	1	...	1	1	1
1	1	1	1	**0**	**0**	...	1	1	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	1	1	1	...	**2**	1	1
1	1	1	1	1	1	...	**2**	1	1
1	1	1	1	1	1	...	1	**2**	1
1	1	1	1	1	1	...	1	**2**	1
1	1	1	1	1	1	...	1	1	**2**
1	1	1	1	1	1	...	1	1	**2**

Šema bodovanja

4 boda – pronalaženje optimalne konstrukcije sa $2020 \cdot 2021 - 2694$ jedinica

1 bod – zaključak da u svakom redu mora biti bar jedna dvica ili bar dvije nule, i da u svakoj koloni mora biti bar jedna nula ili bar dvije dvice

3 boda – dobijanje nejednakosti $d + \frac{n}{2} \geq 2020$ i $n + \frac{d}{2} \geq 2021$ (dobijanje samo jedne od ovih nejednakosti vrijedi 2 boda)

2 boda – zaključak da je $d + n \geq 2694$

Napomena:

Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.

61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Bihać / Mostar / Sarajevo / Tuzla, 22.05.2021. godine

III RAZRED

Zadatak 1. Odrediti sve vrijednosti realnog parametra k za koji jednačina

$$\log(kx) = 2\log(x+1)$$

ima tačno jedno rješenje u skupu realnih brojeva**.**

Rješenje

Primijetimo da ne može biti $k = 0$ jer tada $\log(kx)$ nije definisan. Definiciono područje date jednačine je:

(1) za $k > 0, x > 0$,
(2) za $k < 0, -1 < x < 0$.

Uz uslove (1) i (2) data jednačina je ekvivalentna jednačini (jer je $2\log(x+1) = \log\left((x+1)^2\right)$)

(3) $x^2 + (2-k)x + 1 = 0$.

Pošto nas zanimaju samo realna rješenja ove jednačine, potrebno je da je njena diskriminanta veća ili jednaka 0. Diskriminanta ove jednačine je $D = (2-k)^2 - 4$. Pošto mora biti $k \neq 0$, jedino je za $k = 4$ diskriminanta $D = 0$. Tada jednačina (3) ima jedinstveno rješenje $x = 1$, koje je ujedno i jedinstveno rješenje polazne jednačine (jer je $k > 0$ i $x > 0$).

Ako je $D > 0$, tj. ako je $k < 0$ ili $k > 4$ tada iz (3) slijedi da je

$$x_{1,2} = -1 + \frac{k}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)},$$

pri čemu uzimamo da je $x_1 < x_2$.

Razmatrajmo dva slučaja:

$1°$ $k < 0$. Vidimo da x_1 ne zadovoljava uslov (2), pa ono nije rješenje polazne jednačine (jer je $-1 + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)} \leq -1$). S druge strane, uslov $-1 < -1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)} < 0$ je ekvivalentan sa uslovima $-k < \sqrt{k^2 - 4k}$ i $\sqrt{k^2 - 4k} < 2 - k$. Kako je $k < 0$, posljednje dvije nejednakosti smijemo kvadrirati, nakon čega dobijamo tačne nejednakosti $0 < -4k$ i $0 < 4$. Dakle, za $k < 0$, postoji tačno jedno rješenje polazne jednačine.

2° $k > 4$. Tada je očigledno $x_2 > 0$, a uslov $x_1 > 0$ je ekvivalentan sa $k - 2 > \sqrt{k^2 - 4k}$, što je nakon kvadriranja (zbog $k - 2 > 0$) ekvivalentno sa $4 > 0$, što je očigledno tačno. Dakle, u ovom slučaju polazna jednačina ima dva različita realna rješenja (jer oba zadovoljavaju uslov (1)).

Dakle, jednačina ima tačno jedno rješenje samo za $k = 4$ i $k < 0$ i to rješenje je:

$$x = \frac{1}{2}(k - 2 + \sqrt{k(k-4)})$$

Šema bodovanja

1 bod – postavljanje uslova (1) i (2) (ne dobijaju se bodovi ukoliko je postavljen samo jedan od uslova)
1 bod – dobijanje jednakosti (3)
2 boda – rješavanje slučaja $D = 0$
1 bod – zaključak da u slučaju $D > 0$ vrijedi $k < 0$ ili $k > 4$
3 boda – rješavanje slučaja $k < 0$
2 boda – rješavanje slučaja $k > 4$

Zadatak 2. Neka je a prirodan broj. Dokazati da su sljedeće dvije tvrdnje ekvivalentne:

i) postoji prirodan broj d takav da svaka od jednačina $x^2 - ax + d = 0$ i $x^2 - ax - d = 0$ ima bar jedno cjelobrojno rješenje;
ii) postoje prirodni brojevi b i c takvi da je $a^2 = b^2 + c^2$.

Rješenje

i) Dokažimo prvo da ako traženo d postoji onda postoje i brojevi b i c. Da bi date jednačine imale bar jedno cjelobrojno rješenje njihove diskriminante moraju biti potpuni kvadrati. Diskriminante ovih jednačina su $D_1 = a^2 - 4d$ i $D_2 = a^2 + 4d$. Neka je $D_1 = x^2$, a $D_2 = y^2$ za neke nenegativne cijele brojeve x i y. Zbog $d > 0$ vrijedi $x > y \geq 0$. Sabiranjem dobijamo da je $D_1 + D_2 = x^2 + y^2 = 2a^2$, pa je $a^2 = \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{2(x^2+y^2)}{4} = \frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{4} = (\frac{x+y}{2})^2 + (\frac{x-y}{2})^2$. Primijetimo da su brojevi x i y iste parnosti zbog $x^2 + y^2 = 2a^2$, pa su brojevi $\frac{x+y}{2}$ i $\frac{x-y}{2}$ prirodni, te možemo uzeti $b = \frac{x+y}{2}$ i $c = \frac{x-y}{2}$.

ii) Dokažimo sada drugi smjer, tj. ako postoje prirodni brojevi b i c takvi da je $a^2 = b^2 + c^2$ (1), onda postoji i traženo d. Primijetimo da je nemoguće da su oba broja b i c neparna, jer bi onda jednačina (1) bila nemoguća po modulu 4 (desna strana bi bila kongruentna 2 po modulu 4, a kvadrat a^2 ne može biti kongruentan 2 po modulu 4). Dakle, bar jedan od brojeva b i c je paran. Uzmimo da je $d = \frac{bc}{2}$ (ovo je sada prirodan broj). Sada su rješenja prve jednačine jednaka

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2bc}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{(b-c)^2}}{2} = \frac{a \pm |b-c|}{2},$$

i ona su cijeli brojevi, jer su brojevi a i $b - c$ iste parnosti iz jednačine (1).
Slično, rješenja druge jednačine jednaka su

$$y_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2bc}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{(b+c)^2}}{2} = \frac{a \pm (b+c)}{2},$$

i ona su također cijeli brojevi, jer su brojevi a i $b + c$ iste parnosti iz jednačine (1). Sada je dokaz završen.

