Udruženje matematičara Kantona Sarajevo u saradnji sa
Udruženjem matematičara "Algoritam" Mostar, Udruženjem matematičara Tuzlanskog kantona i Pedagoškim zavodom Tuzla

61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Mostar / Sarajevo / Tuzla, 16.05.2021. godine

VII RAZRED

Zadatak 1. Ako je $\frac{a}{b} = 16$ i $\frac{b}{c} = 5$, pri čemu su b i c različiti od nule, izračunati vrijednost izraza $\frac{a+16b+5c}{25a+4b+c}$.

Zadatak 2. Za broj kažemo da je *lijep* ako se sastoji samo od cifara 3 i 4, pri čemu se cifra 3 pojavljuje bar jednom, a cifra 4 tačno jednom (npr. brojevi $43, 343, 3334$ su neki od *lijepih* brojeva).

a) Dokazati da *lijep* broj ne može biti djeljiv sa više od dva broja iz skupa $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

b) Odrediti najmanji *lijep* broj koji je djeljiv sa tačno dva broja iz skupa A. Odgovor obrazložiti!

Zadatak 3. Neka je ΔABC pravougli trougao sa pravim uglom u vrhu A, pri čemu je $\overline{AB} > \overline{AC}$. Tačka D je na duži $\overline{AC}$, a tačka E na duži $\overline{BD}$, tako da vrijedi $\angle ABC = \angle ECD = \angle CED$. Neka je F tačka na produžetku stranice $\overline{AC}$ preko vrha A takva da vrijedi $\angle BFA = 2 \cdot \angle ABC$.

a) Dokazati da je trougao ΔFBC jednakokraki.

b) Dokazati da je dužina duži $\overline{BE}$ dvostruko veća od dužine duži $\overline{AD}$.

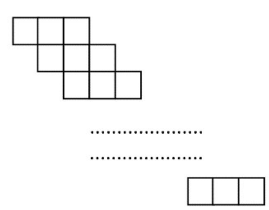
Zadatak 4. Na policu u školskoj bibiloteci treba rasporediti dvije vrste knjiga, udžbenike iz matematike i udžbenike iz fizike. Udžbenici iz istog predmeta su iste debljine. Ako se na policu slažu samo udžbenici iz matematike, poznato je da ih može stati 9, ali ne može 10, a ako se na policu slažu samo udžbenici iz fizike, onda ih može stati 15, ali ne može 16.

a) Može li na policu istovremeno stati 6 udžbenika iz matematike i 5 udžbenika iz fizike?

b) Može li na policu istovremeno stati 7 udžbenika iz matematike i 5 udžbenika iz fizike?

Odgovore obrazložiti!

Zadatak 5. Figuru na slici, koja se sastoji od 12 redova sa po 3 kvadratića (ukupno 36 kvadratića), pri čemu je svaki red „pomjeren" jedno mjesto udesno u odnosu na prethodni, zovemo stepenicama. Na koliko je načina moguće brojeve $1,2,3,\ldots,36$ upisati u kvadratiće od kojih su napravljene stepenice (svaki broj tačno jednom), tako da je u svakom kvadratiću upisan jedan broj i da za svaki kvadratić vrijedi da je broj upisan u njemu manji i od broja u kvadratiću koji je desno od njega (ukoliko takav kvadratić postoji) i od broja u kvadratiću ispod njega (ukoliko takav kvadratić postoji)?



Trajanje izrade zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

SRETNO!

61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Mostar / Sarajevo / Tuzla, 16.05.2021. godine

VIII RAZRED

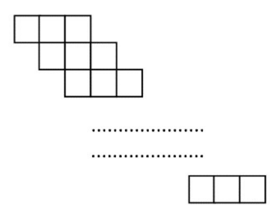
Zadatak 1. U pravouglom trouglu ΔABC na katetama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ date su redom tačke M i N. Dokazati da vrijedi jednakost:

$$\overline{AN}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{AB}^2.$$

Zadatak 2. Odrediti sve trocifrene brojeve $\overline{abc}$ (pri čemu cifre a, b i c ne moraju nužno biti međusobno različite) takve da se pri dijeljenju tog broja sa dvocifrenim brojem $\overline{bc}$ dobije količnik 7 i ostatak 20.

Zadatak 3. U trouglu ΔABC vrijedi $\angle BAC < \angle ACB$. Tačka D je tačka na produžetku stranice $\overline{BC}$ preko vrha B takva da vrijedi $\overline{BD} = \overline{AB}$. Tačka F je tačka presjeka simetrale ugla $\angle ABC$ sa stranicom $\overline{AC}$, a tačka E je tačka na polupravoj BF takva da vrijedi $\angle BAE = \angle ACB$. Tačka G je tačka na duži $\overline{AD}$ takva da vrijedi $EG || BC$. Dokazati da vrijedi $\overline{AG} = \overline{BF}$.

Zadatak 4. Figuru na slici, koja se sastoji od 12 redova sa po 3 kvadratića (ukupno 36 kvadratića), pri čemu je svaki red „pomjeren“ jedno mjesto udesno u odnosu na prethodni, zovemo stepenicama. Na koliko je načina moguće brojeve $1,2,3,\dots,36$ upisati u kvadratiće od kojih su napravljene stepenice (svaki broj tačno jednom), tako da je u svakom kvadratiću upisan jedan broj i da za svaki kvadratić vrijedi da je broj upisan u njemu manji i od broja u kvadratiću koji je desno od njega (ukoliko takav kvadratić postoji) i od broja u kvadratiću ispod njega (ukoliko takav kvadratić postoji)?



Zadatak 5. Za pozitivne realne brojeve x i y označimo sa s najmanji od brojeva: $x, \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x}$. Odrediti najveću moguću vrijednost broja s.

Trajanje izrade zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

SRETNO!

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo u saradnji sa
Udruženjem matematičara "Algoritam" Mostar, Udruženjem matematičara Tuzlanskog kantona i Pedagoškim zavodom Tuzla

61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Mostar / Sarajevo / Tuzla, 16.05.2021. godine

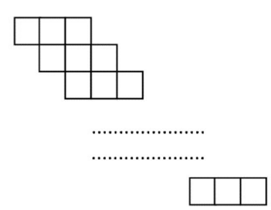
IX RAZRED

Zadatak 1. Riješiti sistem jednačina u skupu realnih brojeva

$$\frac{1}{15-x}+\frac{(y-5)^2}{2021}=-1$$
$$\frac{(y-5)^2}{2021}+\frac{1}{z^2-2020}=1$$
$$\frac{1}{15-x}+\frac{1}{z^2-2020}=0.$$

Zadatak 2. U trouglu ΔABC vrijedi $\angle BAC < \angle ACB$. Tačka D je tačka na produžetku stranice $\overline{BC}$ preko vrha B takva da vrijedi $\overline{BD}=\overline{AB}$. Tačka F je tačka presjeka simetrale ugla $\angle ABC$ sa stranicom $\overline{AC}$, a tačka E je tačka na polupravoj BF takva da vrijedi $\angle BAE = \angle ACB$. Tačka G je tačka na duži $\overline{AD}$ takva da vrijedi $EG||BC$. Dokazati da vrijedi $\overline{AG}=\overline{BF}$.

Zadatak 3. Figuru na slici, koja se sastoji od 12 redova sa po 3 kvadratića (ukupno 36 kvadratića), pri čemu je svaki red „pomjeren" jedno mjesto udesno u odnosu na prethodni, zovemo stepenicama. Na koliko je načina moguće brojeve $1,2,3,\dots,36$ upisati u kvadratiće od kojih su napravljene stepenice (svaki broj tačno jednom), tako da je u svakom kvadratiću upisan jedan broj i da za svaki kvadratić vrijedi da je broj upisan u njemu manji i od broja u kvadratiću koji je desno od njega (ukoliko takav kvadratić postoji) i od broja u kvadratiću ispod njega (ukoliko takav kvadratić postoji)?



Zadatak 4. Ako za realne brojeve a i b vrijedi $\frac{7a^3b^3}{a^6-8b^6}=1$, odrediti sve moguće vrijednosti izraza $\frac{a^2-b^2+1}{a^2+ab+2}$.