Šema bodovanja

Prvi smjer vrijedi 6 bodova, a drugi smjer 4 boda.

Prvi smjer:

1 bod – zaključak da se broj $2a^2$ može napisati kao $x^2 + y^2$, gdje je $x^2 = a^2 + 4d$ i $y^2 = a^2 - 4d$.

3 boda – dobijanje jednakosti $a^2 = (\frac{x+y}{2})^2 + (\frac{x-y}{2})^2$

2 boda – zaključak da su $b = \frac{x+y}{2}$ i $c = \frac{x-y}{2}$ prirodni brojevi koji zadovoljavaju uslov zadatka

Drugi smjer:

1 bod – dokaz da je bar jedan od brojeva b i c paran

3 boda – dokaz da za $d = \frac{bc}{2}$ jednačine imaju rješenje u skupu cijelih brojeva

Zadatak 3. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}, x_{2022}$ različiti prirodni brojevi iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2021, 2022\}$. Odrediti najmanju i najveću moguću vrijednost izraza

$$\left|\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x_1 - x_2\right| - x_3\right| - x_4\right| - \cdots\right| - x_{2021}\right| - x_{2022}\right|.$$

Rješenje

Dokažimo prvo da je minimalna vrijednost datog izraza 1. Primijetimo da neovisno od toga kako dodijelimo vrijednosti brojevima $x_1, x_2, \ldots, x_{2022}$ izraz W je uvijek neparan (apsolutne vrijednosti i predznaci ne utiču na parnost, pa je W iste parnosti kao zbir $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2022} = 1 + 2 + \cdots + 2022 = \frac{2022 \cdot 2023}{2} = 1011 \cdot 2023$, što je neparno). Kako je $W \geq 0$ uvijek, a neparno je, zaključujemo da je $W \geq 1$. Vrijednost $W = 1$ možemo postići sa $x_k = k + 2, x_{k+1} = k + 3, x_{k+2} = k + 5, x_{k+3} = k + 4$, za $k = 1,5,9,13, \ldots, 2017$ i $x_{2021} = 2, x_{2022} = 1$. Ova konstrukcija nam odgovara jer je $\left|\left|\left|x_k - x_{k+1}\right| - x_{k+2}\right| - x_{k+4}\right| = \left|\left|\left|(k+2) - \right.\right.\right.$ *k+3−k+5−k+4=0* za svako *k=1,5,9,13,…,2017* pa dobijamo da je *W=0−x2021−x2022=0−2−1=1.*

Dokažimo sada da je maksimalna vrijednost izraza W jednaka 2021. Prvo dokažimo matematičkom indukcijom da je $W_k = \left|\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x_1 - x_2\right| - x_3\right| - x_4\right| - \cdots\right| - x_{k-1}\right| - x_k\right| \leq 2022$ za $k = 3, \ldots, 2022$.

i) Baza indukcije vrijedi, jer je $W_3 = \left|\left|x_1 - x_2\right| - x_3\right| \leq \max\{\left|x_1 - x_2\right|, x_3\} \leq 2022$ (jer je $0 < \left|x_1 - x_2\right| \leq 2022 - 1 = 2021$, a $0 < x_3 \leq 2022$).

ii) Pretpostavimo da za neko $2021 \geq k \geq 3$ vrijedi

$$W_k = \left|\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x_1 - x_2\right| - x_3\right| - x_4\right| - \cdots\right| - x_{k-1}\right| - x_k\right| \leq 2022.$$

iii) Dokažimo tvrdnju za $k+1$. Imamo da je

$$W_{k+1} = \left|\left|\left|\dots\left|\left|\left|x_1 - x_2\right| - x_3\right| - x_4\right| - \cdots\right| - x_k\right| - x_{k+1}\right| = |W_k - x_{k+1}| \leq \max(W_k, x_{k+1}) \leq 2022$$

(jer vrijedi $0 \leq W_k \leq 2022$ po induktivnoj pretpostavci, a svakako vrijedi i $0 < x_{k+1} \leq 2022$).

Sada za $k = 2022$ imamo da je $W = W_{2022} \leq 2022$, a kako je W neparno zaključujemo da je $W \leq 2021$. Vrijednost 2021 se može dostići sa $x_k = k+1, x_{k+1} = k+2, x_{k+2} = k+4, x_{k+3} = k+3$, za $k = 1,5,9,13,\dots,2017$ i $x_{2021} = 1, x_{2022} = 2022$. Ova konstrukcija nam odgovara jer je $\left|\left||x_k - x_{k+1}| -\right.\right.$ *xk+2−xk+4=(k+1)−k+2−k+4−k+3=0* za svako *k=1,5,9,13,…,2017* pa dobijamo da je $W = \left||0 - x_{2021}| - x_{2022}\right| = \left||0-1| - 2022\right| = 2021$.

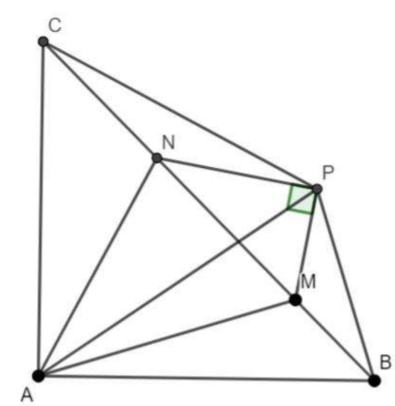
Dakle, minimalna vrijednost datog izraza je 1, a maksimalna 2021.

Šema bodovanja
2 boda – dokaz da se može postići vrijednost $W = 1$
2 boda – dokaz da se ne može postići vrijednost $W < 1$
2 boda – dokaz da se može postići vrijednost $W = 2021$
4 boda – dokaz da se ne može postići vrijednost $W > 2021$

Zadatak 4. Neka je ΔABC trougao u kojem je $\overline{AB} = \overline{AC}$ i $\angle CAB = 90^\circ$. Ako su M i N tačke na hipotenuzi $\overline{BC}$ takve da je $\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, odrediti $\angle MAN$.

Rješenje 1

Kako je $(\overline{BM} + \overline{CN})^2 > \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, to se kružnica sa centrom u M i poluprečnikom $\overline{MB}$ i kružnica sa centrom u N i poluprečnikom $\overline{NC}$ sijeku u dvije tačke. Jedna od tačaka presjeka je sa jedne strane prave BC, a druga sa druge. Onu koja je sa suprotne strane prave BC u odnosu na tačku A označimo sa P. Iz uslova zadatka $\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, pa je $\angle MPN = 90^\circ$ (tačku P smo mogli definisti i na način da van trougla ΔABC, a nad $\overline{MN}$ kao hipotenuzom konstruišemo pravougli trougao sa stranicama $\overline{BM}, \overline{CN}, \overline{MN}$, a takav trougao postoji po uslovu zadatka).



Trouglovi ΔBMP i ΔCNP su jednakokraki, pa je $\angle CPN = \angle PCN = \frac{\angle PNM}{2}$ u $\angle MPB = \angle MBP = \frac{\angle PMN}{2}$, pa je $\angle CPB = \angle CPN + \angle NPM + \angle MPB = \frac{\angle PNM + \angle PMN}{2} + \angle NPM = \frac{90^\circ}{2} + 90^\circ = 135^\circ$. Kako je $\overline{AB} = \overline{AC}$ i pri tome su A i P sa različitih strana prave BC i vrijedi $\angle BAC = 90^\circ = 2 \cdot (180^\circ - \angle CPB)$, to je tačka A centar opisane kružnice trougla ΔCPB. Sada lako uočavamo da su trouglovi ΔABM i ΔAPM podudarni (pravilo SSS), odakle je $\angle PAM = \angle BAM = \frac{\angle BAP}{2}$. Slično je i $\angle PAN = \frac{\angle PAC}{2}$, pa je $\angle MAN = \angle MAP + \angle PAN = \frac{\angle BAP + \angle PAC}{2} = \frac{\angle BAC}{2} = 45^\circ$.

Šema bodovanja

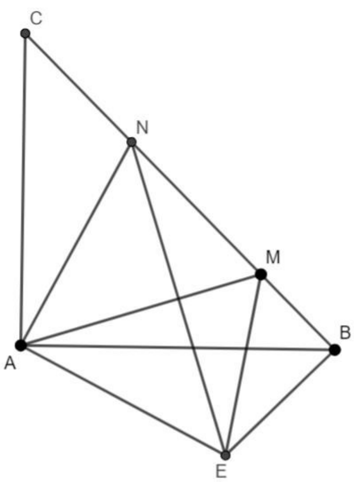
2 boda – konstrukcija tačke P tako da se zaključi i da su trouglovi ΔBMP i ΔCNP jednakokraki i da je $\angle MPN = 90°$

1 bod – dokaz da je $\angle BPC = 135°$

3 boda – zaključak da je A centar opisane kružnice trougla ΔBPC

1 bod – dokazivanje podudarnosti trouglova ΔABM i ΔAPM

3 boda – dokazivanje $\angle MAN = 45°$.



Rješenje 2

Neka je tačka E na pravoj koja prolazi kroz B i okomita je na BC, takva da vrijedi $\overline{BE} = \overline{CN}$ i tačke E i A su sa iste strane prave BC. Tada je $\overline{ME}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, pa je $\overline{ME} = \overline{MN}$. S druge strane, kako je $\angle ABE = 90° - \angle ABC = 45° = \angle BCA$, to su trouglovi ΔAEB i ΔANC podudarni (pravilo SUS). Zbog toga je $\overline{AE} = \overline{AN}$ i $\angle EAB = \angle CAN$. Sada primjećujemo da su trouglovi ΔAEM i ΔANM podudarni (pravilo SSS), pa je $\angle MAN = \angle MAE = \frac{\angle NAE}{2} = \frac{\angle NAB + \angle EAB}{2} = \frac{\angle 90° - \angle CAN + \angle EAB}{2} = 45°$.

Šema bodovanja

2 boda – konstrukcija tačke E tako da se zaključi da je trougao ΔNME jednakokraki

2 boda – dokaz da je $AE = AN$

1 bod – dokaz da je $\angle EAB = \angle CAN$

3 boda – dokaz da je $\angle MAN = \angle MAE$

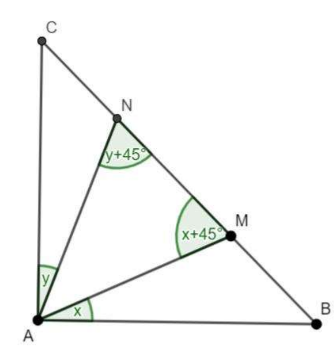
2 boda – dokaz da je $\angle MAN = 45°$.

Rješenje 3

Iz uslova zadatka imamo

$$\begin{aligned}\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 &= \overline{MN}^2 = (\overline{BC} - \overline{BM} - \overline{CN})^2 \\ &= \overline{BC}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 - 2 \cdot (\overline{BC} \cdot \overline{BM} + \overline{BC} \cdot \overline{CN} - \overline{CN} \cdot \overline{BM}),\end{aligned}$$

odakle je $\overline{BC}^2 + 2 \cdot \overline{CN} \cdot \overline{BM} = 2 \cdot \overline{BC} \cdot (\overline{BM} + \overline{CN})$ $(*)$.



Neka je $\angle BAM = x$ i $\angle CAN = y$. Kao vanjske uglove dobijamo $\angle AMN = x + 45°$ i $\angle ANM = y + 45°$.

Iz sinusnih teorema lako dobijamo $\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2}, \overline{BM} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin x}{\sin(135° - x)} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin x}{\sin(x + 45°)} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 + ctg\, x}, \overline{CN} = \overline{AC} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 + ctg} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 + ctg\, y}$. Ako prethodne jednakosti uvrstimo u $(*)$, uz oznake $ctg\, x = m, ctg\, y = n$ (očigledno je $m > 0$ i $n > 0$, jer su x i y oštri uglovi), nakon skraćivanja sa $2 \cdot \overline{AB}^2$ dobijamo:

$$1+\frac{2}{(1+m)(1+n)}=2\cdot\left(\frac{1}{1+m}+\frac{1}{1+n}\right) \Rightarrow$$

$$1+m+n+mn+2=4+2m+2n \quad \Longrightarrow$$

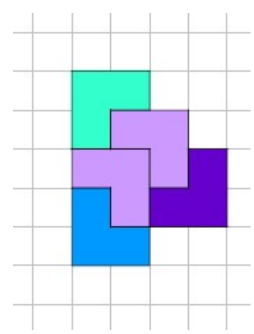
$$mn-1=m+n \qquad \Longrightarrow$$

$$1=\frac{mn-1}{m+n}=\frac{ctg\,x\cdot ctg\,y-1}{ctg\,x+ctg\,y}=ctg(x+y).$$

Kako je $0° < x+y < 90°$, to je $x+y=45°$, odakle je $\angle MAN = 45°$.