Zadatak 5. Neka je n prirodan broj. Za prirodan broj k, takav da je $1 \le k \le n$, označimo sa a_k najveći neparni djelioc broja $n+k$ (dakle, a_1 je najveći neparni djelioc broja $n+1$, a_2 je najveći neparni djelioc broja $n+2$, ... , a_n je najveći neparni djelioc broja $2n$). Izračunati zbir $a_1+a_2+\cdots+a_n$.

Trajanje izrade zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

VII razred

Rješenja zadataka i šema bodovanja

Zadatak 1. Ako je $\frac{a}{b} = 16$ i $\frac{b}{c} = 5$, pri čemu su b i c različiti od nule, izračunati vrijednost izraza $\frac{a+16b+5c}{25a+4b+c}$.

Rješenje:
Iz uslova zadatka slijedi da je $a = 16b$ i $b = 5c$. Odavde dobijemo da je $a = 80c$. Uvrštavanjem $a = 80c$ i $b = 5c$ u dati izraz, imamo

$$\frac{a + 16b + 5c}{25a + 4b + c} = \frac{80c + 80c + 5c}{2000c + 20c + c} = \frac{165c}{2021c} = \frac{165}{2021}.$$

Dakle, tražena vrijednost izraza je $\frac{165}{2021}$.

Šema bodovanja:
1 bod: $a = 16b, b = 5c$
3 boda: izražavanje svih varijabli preko jedne
2 boda: uvrštavanje dobijenog u dati izraz
4 boda: dobijanje tačnog rezultata

Zadatak 2. Za broj kažemo da je *lijep* ako se sastoji samo od cifara 3 i 4, pri čemu se cifra 3 pojavljuje bar jednom, a cifra 4 tačno jednom (npr. brojevi $43, 343, 3334$ su neki od *lijepih* brojeva).

a) Dokazati da *lijep* broj ne može biti djeljiv sa više od dva broja iz skupa $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
b) Odrediti najmanji *lijep* broj koji je djeljiv sa tačno dva broja iz skupa A. Odgovor obrazložiti!

Rješenje:

a) Ako *lijep* broj ima k cifara, tada se cifra 3 javlja $k-1$ puta i cifra 4 jednom. Zato je zbir cifara takvog broja $3 \cdot (k-1) + 4 = 3k - 3 + 4 = 3k + 1$. Ovaj broj očito nije djeljiv sa 3. Kako je broj djeljiv sa 3 ako i samo ako mu je zbir cifara djeljiv sa 3, to zaključujemo da *lijep* broj ne može biti djeljiv sa 3, pa slijedi da ne može biti djeljiv ni sa 6 ni sa 9 (jer ako je broj djeljiv sa 6 ili 9, onda je on djeljiv i sa 3).
Dvocifreni završeci koje *lijep* broj može imati su $33, 34, 43$. Kako je broj djeljiv sa 4 ako i samo ako mu je dvocifreni završetak djeljiv sa 4, to zaključujemo da *lijep* broj ne može biti djeljiv sa 4, pa samim tim ni sa 8 (jer ako je broj djeljiv sa 8, onda je on djeljiv i sa 4). Kako je broj djeljiv sa 5 ako i samo ako mu je posljednja cifra 0 ili 5, i kako *lijep* broj ne sadrži ove cifre, to *lijep* broj ne može biti djeljiv ni sa 5.
Dakle, *lijep* broj ne može biti djeljiv ni sa jednim od brojeva $3, 4, 5, 6, 8, 9$, pa su jedini brojevi iz skupa A sa kojima može biti djeljiv brojevi 2 i 7, tj. može biti djeljiv sa najviše dva broja iz ovog skupa.

b) Iz dijela a) vidimo da, ako je *lijep* broj djeljiv sa dva broja iz skupa A, tada to moraju biti brojevi 2 i 7. Da bi bio djeljiv sa 2, posljednja cifra mu mora biti parna, odnosno posljednja cifra mora biti 4. Dakle, traženi broj je oblika $33 \dots 34$. Potrebno je od brojeva ovog oblika naći najmanji koji je djeljiv sa 7.
Direktnom provjerom dobijamo da brojevi $34, 334, 3334$ nisu djeljivi sa 7, a da 33334 jeste, pa je to najmanji broj sa traženom osobinom.

Šema bodovanja:
Dijelovi a) i b) nose redom 6 i 4 bodova.

a) Za svaki od brojeva $3, 4, 5, 6, 8, 9$ dokaz da *lijepi* brojevi ne mogu biti djeljiivi s njim nosi po 1 bod
b) 1 bod: zaključak da traženi broj mora biti djeljiv sa 2 i 7, te da zbog toga cifra 4 mora biti na kraju
2 boda: konstatacija da brojevi $34, 334, 3334$ nisu djeljivi sa 7
1 bod: dobijanje tačnog rezultata 33334

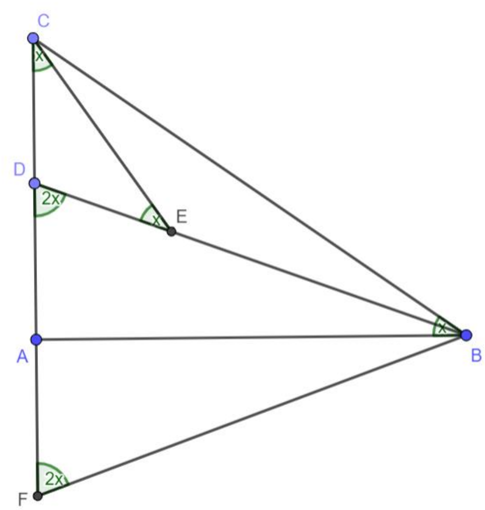
Zadatak 3. Neka je ΔABC pravougli trougao sa pravim uglom u vrhu A, pri čemu je $\overline{AB} > \overline{AC}$. Tačka D je na duži $\overline{AC}$, a tačka E na duži $\overline{BD}$, tako da vrijedi $\angle ABC = \angle ECD = \angle CED$. Neka je F tačka na produžetku stranice $\overline{AC}$ preko vrha A takva da vrijedi $\angle BFA = 2 \cdot \angle ABC$.

a) Dokazati da je trougao ΔFBC jednakokraki.
b) Dokazati da je dužina duži $\overline{BE}$ dvostruko veća od dužine duži $\overline{AD}$.

Rješenje:

a) Označimo ugao $\angle ABC = \angle ECD = \angle CED = x$. Sada je $\angle ACB = 90° - x$. Kako je $\angle AFB = 2x$ i $\angle FCB = \angle ACB = 90° - x$ iz trougla ΔFBC dobijamo da je $\angle FBC = 180° - 2x - (90° - x) = 90° - x$. Sada vidimo da je $\angle FCB = \angle FBC = 90° - x$, pa je trougao ΔFBC jednakokraki (u njemu je $\overline{FB} = \overline{FC}$).

b) Kako je $\angle DCE = \angle DEC = x$, to je trougao ΔDEC jednakokraki i vrijedi $\overline{ED} = \overline{DC}$. Također imamo da je $\angle ADB = \angle DCE + \angle DEC = 2x = \angle AFB$ pa je trougao ΔBDF jednakokraki, tj. $\overline{DB} = \overline{FB}$. Kako u jednakokrakom trouglu visina polovi suprotnu stranicu, to je $\overline{AD} = \overline{AF}$. Konačno, imamo da je $\overline{BE} = \overline{BD} - \overline{DE} = \overline{FB} - \overline{DE} = \overline{FC} - \overline{DE} = \overline{FC} - \overline{DC} = \overline{FD} = \overline{AD} + \overline{AF} = 2 \cdot \overline{AD}$, što je i trebalo dokazati.



Šema bodovanja:
Dijelovi a) i b) nose redom 2 i 8 bodova

a) 1 bod: izračunavanje uglova koji mogu dovesti do tražene tvrdnje
1 bod: dokaz tvrdnje
c) 1 bod: izračunavanje ugla $\angle FDB$
1 bod: zaključak $\overline{BF} = \overline{BD}$
2 boda: zaključak da je $2 \cdot \overline{AD} = \overline{DF}$, te da je dovoljno dokazati $\overline{DF} = \overline{BE}$
1 bod: zaključak $\overline{BD} = \overline{FC}$
3 boda: dokaz tvrdnje

Zadatak 4. Na policu u školskoj bibiloteci treba rasporediti dvije vrste knjiga, udžbenike iz matematike i udžbenike iz fizike. Udžbenici iz istog predmeta su iste debljine. Ako se na policu slažu samo udžbenici iz matematike, poznato je da ih može stati 9, ali ne može 10, a ako se na policu slažu samo udžbenici iz fizike, onda ih može stati 15, ali ne može 16.

a) Može li na policu istovremeno stati 6 udžbenika iz matematike i 5 udžbenika iz fizike?

b) Može li na policu istovremeno stati 7 udžbenika iz matematike i 5 udžbenika iz fizike?

Odgovore obrazložiti!

Rješenje:

Neka je m debljina udžbenika iz matematike, f debljina udžbenika iz fizike i P dužina police. Kako na policu može stati 9 udžbenika iz matematike, vrijedi $9m \leq P$. Kako ih ne može stati 10, vrijedi $P < 10m$. Iz prve nejednakosti dobijamo $m \leq \frac{1}{9}P$, a iz druge $m > \frac{1}{10}P$.

Slično, za udžbenike iz fizike dobijamo $15f \leq P$ i $P < 16f$, odnosno $f \leq \frac{1}{15}P$ i $f > \frac{1}{16}P$.

a) Imamo

$$6m + 5f \leq 6 \cdot \frac{1}{9}P + 5 \cdot \frac{1}{15}P = \frac{6}{9}P + \frac{5}{15}P = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}P = P$$

Kako je ukupna debljina navedenih udžbenika manja ili jednaka dužini police, to ovi udžbenici mogu stati na policu.

b) Imamo

$$7m + 5f > 7 \cdot \frac{1}{10}P + 5 \cdot \frac{1}{16}P = \frac{7}{10}P + \frac{5}{16}P = \frac{56P + 25P}{80} = \frac{81P}{80} = 1\frac{1}{80}P > P$$

Dakle, ukupna debljina navedenih udžbenika veća je od dužine police, pa oni ne mogu stati na policu.

Šema bodovanja:

Dijelovi a) i b) nose redom 4 i 6 bodova

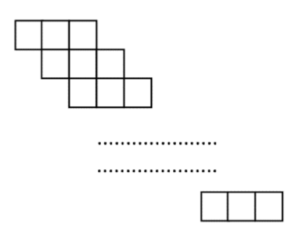
a) 2 boda: dobivanje gornjih granica za debljine udžbenika u odnosu na debljinu police ($m \leq \frac{1}{9}P$ i $f \leq \frac{1}{15}P$

2 boda: dokaz da je $6m + 5f \leq P$

b) 3 boda: dobivanje donjih granica za debljine udžbenika u odnosu na debljinu police ($m > \frac{1}{10}P$ i $f > \frac{1}{16}P$)

3 bod: dokaz da je $7m + 5f > P$

Zadatak 5. Figuru na slici, koja se sastoji od 12 redova sa po 3 kvadratića (ukupno 36 kvadratića), pri čemu je svaki red „pomjeren" jedno mjesto udesno u odnosu na prethodni, zovemo stepenicama. Na koliko je načina moguće brojeve $1,2,3,\ldots,36$ upisati u kvadratiće od kojih su napravljene stepenice (svaki broj treba upisati tačno jednom), tako da je u svakom kvadratiću upisan jedan broj i da za svaki kvadratić vrijedi da je broj upisan u njemu manji i od broja u kvadratiću koji je desno od njega (ukoliko takav kvadratić postoji) i od broja u kvadratiću ispod njega (ukoliko takav kvadratić postoji)?

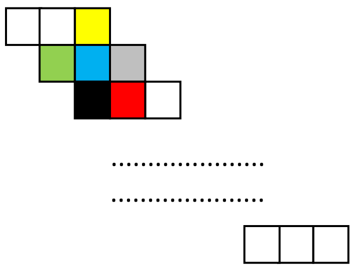


Rješenje:

Primijetimo da nam uslov znači da u svakom redu brojevi rastu s lijeva na desno, te da u svakoj koloni brojevi rastu odozgo prema dole. Numerišimo redove odozgo prema dole brojevima od 1 do 12 (svaki red ima 3 kvadratića), a kolone s lijeva na desno brojevima od 1 do 14 (1. i 14. kolona imaju po jedan kvadratić, 2. i 13. kolona po dva, a preostale kolone po tri kvadratića).

Za dva različita kvadratića A i B reći ćemo da je A *bolji* od B ako red u kojem je kvadratić A ima manji ili jednak redni broj od reda u kojem je kvadratić B i kolona u kojoj je kvadratić A ima manji ili jednak redni broj od kolone u kojoj je kvadratić B (primijetimo da je moguće da niti je A *bolji* od B niti je B *bolji* od A, npr. ako je A u redu sa manjim rednim brojem, a B u koloni sa manjim rednim brojem). Sada lako vidimo da ako je A *bolji* od B, onda je broj u kvadratiću A manji od broja u kvadratiću B (jer možemo doći od A do B krećući se kvadratićima tako da u svakom koraku idemo desno ili dole, a na taj način brojevi uvijek rastu).

Kako je broj iz prvog reda i prve kolone bolji od svih ostalih kvadratića, u njemu mora biti broj 1. Od preostalih kvadratića, broj iz prvog reda i druge kolone je *bolji* od svih preostalih kvadratića, pa se u njemu nalazi broj 2.



Posmatrajmo kvadratić u prvom redu i trećoj koloni (žuti kvadratić). Ako zanemarimo dva kvadratića u kojima smo već odredili koji brojevi su upisani, on je *bolji* od svih preostalih kvadratića osim zelenog. Slično, zeleni kvadratić je *bolji* od svih preostalih kvadratića osim žutog. To znači da su brojevi 3 i 4 upisani u žuti i zeleni kvadratić, što možemo uraditi na dva načina. Međutim, kako je plavi kvadratić *bolji* od svih preostalih kvadratića, to u njemu mora biti broj 5. Sada slično zaključujemo da je crni kvadratić *bolji* od svih preostalih kvadratića osim sivog, a sivi je također *bolji* od svih preostalih kvadratića osim crnog, to su u ta dva kvadratića upisani brojevi 6 i 7, što opet možemo uraditi na dva načina. Kako je crveni kvadratić *bolji* od svih preostalih kvadratića, u njemu mora biti upisan broj 8. Nastavljajući ovaj postupak, mi u stvari za svaku od trojki $(3,4,5), (6,7,8), \dots (33,34,35)$ dobijamo da se prva dva elementa trojke mogu rasporediti na dva načina, a trećem elementu je određena pozicija. Naravno, na kraju ćemo dobiti da se broj 36 mora nalaziti u posljednjem kvadratiću 12. reda. Kako imamo 11 trojki, a u svakoj nezavisno biramo kako ćemo upisati prva dva elementa, to je broj načina da se upišu brojevi jednak $2^{11} = 2048$.

Šema bodovanja:

1 bod: zaključak da je pozicija brojeva 1 i 2 određena (ili 35 i 36)

2 boda: zaključak da za brojeve 3 i 4, ili brojeve 33 i 34 postoje dva moguća načina raspoređivanja

1 bod: zaključak da je pozicija broja 5 određena

3 boda: zaključak da se proces može nastaviti i za ostale trojke, te da za svaku postoje dvije opcije

3 boda: dobijanje tačnog rezutata

Napomena:

Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.