Šema bodovanja
1 bod – dobijanje jednakosti $(*)$
3 boda – svođenje na jednakost u kojoj se pojavljuju samo $ctg\,x$ i $ctg\,y$
5 bodova – dobijanje $ctg(x+y)=1$
1 boda – dokaz da je $\angle MAN = 45°$.

Zadatak 5. Beskonačna ploča je podijeljena na jedinične kvadratiće. Figuru koja se dobije izbacivanjem jednog kvadratića iz kvadrata formata 2×2 zovemo $L-figurom$. Konfiguracijom ćemo zvati svaki raspored $L-figura$ na ploči takav da nikoje dvije $L-figure$ ne pokrivaju isti kvadratić. Ako za svaku $L-figuru$ u konfiguraciji vrijedi da je kvadratić koji zajedno sa tom $L-figurom$ gradi kvadrat formata 2×2 pokriven drugom $L-figurom$, tu konfiguraciju zovemo *savršenom* (na slici je dat primjer *savršene* konfiguracije sa pet $L-figura$). Neka je data *savršena* konfiguracija sa 2021-om $L-figurom$. Dokazati da se nekoliko $L-figura$ (barem jedna, ali ne i sve) iz te *savršene* konfiguracije može ukloniti sa ploče tako da na ploči i dalje ostane *savršena* konfiguracija.



Rješenje
Primijetimo da, ukoliko postoje dvije $L-figure$ postavljene tako da prekrivaju 2×3 pravougaonik, uklanjanjem preostalih 2019 uglova ispunjavamo uslov zadatka. Nadalje pretpostavljamo da takva dvije $L-figure$ ne postoje.
Posmatrajmo proizvoljnu $L-figuru\ u$ sa ploče. Postoji jedinstven kvadrat 2×2 koji sadrži sva njena polja. Po uslovu zadatka postoji $L-figura\ v$ koja pokriva preostalo polje ovog kvadrata. Tada ćemo reći da $L-figura\ v$ *nadopunjuje* $L-figuru\ u$. Konstruišimo usmjeren graf G čiji su čvorovi $L-figure$ ploče, i grana iz figure u u figuru v postoji ako i samo ako v nadopunjuje u.
Očigledno u grafu G svaki čvor ima tačno jednu izlaznu granu. Ako postoji čvor koji nema ulaznu granu, on ne nadopunjuje nijednu $L-figuru$, pa njenim uklanjanjem osobina i dalje važi. Pretpostavimo zato da takav čvor ne postoji. Tada svaki čvor ima barem jednu ulaznu i tačno jednu izlaznu granu. Međutim, kako

je zbir ulaznih stepena jednak zbiru izlaznih stepena, svaki čvor mora imati tačno jednu ulaznu granu. Odatle se lako dobija da je G unija disjunktnih ciklusa. Ako postoji više od jednog ciklusa, tada oni imaju manje od 2021 čvorova, pa uklanjanjem svih ciklusa osim jednog ispunjavamo uslov zadatka.
Ostaje da pokažemo da ne može postojati tačno jedan ciklus, tj. da svih 2021 čvorova pripada istom ciklusu. Pretpostavimo suprotno. *Centrom* $L-figure$ nazivamo centar 2×2 kvadrata koji sadrži sva njegova polja (drugim riječima, centar $L-figure$ je zajedničko tjeme tri jedinična kvadrata koji je grade). Kako smo pretpostavili da ne postoji 2×3 pravougaonik pokriven sa dva $L-figure$, direktnom provjerom dobijamo da, ako jedna figura nadopunjuje drugu, tada se njihovi centri razlikuju za 1 i po x-koordinati i po y-koordinati (odnosno, njihovi centri su naspramna tjemena nekog polja ploče). Slijedi da u ciklusu parnost koordinata centara čvorova alternira, pa broj čvorova u ciklusu mora biti paran. Ovo je kontradikcija s pretpostavkom da postoji ciklus sa 2021 čvorova, pa je ona netačna.
Dakle, može se ukloniti nekoliko $L-figura$ (barem jedna, ali ne i sve) iz *savršene* konfiguracije sa 2021-om $L-figurom$ tako da na ploči i dalje ostane *savršena* konfiguracija.

Šema bodovanja

1 bod – zaključak da je tvrdnja tačna ukoliko dvije $L-figure$ prekrivaju 2×3 pravougaonik i ukoliko ne postoji čvor koji nema ulaznu granu (ili neka ekvivalentna tvrdnja)
2 boda – zaključak da ukoliko nema čvora sa ulaznim stepenom 0, ulazni stepen svakog čvora je 1
2 boda – zaključak da je graf unija disjunktnih ciklusa
1 bod – zaključak da je tvrdnja tačna ukoliko se graf sastoji od više od jednog ciklusa
4 boda – dokaz da se graf ne može sastojati od samo jednog ciklusa

Napomena:

Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.

61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Bihać / Mostar / Sarajevo / Tuzla, 22.05.2021. godine

IV RAZRED

Zadatak 1. Odrediti sve vrijednosti realnog parametra m tako da jednačina
$$x^4-(3m+2)x^2+m^2=0$$
ima četiri realna rješenja koja formiraju aritmetičku progresiju.

Rješenje 1

Data jednadžba je bikvadratna. Smjenom $x^2=t$ ona postaje
$$t^2-(3m+2)t+m^2=0.$$
Da bi posljednja jednadžba imala realna rješenja mora vrijediti
$$(3m+2)^2-4m^2\geq 0, \text{ tj.} (m+2)(5m+2)\geq 0.$$
Dakle, mora vrijediti $m\in(-\infty,-2]\cup\left[-\frac{2}{5},+\infty\right)$. Rješenja su data sa
$$t_{1,2}=\frac{3m+2\pm\sqrt{(3m+2)^2-4m^2}}{2}.$$
Iz uslova da polazna jednačina ima četiri realna rješenja vidimo da mora biti $3m+2>0$ što sa ranije uvedenim ograničenjem za m daje da $m\in\left[-\frac{2}{5},+\infty\right)$.
Primijetimo da za $m\in\left[-\frac{2}{5},+\infty\right)$ vrijedi da je $3m+2\geq\sqrt{(3m+2)^2-4m^2}$.

Rješenja polazne jednačine data su sa
$$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{3m+2\pm\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}.$$
Da bi data rješenja formirala aritmetičku progresiju moraju razlike susjednih članova progresije, zapisane u rastućem ili opadajućem poretku, biti jednake. Napišimo rješenja u rastućem poretku
$$-\sqrt{\frac{3m+2+\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}},-\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}},\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}},\sqrt{\frac{3m+2+\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}$$
Kako za prva tri člana mora vrijediti
$$-\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}+\sqrt{\frac{3m+2+\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}=\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}+\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}},$$
to imamo

$$\sqrt{\frac{3m+2+\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}} = 3\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}.$$

Istu jednačinu bismo dobili da smo posmatrali uslov jednakosti razlika za posljednja tri člana.

Rješavanjem posljednje jednačine dobijemo

$$3m+2+\sqrt{5m^2+12m+4} = 9\left(3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}\right).$$

tj. nakon sređivanja

$$25(5m^2+12m+4) = 16(3m+2)^2.$$

Posljednja jednačina se svodi na

$$19m^2-108m-36=0,$$

čija su rješenja $m=6$ i $m=-\frac{6}{19}$ (primijetimo da su oba rješenja veća od $-\frac{2}{5}$).

Dakle, za $m=6$ i $m=-\frac{6}{19}$ polazna jednačina ima četiri realna rješenja koja formiraju aritmetičku progresiju.

Za $m=6$ dobije se aritmetička progresija $-3\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\sqrt{2}$, a za $m=-\frac{6}{19}$ aritmetička progresija glasi $-3\sqrt{\frac{2}{19}}, -\sqrt{\frac{2}{19}}, \sqrt{\frac{2}{19}}, 3\sqrt{\frac{2}{19}}$.

Šema bodovanja

1 bod – dobijanje rješenja po t

2 boda – dobijanje uslova pod kojim su rješenja $x_{1,2,3,4}$ realna

1 bod – dobijanje eksplicitnog izraza za $x_{1,2,3,4}$

1 bod – dobijanje ispravnog poretka rješenja $x_{1,2,3,4}$ u aritmetičkoj progresiji

3 boda – dobijanje uslova $\sqrt{\frac{3m+2+\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}} = 3\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}$

2 boda – dobijanje rješenja za m

Rješenje 2

Zadana je jednačina

$$x^4-(3m+2)x^2+m^2=0. \quad (1)$$

Uvedimo smjenu $x^2=t$. Jednačina sada postaje

$$t^2-(3m+2)t+m^2=0. \quad (2)$$

S obzirom da rješenja x_1, x_2, x_3, x_4 jednačine (1) moraju biti realni brojevi, rješenja t_1, t_2 jednačine (2) moraju biti nenegativni realni brojevi. Da bi ta rješenja bila realni brojevi, mora biti

$$(3m+2)^2 - 4m^2 \geq 0,$$

odakle je

$$m \in (-\infty, -2] \cup \left[-\frac{2}{5}, +\infty\right).$$

Neka su t_1, t_2 rješenja jednačine (2). Tada su rješenja jednačine (1) brojevi $\pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2}$. Iz uvjeta da oni čine artimetičku progresiju, jednostavno zaključujemo (bez umanjenja općenitosti jer ništa se ne mijenja ako zamijenimo mjesta t_1 i t_2) da su ta rješenja ovako poredana po veličini:

$$-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}.$$

Neka je d razlika te aritmetičke progresije. Imamo da je

$$d = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_1}, \text{ tj. } \sqrt{t_1} = \frac{d}{2}.$$

Također, s obzirom da je u aritmetičkoj progresiji svaki član niza, počevši od drugog, aritmetička sredina njemu dva susjedna člana niza, zaključujemo da je

$$\frac{-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}}{2} = -\sqrt{t_1}, \text{ tj. } \sqrt{t_2} = \frac{3d}{2}.$$

Do istih uvjeta dolazimo posmatranjem posljednja tri člana niza.

Sada, iz Vieteovih formula primijenjenih na jednačinu (2) dobivamo

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3m + 2 \\ t_1 \cdot t_2 = m^2 \end{cases}$$

Zbog $t_1, t_2 \geq 0$ zaključujemo da mora biti $3m + 2 \geq 0$, tj.

$$m \geq -\frac{2}{3}.$$

Dakle, mora vrijediti

$m \in \left[-\frac{2}{5}, +\infty\right).$ (3)

Sada na osnovu gore navedenih jednakosti iz Vieteovih formula i rješenja jednačine (2) izraženih preko razlike d niza, dobivamo

$$\left(\sqrt{t_1 \cdot t_2}\right)^2 = m^2 \Leftrightarrow \left(\frac{d}{2} \cdot \frac{3d}{2}\right)^2 = m^2 \Leftrightarrow 9d^4 = 16m^2 \Leftrightarrow d^2 = \frac{4|m|}{3},$$

$$t_1+t_2=3m+2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}\right)^2-2\sqrt{t_1\cdot t_2}=3m+2 \Leftrightarrow \left(\frac{d}{2}+\frac{3d}{3}\right)^2-2\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{3d}{2}=3m+2$$

$$\Leftrightarrow d^2=\frac{6m+4}{5}.$$

Izjednačavanjem desnih strana gornjih dviju jednakosti, dobivamo

$$\frac{4|m|}{3}=\frac{6m+4}{5},$$

odakle je $m=-6/19$ ili $m=6$.

Obje vrijednosti zadovoljavaju uvjet (3).

Za $m=-6/19$ dobivamo rješenja:

$$-3\sqrt{\frac{2}{19}},-\sqrt{\frac{2}{19}},\sqrt{\frac{2}{19}},3\sqrt{\frac{2}{19}}.$$

Za $m=6$ dobivamo rješenja: $-3\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2},3\sqrt{2}$.

Šema bodovanja

2 boda – dobijanje uvjeta pod kojim su rješenja $x_{1,2,3,4}$ realna

3 boda – izražavanje $\sqrt{t_1}$ i $\sqrt{t_2}$ preko d (ili dobijanje $\sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1}$

3 boda – dobijanje uslova $\frac{4|m|}{3}=\frac{6m+4}{5}$

2 boda – dobijanje rješenja za m

Zadatak 2. Za dva skupa A i B definišemo skup $A+B$ sa $A+B=\{a+b|a\in A,b\in B\}$. Na primjer, ako je $A=\{1,2,3\}$ i $B=\{4,5,6\}$, onda je $A+B=\{5,6,7,8,9\}$.

a) Odrediti najveći prirodan broj m takav da postoje skupovi A i B, oba podskupovi skupa $\mathbb{N}\cup\{0\}$, takvi da i A i B imaju po m elemenata i vrijedi $A+B=\{0,1,2,\dots,2021\}$.

b) Odrediti najmanji prirodan broj n takav da postoje skupovi A i B, oba podskupovi skupa $\mathbb{N}\cup\{0\}$, takvi da i A i B imaju po n elemenata i vrijedi $A+B=\{0,1,2,\dots,2021\}$.