VIII razred

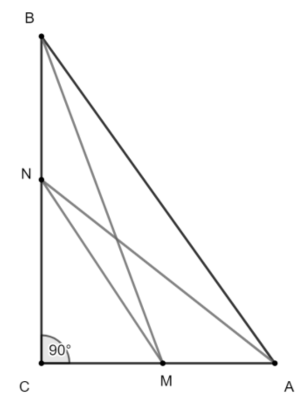
Rješenja zadataka i šema bodovanja

Zadatak 1. U pravouglom trouglu ΔABC na katetama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ date su redom tačke M i N. Dokazati da vrijedi jednakost:

$$\overline{AN}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{AB}^2.$$

Rješenje:

Pošto je, prema uslovima zadatka, ugao kod vrha C pravi, to iz pravouglih trouglova ΔABC, ΔANC, ΔMBC i ΔMNC, sa pravim uglom kod vrha C, dobijemo, redom,



$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$
$$\overline{AC}^2 + \overline{NC}^2 = \overline{AN}^2,$$
$$\overline{BC}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{BM}^2,$$
$$\overline{MC}^2 + \overline{NC}^2 = \overline{MN}^2.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\overline{AN}^2 + \overline{BM}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{NC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{MC}^2 = (\overline{MC}^2 + \overline{NC}^2) + (\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2)\\ &= \overline{MN}^2 + \overline{AB}^2,\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

2 boda na činjenicu da su trouglovi ΔANC, ΔMBC i ΔMNC pravougli
4 boda za primjenu Pitagorine teoreme na trouglove ΔABC, ΔANC, ΔMBC i ΔMNC
4 boda za dobijanje tražene jednakosti

Zadatak 2. Odrediti sve trocifrene brojeve $\overline{abc}$ (pri čemu cifre a, b i c ne moraju nužno biti međusobno različite) takve da se pri dijeljenju tog broja sa dvocifrenim brojem $\overline{bc}$ dobije količnik 7 i ostatak 20.

Rješenje:

Iz uslova imamo da vrijedi $\overline{abc} = 7 \cdot \overline{bc} + 20$. Kako je $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 100a + \overline{bc}$, iz uslova imamo

$$100a + \overline{bc} = 7 \cdot \overline{bc} + 20 \Leftrightarrow$$
$$6 \cdot \overline{bc} = 100a - 20 \Leftrightarrow$$
$$6 \cdot \overline{bc} = 20(5a - 1) \Leftrightarrow$$
$$3 \cdot \overline{bc} = 10(5a - 1).$$

Iz posljednje jednakosti vidimo da je broj $3 \cdot \overline{bc}$ djeljiv sa 10, što znači da je broj $\overline{bc}$ djeljiv s 10, tj. mora biti $c = 0$. Uvrštavajući $c = 0$ dobijamo $\overline{bc} = \overline{b0} = 10b$, pa imamo

$$6 \cdot 10b = 20(5a - 1) \Leftrightarrow$$
$$60b = 20(5a - 1) \Leftrightarrow$$
$$3b = 5a - 1 \Leftrightarrow$$
$$5a = 3b + 1$$

Slijedi da je $3b + 1$ djeljivo s 5. Direktnom provjerom dobijamo da su jedine cifre koje zadovoljavaju ovaj uslov 3 i 8, pa $b \in \{3, 8\}$.

Za $b = 3$ imamo $a = \frac{3\cdot3+1}{5} = 2$ i dobijamo broj $\overline{abc} = 230$, a za $b = 8$ je $a = \frac{3\cdot8+1}{5} = 5$ i dobijamo broj $\overline{abc} = 580$. To su traženi trocifreni brojevi.

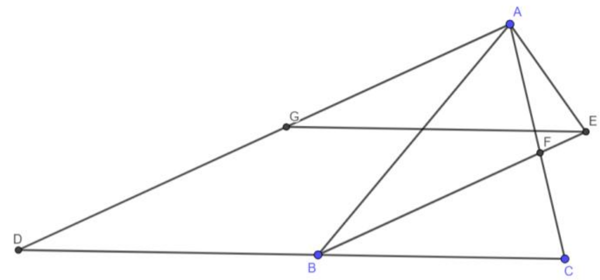
Šema bodovanja:

2 boda za dobijanje jednakosti $100a + \overline{bc} = 7 \cdot \overline{bc} + 20$ ili njoj ekvivalentne jednakosti
1 bod za dobijanje $3 \cdot \overline{bc} = 10(5a - 1)$ ili njoj ekvivalentne jednakosti

3 boda za zaključak da je $c=0$
1 bod za dobijanje jednakosti $5a = 3b + 1$
3 boda za dobijanje traženih trocifrenih brojeva i dokaz da drugih nema

Zadatak 3. U trouglu ΔABC vrijedi $\angle BAC < \angle ACB$. Tačka D je tačka na produžetku stranice $\overline{BC}$ preko vrha B takva da vrijedi $\overline{BD} = \overline{AB}$. Tačka F je tačka presjeka simetrale ugla $\angle ABC$ sa stranicom $\overline{AC}$, a tačka E je tačka na polupravoj BF takva da vrijedi $\angle BAE = \angle ACB$. Tačka G je tačka na duži $\overline{AD}$ takva da vrijedi $EG||BC$. Dokazati da vrijedi $\overline{AG} = \overline{BF}$.

Rješenje:
Označimo uglove $\measuredangle BAC = \alpha, \measuredangle ACB = \gamma$ i $\measuredangle ABC = \beta$. Sada je $\measuredangle ABE = \measuredangle CBE = \frac{\beta}{2}$. Pošto je $\overline{BD} = \overline{BA}$ i $\measuredangle DBA = 180° - \beta$, to je onda i $\measuredangle BDA = \measuredangle BAD = \frac{\beta}{2}$. Kako je $GE||DC$, to je $\measuredangle EGA = \measuredangle CDA = \frac{\beta}{2}$. Sada imamo da je $\measuredangle CBE = \measuredangle CDA = \frac{\beta}{2}$, pa zaključujemo da je $BE||AD$.



Primijetimo sada da je četverougao $DBEG$ paralelogram ($DB||GE$ i $BE||DG$), pa je $\overline{GE} = \overline{DB} = \overline{AB}$. Ako posmatramo trougao ΔGAE, imamo da je

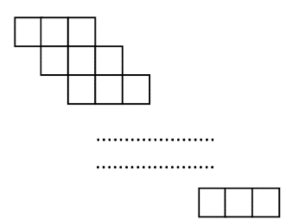
$$\measuredangle GEA = 180° - \measuredangle EGA - \measuredangle EAG = 180° - \frac{\beta}{2} - (\measuredangle EAB + \measuredangle BAG) = 180° - \frac{\beta}{2} - \gamma - \frac{\beta}{2} = 180° - \beta - \gamma = \alpha.$$

Sada vidimo da su trouglovi ΔABF i ΔEGA podudarni (na osnovu stava USU, jer je $\overline{AB} = \overline{EG}$, $\measuredangle ABF = \measuredangle EGA = \frac{\beta}{2}$ i $\measuredangle BAF = \measuredangle GEA = \alpha$) iz čega slijedi da je $\overline{BF} = \overline{AG}$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

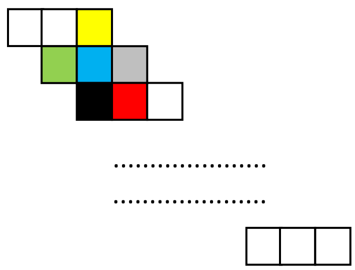
Podudarnost trouglova ΔABF i ΔEGA se može dokazati na više načina (npr. moguće je i na osnovu pravila SUS).
6 bodova na pokazivanje jednakosti elemenata odgovarajućih trouglova koji su dovoljni za podudarnost (svaki element po 2 boda)
3 boda za zaključivanje da su trouglovi ΔABF i ΔEGA podudarni
1 bod zaključak jednakosti stranica $\overline{AG} = \overline{BF}$

Zadatak 4. Figuru na slici, koja se sastoji od 12 redova sa po 3 kvadratića (ukupno 36 kvadratića), pri čemu je svaki red „pomjeren“ jedno mjesto udesno u odnosu na prethodni, zovemo stepenicama. Na koliko je načina moguće brojeve $1,2,3,\ldots,36$ upisati u kvadratiće od kojih su napravljene stepenice (svaki broj treba upisati tačno jednom), tako da je u svakom kvadratiću upisan jedan broj i da za svaki kvadratić vrijedi da je broj upisan u njemu manji i od broja u kvadratiću koji je desno od njega (ukoliko takav kvadratić postoji) i od broja u kvadratiću ispod njega (ukoliko takav kvadratić postoji)?