Rješenje

a) Neka je $A=\{a_1,a_2,\dots a_m\}$ i $B=\{b_1,b_2,\dots b_m\}$, pri čemu vrijedi $a_i<a_{i+1}$ i $b_i<b_{i+1}$ za $i=1,2,\dots,m-1$. Imamo:

$$a_1+b_1<a_1+b_2<a_2+b_2<\cdots<a_{m-1}+b_m<a_m+b_m$$

Svi ovi brojevi su elementi skupa $A+B$ i po parovima su različiti, pa vrijedi $|A+B|\geq 2m-1$, odnosno $2m-1\leq 2022 \Leftrightarrow m\leq 1011$. Ova granica se može dostići:

$$A=\{0,1,2,\dots.1010\}$$
$$B=\{0,1,2,\dots,1009,1011\}$$

pa je traženi broj $m=1011$.

b) Kako je $|A| = |B| = n$, to je $|A + B| \leq n \cdot n = n^2$ jer se svaki element skupa $A + B$ dobija kao zbir jednog elementa A i jednog elementa B. Dakle, $n^2 \geq 2022 \Leftrightarrow n \geq 45$. Ova granica se može dostići:

$$A = \{0, 1, 2, \ldots, 44\}$$
$$B = \{0 \cdot 45, 1 \cdot 45, 2 \cdot 45\ \ldots 43 \cdot 45, 2021 - 44\}$$

Očigledno se u skupu $A + B$ nalaze svi brojevi iz $\mathbb{N} \cup \{0\}$ manji ili jednaki $43 \cdot 45 + 44$ (mogu se dobiti kao $r + q \cdot 45$ gdje su r, q redom ostatak i količnik pri dijeljenju sa 45), kao i svi brojevi između $2021 - 44$ i 2021. Kako je $43 \cdot 45 + 44 > 2021 - 44$, to se u skupu $A + B$ nalaze svi brojevi $0, 1, 2, \ldots, 2021$. Očito je 2021 najveći element ovog skupa, pa je $|A + B| = \{0, 1, \ldots, 2021\}$. Dakle, traženi broj je $n = 45$.

Šema bodovanja

Dijelovi pod a) i b) nose po 5 bodova.

2 boda – pronalaženje skupova A i B koji imaju po 1011 elemenata

3 boda – dokaz da skupovi ne mogu imati više od 1011 elemenata

3 boda – pronalaženje skupova A i B koji imaju po 45 elemenata

2 boda – dokaz da skupovi ne mogu imati manje od 45 elemenata

Zadatak 3. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}, x_{2022}$ različiti prirodni brojevi iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2021, 2022\}$. Odrediti najmanju i najveću moguću vrijednost izraza

$$\left|\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x_1 - x_2\right| - x_3\right| - x_4\right| - \cdots\right| - x_{2021}\right| - x_{2022}\right|.$$

Rješenje

Dokažimo prvo da je minimalna vrijednost datog izraza 1. Primijetimo da neovisno od toga kako dodijelimo vrijednosti brojevima $x_1, x_2, \ldots, x_{2022}$ izraz W je uvijek neparan (apsolutne vrijednosti i predznaci ne utiču na parnost, pa je W iste parnosti kao zbir $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2022} = 1 + 2 + \cdots + 2022 = \frac{2022 \cdot 2023}{2} = 1011 \cdot 2023$, što je neparno). Kako je $W \geq 0$ uvijek, a neparno je, zaključujemo da je $W \geq 1$. Vrijednost $W = 1$ možemo postići sa $x_k = k + 2, x_{k+1} = k + 3, x_{k+2} = k + 5, x_{k+3} = k + 4$, za $k = 1,5,9,13, \ldots ,2017$ i $x_{2021} = 2, x_{2022} = 1$. Ova konstrukcija nam odgovara jer je $\left|\left|\left|x_k - x_{k+1}\right| - x_{k+2}\right| - x_{k+4}\right| = \left|\left|\left|(k+2) -\right.\right.\right.$ $k+3-k+5-k+4=0$ za svako $k=1,5,9,13,\ldots,2017$ pa dobijamo da je $W=0-x2021-x2022=0-2-1=1$.

Dokažimo sada da je maksimalna vrijednost izraza W jednaka 2021. Prvo dokažimo matematičkom indukcijom da je $W_k = \left|\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x_1 - x_2\right| - x_3\right| - x_4\right| - \cdots\right| - x_{k-1}\right| - x_k\right| \leq 2022$ za $k = 3, \ldots ,2022$.

i) Baza indukcije vrijedi, jer je $W_3 = \left|\left|x_1 - x_2\right| - x_3\right| \leq \max\{|x_1 - x_2|, x_3\} \leq 2022$ (jer je $0 < |x_1 - x_2| \leq 2022 - 1 = 2021$, a $0 < x_3 \leq 2022$).

ii) Pretpostavimo da za neko $2021 \geq k \geq 3$ vrijedi

$$W_k = \left|\left|\left|\dots\left|\left||x_1 - x_2| - x_3\right| - x_4\right| - \cdots\right| - x_{k-1}\right| - x_k\right| \leq 2022.$$

iii) Dokažimo tvrdnju za $k+1$. Imamo da je

$$W_{k+1} = \left|\left|\left|\dots\left|\left||x_1 - x_2| - x_3\right| - x_4\right| - \cdots\right| - x_k\right| - x_{k+1}\right| = |W_k - x_{k+1}| \leq \max(W_k, x_{k+1}) \leq 2022$$

(jer vrijedi $0 \leq W_k \leq 2022$ po induktivnoj pretpostavci, a svakako vrijedi i $0 < x_{k+1} \leq 2022$).

Sada za $k = 2022$ imamo da je $W = W_{2022} \leq 2022$, a kako je W neparno zaključujemo da je $W \leq 2021$. Vrijednost 2021 se može dostići sa $x_k = k+1, x_{k+1} = k+2, x_{k+2} = k+4, x_{k+3} = k+3$, za $k = 1,5,9,13,\dots,2017$ i $x_{2021} = 1, x_{2022} = 2022$. Ova konstrukcija nam odgovara jer je $\left||x_k - x_{k+1}| -\right.$ *xk+2−xk+4=(k+1)−k+2−k+4−k+3=0* za svako *k=1,5,9,13,…,2017* pa dobijamo da je $W = \left||0 - x_{2021}| - x_{2022}\right| = \left||0-1| - 2022\right| = 2021.$

Dakle, minimalna vrijednost datog izraza je 1, a maksimalna 2021.

Šema bodovanja

2 boda – dokaz da se može postići vrijednost $W = 1$

2 boda – dokaz da se ne može postići vrijednost $W < 1$

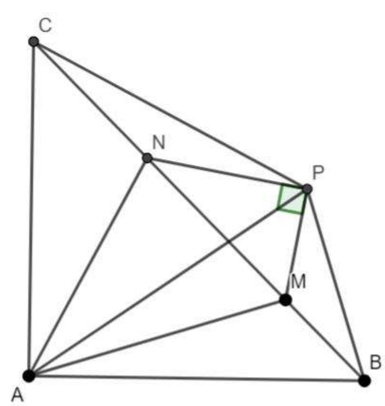
2 boda – dokaz da se može postići vrijednost $W = 2021$

4 boda – dokaz da se ne može postići vrijednost $W > 2021$

Zadatak 4. Neka je ΔABC trougao u kojem je $\overline{AB} = \overline{AC}$ i $\angle CAB = 90^\circ$. Ako su M i N tačke na hipotenuzi $\overline{BC}$ takve da je $\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, odrediti $\angle MAN$.

Rješenje 1

Kako je $(\overline{BM} + \overline{CN})^2 > \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, to se kružnica sa centrom u M i poluprečnikom $\overline{MB}$ i kružnica sa centrom u N i poluprečnikom $\overline{NC}$ sijeku u dvije tačke. Jedna od tačaka presjeka je sa jedne strane prave BC, a druga sa druge. Onu koja je sa suprotne strane prave BC u odnosu na tačku A označimo sa P. Iz uslova zadatka $\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, pa je $\angle MPN = 90^\circ$ (tačku P smo mogli definisti i na način da van trougla ΔABC, a nad $\overline{MN}$ kao hipotenuzom konstruišemo pravougli trougao sa stranicama $\overline{BM}, \overline{CN}, \overline{MN}$, a takav trougao postoji po uslovu zadatka).



Trouglovi ΔBMP i ΔCNP su jednakokraki, pa je $\angle CPN = \angle PCN = \frac{\angle PNM}{2}$ u $\angle MPB = \angle MBP = \frac{\angle PMN}{2}$, pa je $\angle CPB = \angle CPN + \angle NPM + \angle MPB = \frac{\angle PNM + \angle PMN}{2} + \angle NPM = \frac{90^\circ}{2} + 90^\circ = 135^\circ$. Kako je

$\overline{AB} = \overline{AC}$ i pri tome su A i P sa različitih strana prave BC i vrijedi $\angle BAC = 90° = 2 \cdot (180° - \angle CPB)$, to je tačka A centar opisane kružnice trougla ΔCPB. Sada lako uočavamo da su trouglovi ΔABM i ΔAPM podudarni (pravilo SSS), odakle je $\angle PAM = \angle BAM = \frac{\angle BAP}{2}$. Slično je i $\angle PAN = \frac{\angle PAC}{2}$, pa je $\angle MAN = \angle MAP + \angle PAN = \frac{\angle BAP + \angle PAC}{2} = \frac{\angle BAC}{2} = 45°$.

Šema bodovanja

2 boda – konstrukcija tačke P tako da se zaključi i da su trouglovi ΔBMP i ΔCNP jednakokraki i da je $\angle MPN = 90°$

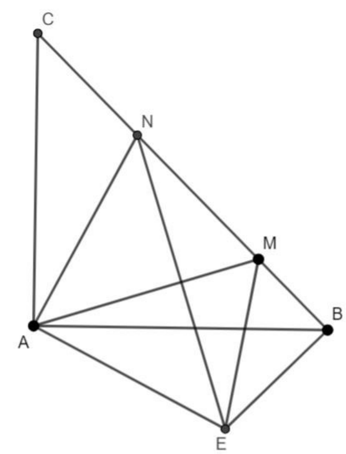
1 bod – dokaz da je $\angle BPC = 135°$

3 boda – zaključak da je A centar opisane kružnice trougla ΔBPC

1 bod – dokazivanje podudarnosti trouglova ΔABM i ΔAPM

3 boda – dokazivanje $\angle MAN = 45°$.

Rješenje 2



Neka je tačka E na pravoj koja prolazi kroz B i okomita je na BC, takva da vrijedi $\overline{BE} = \overline{CN}$ i tačke E i A su sa iste strane prave BC. Tada je $\overline{ME}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, pa je $\overline{ME} = \overline{MN}$. S druge strane, kako je $\angle ABE = 90° - \angle ABC = 45° = \angle BCA$, to su trouglovi ΔAEB i ΔANC podudarni (pravilo SUS). Zbog toga je $\overline{AE} = \overline{AN}$ i $\angle EAB = \angle CAN$. Sada primjećujemo da su trouglovi ΔAEM i ΔANM podudarni (pravilo SSS), pa je $\angle MAN = \angle MAE = \frac{\angle NAE}{2} = \frac{\angle NAB + \angle EAB}{2} = \frac{\angle 90° - \angle CAN + \angle EAB}{2} = 45°$.

Šema bodovanja

2 boda – konstrukcija tačke E tako da se zaključi da je trougao ΔNME jednakokraki

2 boda – dokaz da je $AE = AN$

1 bod – dokaz da je $\angle EAB = \angle CAN$

3 boda – dokaz da je $\angle MAN = \angle MAE$

2 boda – dokaz da je $\angle MAN = 45°$.

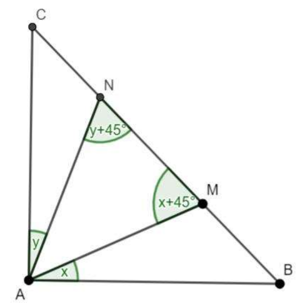
Rješenje 3

Iz uslova zadatka imamo

$$\begin{aligned} \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 &= \overline{MN}^2 = (\overline{BC} - \overline{BM} - \overline{CN})^2 \\ &= \overline{BC}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 - 2 \cdot (\overline{BC} \cdot \overline{BM} + \overline{BC} \cdot \overline{CN} - \overline{CN} \cdot \overline{BM}), \end{aligned}$$

odakle je $\overline{BC}^2 + 2 \cdot \overline{CN} \cdot \overline{BM} = 2 \cdot \overline{BC} \cdot (\overline{BM} + \overline{CN})$ $(*)$.

Neka je $\angle BAM = x$ i $\angle CAN = y$. Kao vanjske uglove dobijamo $\angle AMN = x + 45°$ i $\angle ANM = y + 45°$.