Rješenje: Primijetimo da nam uslov znači da u svakom redu brojevi rastu s lijeva na desno, te da u svakoj koloni brojevi rastu odozgo prema dole. Numerišimo redove odozgo prema dole brojevima od 1 do 12 (svaki red ima 3 kvadratića), a kolone s lijeva na desno brojevima od 1 do 14 (1. i 14. kolona imaju po jedan kvadratić, 2. i 13. kolona po dva, a preostale kolone po tri kvadratića).

Za dva različita kvadratića A i B reći ćemo da je A *bolji* od B ako red u kojem je kvadratić A ima manji ili jednak redni broj od reda u kojem je kvadratić B i kolona u kojoj je kvadratić A ima manji ili jednak redni broj od kolone u kojoj je kvadratić B (primijetimo da je moguće da niti je A *bolji* od B niti je B *bolji* od A, npr. ako je A u redu sa manjim rednim brojem, a B u koloni sa manjim rednim brojem). Sada lako vidimo da ako je A *bolji* od B, onda je broj u kvadratiću A manji od broja u kvadratiću B (jer možemo doći od A do B krećući se kvadratićima tako da u svakom koraku idemo desno ili dole, a na taj način brojevi uvijek rastu).
Kako je broj iz prvog reda i prve kolone bolji od svih ostalih kvadratića, u njemu mora biti broj 1. Od preostalih kvadratića, broj iz prvog reda i druge kolone je *bolji* od svih preostalih kvadratića, pa se u njemu nalazi broj 2.



Posmatrajmo kvadratić u prvom redu i trećoj koloni (žuti kvadratić). Ako zanemarimo dva kvadratića u kojima smo već odredili koji brojevi su upisani, on je *bolji* od svih preostalih kvadratića osim zelenog. Slično, zeleni kvadratić je *bolji* od svih preostalih kvadratića osim žutog. To znači da su brojevi 3 i 4 upisani u žuti i zeleni kvadratić, što možemo uraditi na dva načina. Međutim, kako je plavi kvadratić *bolji* od svih preostalih kvadratića, to u njemu mora biti broj 5. Sada slično zaključujemo da je crni kvadratić *bolji* od svih preostalih kvadratića osim sivog, a sivi je također *bolji* od svih preostalih kvadratića osim crnog, to su u ta dva kvadratića upisani brojevi 6 i 7, što opet možemo uraditi na dva načina. Kako je crveni kvadratić *bolji* od svih preostalih kvadratića, u njemu mora biti upisan broj 8. Nastavljajući ovaj postupak, mi u stvari za svaku od trojki $(3,4,5),(6,7,8),\ldots(33,34,35)$ dobijamo da se prva dva elementa trojke mogu rasporediti na dva načina, a trećem elementu je određena pozicija. Naravno, na kraju ćemo dobiti da se broj 36 mora nalaziti u posljednjem kvadratiću 12. reda. Kako imamo 11 trojki, a u svakoj nezavisno biramo kako ćemo upisati prva dva elementa, to je broj načina da se upišu brojevi jednak $2^{11} = 2048$.

Šema bodovanja:

1 bod: zaključak da je pozicija brojeva 1 i 2 određena (ili 35 i 36)
2 boda: zaključak da za brojeve 3 i 4, ili brojeve 33 i 34 postoje dva moguća načina raspoređivanja
1 bod: zaključak da je pozicija broja 5 određena
3 boda: zaključak da se proces može nastaviti i za ostale trojke, te da za svaku postoje dvije opcije
3 boda: dobijanje tačnog rezutata

Zadatak 5. Za pozitivne realne brojeve x i y označimo sa s najmanji od brojeva: $x, \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x}$. Odrediti najveću moguću vrijednost broja s.

Rješenje:

Iz činjenice da je s najmanji od datih brojeva, slijedi da je

$$s \leq x, s \leq \frac{1}{y}, s \leq y + \frac{1}{x}.$$

Iz prve i druge nejednakosti, kako su x i y pozitivni brojevi, slijedi $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{x}$ i $\frac{1}{s} \geq y$.

Sabiranjem posljednje dvije nejednakosti dobijamo

$$\frac{2}{s} \geq y + \frac{1}{x}.$$

Ova i treća nejednakost sa početka rješenja zadatka daju

$$s \leq y + \frac{1}{x} \leq \frac{2}{s},$$

odakle je $s^2 \leq 2$, tj. $s \leq \sqrt{2}$. Jednakost se postiže kada je $x = \sqrt{2}$ i $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pa najveća moguća vrijednost broja s iznosi $\sqrt{2}$.

Šema bodovanja:

3 boda za pokazivanje da je moguće dobiti vrijednost $\sqrt{2}$
7 bodova na dokaz da je nemoguće dobiti veću vrijednost od $\sqrt{2}$ (ukoliko učenik razdvaja slučajeve koji broj je najmanji, slučajevi da je najmanji neki od brojeva x ili $\frac{1}{y}$ nose po 2 boda, dok slučaj u kojem je $y + \frac{1}{x}$ najmanji nosi 3 boda)

Napomena:
Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.

IX razred

Rješenja zadataka i šema bodovanja

Zadatak 1. Riješiti sistem jednačina u skupu realnih brojeva

$$\frac{1}{15-x}+\frac{(y-5)^2}{2021}=-1$$
$$\frac{(y-5)^2}{2021}+\frac{1}{z^2-2020}=1$$
$$\frac{1}{15-x}+\frac{1}{z^2-2020}=0.$$

Rješenje:

Uvedimo smjenu $\frac{1}{15-x}=a, \frac{(y-5)^2}{2021}=b, \frac{1}{z^2-2020}=c$. Sistem postaje

$$a+b=-1,$$
$$b+c=1,$$
$$c+a=0.$$

Sabiranjem sve tri jednačine ovog sistema dobijemo

$$2(a+b+c)=0,$$

odakle je

$$a+b+c=0.$$

Ako od posljednje jednačine oduzmemo jednačine iz sistema redom dobijemo

$$c=1,$$
$$a=-1,$$
$$b=0.$$

Vraćajući smjenu imamo

$$\frac{1}{15-x}=-1 \Rightarrow x=16,$$
$$\frac{(y-5)^2}{2021}=0 \Rightarrow y=5,$$
$$\frac{1}{z^2-2020}=1 \Rightarrow z=\pm\sqrt{2021}.$$

Rješenja polaznog sistema jednačina su $\left(16, 5, \sqrt{2021}\right)$ i $\left(16, 5, -\sqrt{2021}\right)$.

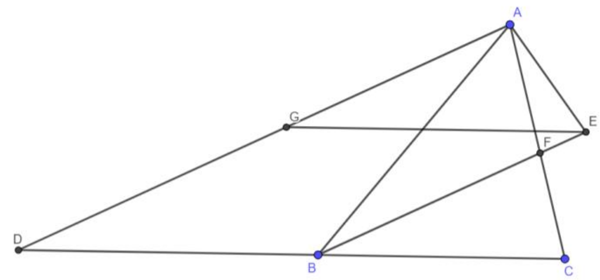
Šema bodovanja:

6 bodova: dobijanje vrijednosti $\frac{1}{15-x}, \frac{(y-5)^2}{2021}, \frac{1}{z^2-2020}$ direktno ili indirektno (1 bod za uvođenje smjene)
2 boda: dobijanje vrijednosti za x i y
2 boda: dobijanje vrijednosti za z

Zadatak 2. U trouglu ΔABC vrijedi $\angle BAC < \angle ACB$. Tačka D je tačka na produžetku stranice $\overline{BC}$ preko vrha B takva da vrijedi $\overline{BD}=\overline{AB}$. Tačka F je tačka presjeka simetrale ugla $\angle ABC$ sa stranicom $\overline{AC}$, a tačka E je tačka na polupravoj BF takva da vrijedi $\angle BAE = \angle ACB$. Tačka G je tačka na duži $\overline{AD}$ takva da vrijedi $EG||BC$. Dokazati da vrijedi $\overline{AG}=\overline{BF}$.