Iz sinusnih teorema lako dobijamo $\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2}, \overline{BM} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin x}{\sin(135° - x)} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin x}{\sin(x + 45°)} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 + ctg\, x}, \overline{CN} = \overline{AC} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 + ctg} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 + ctg\, y}$. Ako prethodne jednakosti uvrstimo u $(*)$, uz oznake $ctg\, x = m, ctg\, y = n$ (očigledno je $m > 0$ i $n > 0$, jer su x i y oštri uglovi), nakon skraćivanja sa $2 \cdot \overline{AB}^2$ dobijamo:

$$1 + \frac{2}{(1+m)(1+n)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{1+m} + \frac{1}{1+n}\right) \Rightarrow$$

$$1 + m + n + mn + 2 = 4 + 2m + 2n \quad \Longrightarrow$$

$$mn - 1 = m + n \qquad \Longrightarrow$$

$$1 = \frac{mn - 1}{m + n} = \frac{ctg\, x \cdot ctg\, y - 1}{ctg\, x + ctg\, y} = ctg(x + y).$$

Kako je $0° < x + y < 90°$, to je $x + y = 45°$, odakle je $\angle MAN = 45°$.

Šema bodovanja

1 bod – dobijanje jednakosti $(*)$

3 boda – svođenje na jednakost u kojoj se pojavljuju samo $ctg\, x$ i $ctg\, y$

5 bodova – dobijanje $ctg(x + y) = 1$

1 boda – dokaz da je $\angle MAN = 45°$.

Zadatak 5. Ako su m, n, r prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$1 + m + n\sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{2r-1},$$

dokazati da je broj m potpun kvadrat.

Rješenje 1

Najprije primijetimo da je m neparan broj. Naime, svi članovi u stepenovanju $\left(2 + \sqrt{3}\right)^{2r-1}$ osim posljednjeg su parni, a posljednji je $3^{r-1}\sqrt{3}$, pa ne pripada racionalnom dijelu izraza. Zato je racionalni dio izraza paran, odnosno $1 + m$ je paran, odnosno m je neparan. Dalje, iz binomne formule direktno slijedi da, ako je $\left(2 + \sqrt{3}\right)^{2r-1} = A + B\sqrt{3}$, tada je $\left(2 - \sqrt{3}\right)^{2r-1} = A - B\sqrt{3}$. Zato imamo

$$1 + m + n\sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{2r-1} \Rightarrow$$

$$1 + m - n\sqrt{3} = \left(2 - \sqrt{3}\right)^{2r-1}$$

Množenjem ovih jednakosti dobijamo

$$(1+m)^2-\left(n\sqrt{3}\right)^2=\left(\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^{2r-1} \Leftrightarrow$$
$$(m+1)^2-3n^2=\left(2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^{2r-1} \Leftrightarrow$$
$$(m+1)^2-3n^2=1 \Leftrightarrow$$
$$m(m+2)=3n^2$$

Kako je m neparan, to je $nzd(m, m+2)=1$, pa je $m=3x^2$ i $m+2=y^2$ ili $m=x^2$ i $n=3y^2$ za cijele brojeve x, y. Prvi slučaj otpada jer je tada $m \equiv 0 \ (mod\ 3) \Rightarrow m+2 \equiv 2 \ (mod\ 3) \Rightarrow y^2 \equiv 2 \ (mod\ 3)$, što je nemoguće. Dakle, vrijedi drugi slučaj, pa je m potpun kvadrat, $q.e.d.$

Šema bodovanja

1 bod – dobijanje jednakosti $1+m-n\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{2r-1}$
4 boda – dobijanje jednakosti $m(m+2)=3n^2$
1 bod – zaključak da je m neparan, te da su m i $m+2$ relativno prosti
2 boda – zaključak da je jedan od brojeva m i $m+2$ kvadrat, a drugi trostruki kvadrat
2 boda – zaključak da je nemoguće da je $m+2$ kvadrat, a m trostruki kvadrat

Rješenje 2

Neka su $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ i $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ nizovi takvi da vrijedi $1+m_i+n_i\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2i-1}, \forall i\in\mathbb{N}$ i neka je $t_i=1+m_i$, $i\in\mathbb{N}$. Drugim riječima, t_i i n_i su redom racionalni i iracionalni dio izraza $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2i-1}$.
Imamo

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2i+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{2i-1}=\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(t_i+n_i\sqrt{3}\right)=(7t_i+12n_i)+(4t_i+7n_i)\sqrt{3}$$

odnosno

$$t_{i+1}=7t_i+12n_i \quad n_{i+1}=4t_i+7n_i$$

Množenjem prve relacije sa 7, druge sa 12 i oduzimanjem dobijamo

$$7t_{i+1}-12n_{i+1}=t_i \Leftrightarrow$$
$$12n_{i+1}=7t_{i+1}-t_i \Leftrightarrow$$
$$12n_i=7t_i-t_{i-1}$$

Uvrštavajući ovo u prvu rekurzivnu relaciju dobijamo

$$t_{i+1}=14t_i-t_{i-1}$$

Rješavanjem ove rekurzivne relacije (početni uslovi su $t_1=2$ i $t_2=26$) dobijamo

$$t_i=\frac{1}{2}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(7-4\sqrt{3}\right)^i+\frac{1}{2}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(7+4\sqrt{3}\right)^i$$

Nakon sređivanja koristeći činjenicu $7\pm4\sqrt{3}=\left(2\pm\sqrt{3}\right)^2$ dobijamo

$$t_i=\frac{1}{2}\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^{2i-1}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{2i-1}\right)$$

Posmatrajmo niz $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ definisan sa $u_1=1, u_2=5$ i $u_{j+1}=4u_j-u_{j-1}$. Rješavanjem rekurzivne relacije dobijamo

$$u_j=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(-1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^j-\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^j\right)$$

Direktnim uvrštavanjem dobijamo da je $t_i = u_i^2 + 1$, odnosno $m_i = u_i^2$. Kako su po definiciji niza $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ njegovi članovi cijeli brojevi, dobijamo da je m_i potpun kvadrat za sve $i \in \mathbb{N}$, pa specijalno i za $i = r$, $q.e.d.$

(Napomena: Jednakost $t_i = u_i^2 + 1$ je moguće dokazati i koristeći matematičku indukciju)

Šema bodovanja

1 boda – uvođenje nizova m_i i n_i
2 boda – dobijanje rekurzivnih relacija ekvivalentnih sa $t_{i+1} = 7t_i + 12n_i,\ n_{i+1} = 4t_i + 7n_i$
2 boda – dobijanje vrijednosti t_i u zatvorenoj formi
2 boda – uvođenje niza u_i
3 boda – dokaz da je $u_i^2 + 1$

Napomena:

Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.