Rješenje:

Označimo uglove $\measuredangle BAC = \alpha, \measuredangle ACB = \gamma$ i $\measuredangle ABC = \beta$. Sada je $\measuredangle ABE = \measuredangle CBE = \frac{\beta}{2}$. Pošto je $\overline{BD} = \overline{BA}$ i $\measuredangle DBA = 180° - \beta$, to je onda i $\measuredangle BDA = \measuredangle BAD = \frac{\beta}{2}$. Kako je $GE||DC$, to je $\measuredangle EGA = \measuredangle CDA = \frac{\beta}{2}$. Sada imamo da je $\measuredangle CBE = \measuredangle CDA = \frac{\beta}{2}$, pa zaključujemo da je $BE||AD$.



Primijetimo sada da je četverougao $DBEG$ paralelogram ($DB||GE$ i $BE||DG$), pa je $\overline{GE} = \overline{DB} = \overline{AB}$. Ako posmatramo trougao ΔGAE, imamo da je

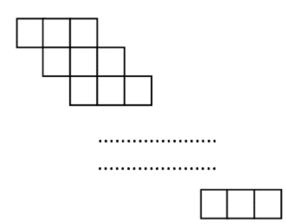
$$\measuredangle GEA = 180° - \measuredangle EGA - \measuredangle EAG = 180° - \frac{\beta}{2} - (\measuredangle EAB + \measuredangle BAG) = 180° - \frac{\beta}{2} - \gamma - \frac{\beta}{2}$$
$$= 180° - \beta - \gamma = \alpha.$$

Sada vidimo da su trouglovi ΔABF i ΔEGA podudarni (na osnovu stava USU, jer je $\overline{AB} = \overline{EG}$, $\measuredangle ABF = \measuredangle EGA = \frac{\beta}{2}$ i $\measuredangle BAF = \measuredangle GEA = \alpha$) iz čega slijedi da je $\overline{BF} = \overline{AG}$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

Podudarnost trouglova ΔABF i ΔEGA se može dokazati na više načina (npr. moguće je i na osnovu pravila SUS).
6 bodova na pokazivanje jednakosti elemenata odgovarajućih trouglova koji su dovoljni za podudarnost (svaki element po 2 boda)
3 boda za zaključivanje da su trouglovi ΔABF i ΔEGA podudarni
1 bod zaključak jednakosti stranica $\overline{AG} = \overline{BF}$

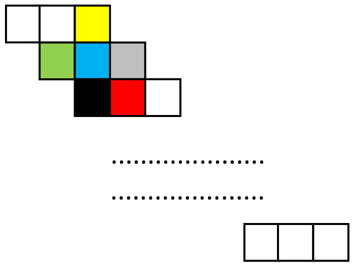
Zadatak 3. Figuru na slici, koja se sastoji od 12 redova sa po 3 kvadratića (ukupno 36 kvadratića), pri čemu je svaki red „pomjeren" jedno mjesto udesno u odnosu na prethodni, zovemo stepenicama. Na koliko je načina moguće brojeve $1,2,3,\dots,36$ upisati u kvadratiće od kojih su napravljene stepenice (svaki broj treba upisati tačno jednom), tako da je u svakom kvadratiću upisan jedan broj i da za svaki kvadratić vrijedi da je broj upisan u njemu manji i od broja u kvadratiću koji je desno od njega (ukoliko takav kvadratić postoji) i od broja u kvadratiću ispod njega (ukoliko takav kvadratić postoji)?



Rješenje:

Primijetimo da nam uslov znači da u svakom redu brojevi rastu s lijeva na desno, te da u svakoj koloni brojevi rastu odozgo prema dole. Numerišimo redove odozgo prema dole brojevima od 1 do 12 (svaki red ima 3 kvadratića), a kolone s lijeva na desno brojevima od 1 do 14 (1. i 14. kolona imaju jedan kvadratić, 2. i 13. kolona dva, a preostale kolone 3 kvadratića).
Za dva različita kvadratića A i B reći ćemo da je A bolji od B ako red u kojem je kvadratić A ima manji ili jednak redni broj od reda u kojem je kvadratić B i kolona u kojoj je kvadratić A ima manji ili jednak redni broj od kolone u kojoj je kvadratić B (primijetimo da je moguće da niti je A bolji od B niti je B bolji od A, npr. ako je A u redu sa manjim rednim brojem, a B u koloni sa manjim rednim brojem). Sada lako vidimo da ako je A bolji od B, onda je broj u kvadratiću A manji od broja u kvadratiću B (jer možemo doći od A

do B krećući se kvadratićima tako da u svakom koraku idemo desno ili dole, a na taj način brojevi uvijek rastu).
Kako je broj iz prvog reda i prve kolone bolji od svih ostalih kvadratića, u njemu mora biti broj 1. Od preostalih kvadratića, broj iz prvog reda i druge kolone je bolji od svih preostalih kvadratića, pa se u njemu nalazi broj 2.



Posmatrajmo kvadratić u prvom redu i trećoj koloni (žuti kvadratić). Ako zanemarimo dva kvadratića u kojima smo već odredili koji brojevi su upisani, on je bolji od svih preostalih kvadratića osim zelenog. Slično, zeleni kvadratić je bolji od svih preostalih kvadratića osim žutog. To znači da su brojevi 3 i 4 upisani u žuti i zeleni kvadratić, što možemo uraditi na dva načina. Međutim, kako je plavi kvadratić bolji od svih preostalih kvadratića, to u njemu mora biti broj 5. Sada slično zaključujemo da je crni kvadratić bolji od svih preostalih kvadratića osim sivog, a sivi je također bolji od svih preostalih kvadratića osim crnog, to su u ta dva kvadratića upisani brojevi 6 i 7, što opet možemo uraditi na dva načina. Kako je crveni kvadratić bolji od svih preostalih kvadratića, u njemu mora biti upisan broj 8. Nastavljajući ovaj postupak, mi ustvari za svaku od trojki $(3,4,5),(6,7,8),\ldots(33,34,35)$ dobijamo da se prva dva elementa trojke mogu rasporediti na dva načina, a trećem elementu je određena pozicija. Naravno, na kraju ćemo dobiti da se broj 36 mora nalaziti u posljednjem kvadratiću 12. reda. Kako imamo 11 trojki, a u svakoj nezavisno biramo kako ćemo upisati prva dva elementa, to je broj načina da se upišu brojevi jednak $2^{11} = 2048$.

Šema bodovanja:

1 bod: zaključak da je pozicija brojeva 1 i 2 određena (ili 35 i 36)
2 boda: zaključak da za brojeve 3 i 4, ili brojeve 33 i 34 postoje dva moguća načina raspoređivanja
1 bod: zaključak da je pozicija broja 5 određena
3 boda: zaključak da se proces može nastaviti i za ostale trojke, te da za svaku postoje dvije opcije
3 boda: dobijanje tačnog rezutata

Zadatak 4. Ako za realne brojeve a i b vrijedi $\frac{7a^3b^3}{a^6-8b^6} = 1$, odrediti sve moguće vrijednosti izraza $\frac{a^2-b^2+1}{a^2+ab+2}$.

Rješenje:

Najprije imamo da je $a^6 \neq 8b^6$. Nakon množenja sa $a^6 - 8b^6 \neq 0$ imamo
$$a^6 - 8b^6 - 7a^3b^3 = 0$$
$$a^6 + a^3b^3 - 8b^6 - 8a^3b^3 = 0$$
$$a^3(a^3 + b^3) - 8b^3(b^3 + a^3) = 0$$
$$(a^3 - 8b^3)(a^3 + b^3) = 0$$
$$(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2) = 0$$

$$(a-2b)((a+b)^2+3b^2)(a+b)\left(\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right)=0.$$
Sada primijetimo da druga zagrada ne može biti jednaka 0, jer bi odatle slijedilo $b=0$ i $a+b=0$, tj. $a=b=0$, što ne zadovoljava uslov $a^6\neq 8b^6$. Slično, ako je posljednja zagrada jednaka 0 dobijamo $a=b=0$, šro je nemoguće. Ako je $a+b=0$ imamo
$$\frac{a^2-b^2+1}{a^2+ab+2}=\frac{(a-b)(a+b)+1}{a(a+b)+2}=\frac{1}{2},$$
dok za $a-2b=0$, tj. $a=2b$ dobijamo
$$\frac{a^2-b^2+1}{a^2+ab+2}=\frac{4b^2-b^2+1}{4b^2+2b\cdot b+2}=\frac{3b^2+1}{6b^2+2}=\frac{3b^2+1}{2\cdot(3b^2+1)}=\frac{1}{2}.$$
Dakle, jedina moguća vrijednost izraza je $\frac{1}{2}$ (u slučajevima $a=-b$ i $a=2b$ je očigledno zadovoljen uslov $a^6\neq 8b^6$ kad god su a i b različiti od 0).

Šema bodovanja:

3 boda: faktorizacija $(a^3-8b^3)(a^3+b^3)=0$
1 bod: faktorizacija $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)=0$
1 bod: pokazivanje da je $a^2+2ab+4b^2=0$ moguće samo za $a=b=0$
2 boda: pokazivanje da je $a^2-ab+b^2=0$ moguće samo za $a=b=0$
1 bod: zaključak da slučaj $a=b=0$ ne pripada definicionom području početnog izraza
2 boda: ispravno računanje izraza u slučajevima $a=-b$ i $a=2b$

Zadatak 5. Neka je n prirodan broj. Za prirodan broj k, takav da je $1\leq k\leq n$, označimo sa a_k najveći neparni djelioc broja $n+k$ (dakle, a_1 je najveći neparni djelioc broja $n+1$, a_2 je najveći neparni djelioc broja $n+2$, ... , a_n je najveći neparni djelioc broja $2n$). Izračunati zbir $a_1+a_2+\cdots+a_n$.

Rješenje:
Dokazat ćemo najprije sljedeću lemu:
Lema: Svaka dva broja iz skupa $A=\{n+1,n+2,\dots,2n\}$ imaju različit najveći neparni djelioc, tj. svi brojevi $a_1,a_2,\dots,a_n$ su međusobno različiti.
Dokaz leme: Svaki prirodan broj m možemo zapisati u obliku $m=2^x\cdot y$, pri čemu je x nenegativan cijeli broj, a y neparan prirodan broj, te je tada očigledno y najveći neparni djelioc broja m. Pretpostavimo suprotno, neka je $a_i=a_j=t$ za $1\leq i<j\leq n$. Tada je $n+i=2^a\cdot t, n+j=2^b\cdot t$, pri čemu je $a<b$, tj. $b\geq a+1$. Međutim, sada je $2n\geq n+j=2^b\cdot t\geq 2^{a+1}\cdot t=2\cdot 2^a\cdot t=2(n+i)>2n$, što je očigledna kontradikcija. Dakle, svaka dva broja iz skupa A imaju različit neparni djelioc.

Vratimo se na rješenje zadatka. Kako za svako $i, 1\leq i\leq n$ vrijedi $a_i\in\{1,3,\dots,2n-1\}$, a ovaj skup ima tačno n elemenata, zaključujemo da su skupovi $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ i $\{1,3,\dots,2n-1\}$ međusobno jednaki (jer su na osnovu leme elementi $a_1,a_2,\dots,a_n$ različiti, a ima ih tačno n). Zbog toga vrijedi
$$\begin{aligned}a_1+a_2+\cdots+a_n&=1+3+\cdots+2n-1=2\cdot 1-1+2\cdot 2-1+\cdots+2\cdot n-1\\&=2\cdot(1+2+\cdots+n)-n=2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}-n=n^2.\end{aligned}$$

Šema bodovanja:

6 bodova: navođenje i dokaz leme ili njoj ekvivalentne tvrdnje (samo navođenje leme bez dokaza 1 bod)
4 boda: izračunavanje date sume

Ukoliko učenik samo navede lemu (bez dokaza), te ispravno izračuna sumu, zadatak će biti bodovan sa 3 boda.

Napomena:
Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo u saradnji sa
Udruženjem matematičara "Algoritam" Mostar, Udruženjem matematičara Tuzlanskog kantona i Pedagoškim zavodom Tuzla

61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Mostar / Sarajevo / Tuzla, 16.05.2021. godine

VII RAZRED – KONAČNI REZULTATI

Plasman	Šifra	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto	Kanton	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Ukupno
1	GBI14	Adnan Osmić	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	KS	8	10	10	10	10	48
2	ajc13	Ajla Ćuprija	OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	KS	10	7	9	1	0	27
3	QHČ08	Ahmed Čengić	OŠ "Safvet-beg Bašagić" Visoko	ZDK	10	10	2	1	0	23
4	Abu37	Abdurahman Fehratbegović	OŠ "Ćamil Sijarić" Sarajevo	KS	6	10	3	0	0	19
5	KEN58	Kenan Nuhić	IV osnovna škola Mostar	HNK	9	8	0	1	0	18
6	win08	Hamza Banjanović	OŠ "Osman Nuri Hadžić" Sarajevo	KS	10	6	0	1	0	17
7	NAB13	Nermin Kadić	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	KS	4	9	2	0	1	16
8	GKH42	Hana Kozica	OŠ "Grbavica I" Sarajevo	KS	0	9	2	1	0	12
9	nam26	Amina Fejzić	OŠ "Grbavica II" Sarajevo	KS	0	10	0	1	0	11
9	APM81	Salibašić Anel	OŠ "Lukavac Grad" Lukavac	TK	0	9	0	1	1	11
9	MEL08	Kapetanović Melika	OŠ "Novi Grad" Tuzla	TK	5	5	0	1	0	11
12	BAY13	Enver Operta	OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	KS	0	9	0	1	0	10
13	EVH07	Andi Burzić	OŠ "Isak Samokovlija" Sarajevo	KS	0	8	0	1	0	9
13	pcd48	Žepić Lana	OŠ "Sveti Franjo" Tuzla	TK	0	7	2	0	0	9
13	TOP07	Dino Topčagić	OŠ "Hasan Kikić" Gračanica	TK	8	0	0	1	0	9
16	GRY27	Merima Gaštan	OŠ "Čengić Vila I" Sarajevo	KS	0	8	0	0	0	8

17	NaČ11	Naida Čomor	OŠ “Velešićki heroji” Sarajevo	KS	0	7	0	0	0	7
18	VOE12	Hanan Hodžić	OŠ “Isak Samokovlija” Sarajevo	KS	1	5	0	0	0	6
19	FAG13	Farah Glamoč	OŠ “Silvije Strahimir Kranjčević” Sarajevo	KS	0	5	0	0	0	5
19	Tim93	Ema Deljo	OŠ “Husein ef. Đozo” Goražde	BPK	0	5	0	0	0	5
19	CIG14	Menil Marić	OŠ “Mustafa Ejubović – Šejh Jujo” Mostar	HNK	4	1	0	0	0	5
22	SAM26	Samra Karadža	OŠ “Zalik” Mostar	HNK	0	0	0	1	0	1
23	eay610	Alema Rogo	OŠ “Malta” Sarajevo	KS	0	0	0	0	0	0
23	Lin12	Alina Omerbegović	OŠ “Safvet-beg Bašagić” Visoko	ZDK	0	0	0	0	0	0
23	tnt298	Nidal Milišić	Druga osnovna škola – Ilidža	KS	0	0	0	0	0	0

Čestitamo svim takmičarima na učešću!

Na Juniorsku matematičku olimpijadu BiH se poziva učenik Adnan Osmić.

Takmičarska komisija UMKS

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo u saradnji sa
Udruženjem matematičara "Algoritam" Mostar, Udruženjem matematičara Tuzlanskog kantona i Pedagoškim zavodom Tuzla

61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Mostar / Sarajevo / Tuzla, 16.05.2021. godine

VIII RAZRED – KONAČNI REZULTATI

Plasman	Šifra	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto	Kanton	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Ukupno
1	MNO73	Amila Pašić	OŠ "Novi Grad" Tuzla	TK	10	10	10	10	0	40
2	far87	Faruk Demirović	OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	KS	10	10	0	9	0	29
3	TRI12	Nađa Hadžiabdić	OŠ "Ćamil Sijarić" Sarajevo	KS	10	10	4	3	0	27
4	ACC246	Emir Salčinović	OŠ "Grbavica I" Sarajevo	KS	10	10	2	1	0	23
5	IRF39	Nedžma Durović	OŠ "Alija Nametak Sarajevo	KS	10	10	1	1	0	22
6	NED24	Nedim Beganović	OŠ "Cazin II" Cazin	USK	10	10	0	1	0	21
7	BSD69	Adrian Mišić	Katolički školski centar Sv. Josip – OŠ Centar	KS	10	0	2	8	0	20
7	IPL35	Ilma Pleh	Šesta osnovna škola – Ilidža	KS	10	10	0	0	0	20
7	SUP56	Aron Arslan	OŠ "Grbavica II" Sarajevo	KS	10	10	0	0	0	20
10	dan13	Danis Begović	OŠ "Meša Selimović" Sarajevo	KS	10	2	0	4	0	16
11	EMU34	Emina Umihanić	Richmond Park International Primary School Tuzla	TK	10	3	0	1	0	14
12	ALT28	Nađa Trešnjo	Prva osnovna škola Konjic	HNK	10	2	0	0	0	12
13	KRH21	Helena Dizdarević	OŠ "Grbavica II" Sarajevo	KS	6	5	0	0	0	11
14	BAO88	Nizar Ćato	OŠ "Grbavica II" Sarajevo	KS	10	0	0	0	0	10
14	FBI51	Tarik Mahmutović	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	KS	10	0	0	0	0	10
16	AHK07	Ahmed Krdžić	OŠ "Podlugovi" Ilijaš	KS	6	3	0	0	0	9

17	DEM16	Farah Demirović	OŠ “Skender Kulenović” Sarajevo	KS	0	2	0	3	0	5
17	tsh07	Tarik Sarajlić	OŠ “Hasan Kikić” Gračanica	TK	2	3	0	0	0	5
19	RFC59	Dina Burazerović	OŠ “Musa Ćazim Ćatić” Sarajevo	KS	1	0	3	0	0	4
20	BIH69	Annur Mešić	OŠ “Isak Samokovlija” Sarajevo	KS	0	3	0	0	0	3
21	chf91	Ismail Saničić	Privatna osnovna škola “Bloom” Sarajevo	KS	0	0	0	1	0	1
21	LMK20	Lamija Mujić	OŠ “Bijelo Polje” Potoci, Mostar	HNK	0	1	0	0	0	1
23	MVR11	Mustafa Vrabac	OŠ “Đulistan” Ilijaš	KS	0	0	0	0	0	0
23	NBK14	Nora Barać	OŠ “Ivan Goran Kovačić” Gradačac	TK	0	0	0	0	0	0
23	SCC16	Sumeja Camović	OŠ “Isak Samokovlija” Sarajevo	KS	0	0	0	0	0	0

Čestitamo svim takmičarima na učešću!

Na Juniorsku matematičku olimpijadu BiH se pozivaju učenici Amila Pašić, Faruk Demirović, Nađa Hadžiabdić, Emir Salčinović, Nedžma Durović i Nedim Beganović

Takmičarska komisija UMKS

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo u saradnji sa
Udruženjem matematičara “Algoritam” Mostar, Udruženjem matematičara Tuzlanskog kantona i Pedagoškim zavodom Tuzla

61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA

Mostar / Sarajevo / Tuzla, 16.05.2021. godine

IX RAZRED – KONAČNI REZULTATI

Plasman	Šifra	Ime i prezime učenika	Škola i mjesto	Kanton	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Ukupno
1	mat89	Benjamin Mujkić	OŠ “Safvet-beg Bašagić” Novi Travnik	SBK	10	10	10	9	10	49
2	MRF45	Abdullah Fehratbegović	OŠ “Ćamil Sijarić” Sarajevo	KS	9	10	10	5	10	44
3	WLS96	Sara Smajić	OŠ “Isak Samokovlija” Sarajevo	KS	10	8	10	2	10	40
4	MDZ78	Iman Kržalić	OŠ “Čengić Vila I” Sarajevo	KS	10	10	9	0	0	29
4	TBH74	Ajša Borovina	OŠ “Skender Kulenović” Sarajevo	KS	9	10	1	9	0	29
6	HAH96	Faruk Ibrahinović	OŠ “Alija Nametak” Sarajevo	KS	9	9	8	0	0	26
7	GGF23	Vedad Kozica	OŠ “Grbavica I” Sarajevo	KS	10	3	6	6	0	25
8	mns55	Senada Zaketović	OŠ “Hasan Kikić” Gračanica	TK	10	2	3	8	0	23
9	khs97	Ines Jozić	OŠ “Stari Ilijaš” Ilijaš	KS	10	9	3	0	0	22
10	SEM12	Filip Krištić	Katolički školski centar Sv. Josip – OŠ Centar	KS	10	0	9	0	1	20
11	TWS13	Kerim Fetić	OŠ “Mak Dizdar” Zenica	ZDK	9	0	10	0	0	19
11	ŽGP09	Isa Švrakić	OŠ “Grbavica I” Sarajevo	KS	9	0	10	0	0	19
13	MTI59	Mateo Šešum	OŠ “Isak Samokovlija” Sarajevo	KS	9	1	0	6	0	16
14	kgh99	Merjem Kurtović	Treća osnovna škola – Ilidža	KS	9	1	5	0	0	15
15	UMT69	Fatih-Efe Memišević	OŠ “Osman Nakaš” Sarajevo	KS	9	0	5	0	0	14
16	NMU25	Muhamed Numanović	Prva osnovna škola Živinice	TK	10	2	1	0	0	13
17	bgs66	Naida Džubur	OŠ “Kovačići” Sarajevo	KS	9	0	1	0	0	10

17	ALI10	Lamija Sabitović	OŠ “Suljo Čilić” Jablanica	HNK	9	1	0	0	0	10
17	dal38	Dalila Husanović	OŠ “Hasan Kikić” Gračanica	TK	9	0	1	0	0	10
17	KLM21	Eldin Feukić	OŠ “Gornja Tuzla” Tuzla	TK	9	0	1	0	0	10
17	NDX53	Nadija Džolota	OŠ “Zalik” Mostar	HNK	9	0	0	1	0	10
22	PUŽ45	Nedim Begović	OŠ “Meša Selimović” Sarajevo	KS	8	1	0	0	0	9
22	DVM29	Minel Vrco	Treća osnovna škola Oborci, Donji Vakuf	SBK	9	0	0	0	0	9
22	KUL69	Jan Hadžiomerspahić	OŠ “Musa Ćazim Ćatić” Sarajevo	KS	9	0	0	0	0	9
22	TTK12	Amina Gicić	OŠ “Kovačići” Sarajevo	KS	8	1	0	0	0	9
22	ADN52	Nadja Smajkić	OŠ “Zalik” Mostar	HNK	8	1	0	0	0	9
22	HLA53	Lamija Jakubović	OŠ “Rainci Gornji” Kalesija	TK	9	0	0	0	0	9
28	MXP54	Merjem Čolan	OŠ “Vareš Majdan” Vareš	ZDK	4	0	0	0	0	4
28	VAN01	Lejla Baturić	OŠ “Musa Ćazim Ćatić” Zelinja Donja	TK	2	1	1	0	0	4
30	WTC25	Delila Beriša	OŠ “Fatima Gunić” Sarajevo	KS	1	2	0	0	0	3
31	GEH17	Ema Hećimović	OŠ “Ivan Goran Kovačić” Gradačac	TK	0	0	0	0	0	0

Čestitamo svim takmičarima na učešću!

Na Juniorsku matematičku olimpijadu BiH se pozivaju učenici Benjamin Mujkić, Abdullah Fehratbegović, Sara Smajić, Iman Kržalić, Ajša Borovina, Faruk Ibrahinović, Vedad Kozica, Senada Zaketović, Ines Jozić, Filip Krištić, Kerim Fetić i Isa Švrakić .

Takmičarska komisija UMKS