Udruženje matematičara Kantona Sarajevo

BILTEN FEDERALNOG TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA 2024. GODINE

Sarajevo, 11.5.2024. godine

Federalno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola održano je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu, 11.5.2024. godine. Na takmičenju je učestvovalo 159 učenika koji su odabrani na kantonalnim takmičenjima, kao i na kvalifikacionom takmičenju održanom 28.4.2024. godine.

Otvaranje je održano u prepunom amfiteatru "Branko Galeb". Prisutnima se najprije obratio prof. dr. Esmir Pilav, predsjednik Udruženja matematičara Kantona Sarajevo, koji je pozdravio sve prisutne i poželio takmičarima sreću. Nakon njega se obratila i ministrica za odgoj i obrazovanje Kantona Sarajevo, Naida Hota-Muminović, koja je i otvorila takmičenje. Na kraju, ispred takmičarske komisije se obratio Admir Beširević, lider ekipe Bosne i Hercegovine na Juniorskoj balkanskoj matematičkoj olimpijadi, koji je učenicima dao osnovne upute.

Na zahtjevnim zadacima učenici su pokazali zavidno znanje, te je u svakom razredu prvoplasirani učenik imao preko 30 bodova (od mogućih 50), dok je ukupno 26 učenika osvojilo 25 ili više bodova (tj. 50% ili više). Najviše bodova, ukupno 42, su osvojili pobjednici u osmom i devetom razredu, Tarik Odžak i Harun Memić. Na Juniorsku matematičku olimpijadu BiH (JMOBiH) se plasiralo 20 učenika. Juniorska matematička olimpijada BiH se održava 25. maja u Doboju. Satnica JMOBiH će biti okačena na našoj web stranici u narednom periodu. Na JMOBiH se plasirala pobjednica u sedmom razredu, po prvoplasiranih devet učenika u osmom i devetom razredu, te jedna učenica prvog razreda srednje škole koja se nezvanično takmičila u konkurenciji devetih razreda (s obzirom da po godinama ima pravo nastupa na Juniorskoj balkanskoj matematičkoj olimpijadi).

Slijedi nekoliko fotografija sa takmičenja, kao i zadaci sa rješenjima, te rezultati takmičenja sa pobrojanim učenicima koji su se plasirali na Juniorsku matematičku olimpijadu BiH.

ZADACI

VI RAZRED

Zadatak 1. Neka je $A = \{a \mid \overline{123a5}$ je djeljiv sa $15\}$ (dakle, A je skup svih cifara a za koje je petocifreni broj $\overline{123a5}$ djeljiv sa 15), a $B = \{b \mid \overline{1b2bb6}$ je djeljiv sa $12\}$ (slično, B je skup svih cifara b za koje je šestocifreni broj $\overline{1b2bb6}$ djeljiv sa 12). Odrediti skup X takav da (istovremeno) vrijede relacije $X \cup B = \{1,3,4,5,6,7,9\}$ i $B \setminus X = A \cap B$. Obavezno obrazložiti kako ste odredili koji elementi pripadaju skupu X, a koji ne pripadaju!

Zadatak 2. Na putu za federalno takmičenje nastavnik je Emilu i Nori rekao da napišu po jedan razlomak. Emilu je bilo mrsko razmišljati, pa pošto je danas 11.5.2024. godine, napisao je razlomak $\frac{115}{2024}$. Nakon što je i Nora napisala svoj razlomak, nastavnik je primijetio: „Za razliku od Emila, Nora je napisala neskrativ razlomak. Ako se recipročna vrijednost Emilovog razlomka sabere sa Norinim razlomkom, te se taj zbir pomnoži sa recipročnom vrijednošću Norinog razlomka, dobija se 9.“ Koji razlomak je Nora napisala? Odgovor obrazložiti!

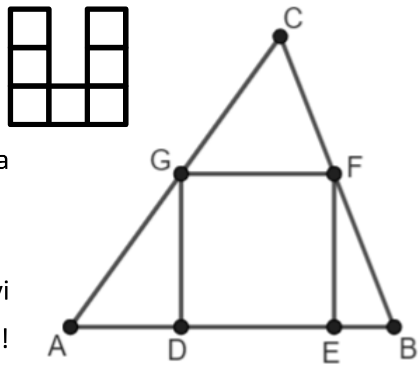
Napomena: Recipročna vrijednost razlomka se dobija kada zamijenimo brojnik i nazivnik, npr. recipročna vrijednost razlomka $\frac{14}{9}$ je jednaka $\frac{9}{14}$. Također, razlomak $\frac{14}{9}$ je neskrativ, dok $\frac{15}{9}$ nije (može se skratiti sa 3).

Zadatak 3. Tabela 50×50 je popunjena redom brojevima od 1 do 2500. Dakle, u prvom redu su redom brojevi od 1 do 50, u drugom redu su redom brojevi od 51 do 100, ... , u zadnjem redu su redom brojevi od 2451 do 2500. Da li u toj tabeli 50×50 postoji sedam polja koja grade slovo U (kao na slici), tako da je:

a) zbir brojeva u tih sedam polja jednak 4202? Odgovor obrazložiti!

b) zbir brojeva u tih sedam polja jednak 2024? Odgovor obrazložiti!

c) zbir brojeva u tih sedam polja jednak 6000? Odgovor obrazložiti!



Zadatak 4. Dati su trougao ABC i kvadrat $DEFG$, kao na slici. Obimi trouglova ABC, ADG, EBF, GFC su redom jednaki $78\ cm, 36\ cm, 30\ cm, 36\ cm$.

a) Odrediti dužinu stranice kvadrata $DEFG$. Odgovor obrazložiti!

b) Duž GC je jednaka $\frac{6}{7}$ duži AG, a duž CF je jednaka $\frac{6}{7}$ duži FB (ovi uslovi vrijede i za dio pod c)). Odrediti dužinu duži AB. Odgovor obrazložiti!

c) Duž AG je trostruko veća od duži BE. Odrediti dužine duži AG, AD, BE, BF. Odgovor obrazložiti!

Zadatak 5. Kada broj 13 podijelimo sa 5,7 i 9, dobijamo redom ostatke 3,6 i 4, te vrijedi $3 + 6 + 4 = 13$. Dakle, zbir ovih ostataka jednak je početnom broju 13.

a) Da li postoji prirodan broj $m > 222$ takav da kada podijelimo m sa 128 i 222, zbir dva dobijena ostatka je jednak m? Odgovor obrazložiti!

b) Odrediti sve prirodne brojeve $n > 222$ takve da kada podijelimo n sa $96, 128$ i 222, zbir tri dobijena ostatka je jednak n. Odgovor obrazložiti!

VII RAZRED

Zadatak 1. Odrediti zbir prvih 2024 decimala (tj. cifara iza decimalnog zareza) u decimalnom zapisu broja $\frac{11}{21}$.

Zadatak 2. Odrediti sve trojke (a, b, c) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$\frac{a}{8}+\frac{b}{11}+\frac{c}{23}=\frac{1165}{2024}.$$

Zadatak 3. Za prirodan broj kažemo da je *zanimljiv* ako se zapisuje koristeći tačno dvije različite cifre, te ako se obje javljaju isti broj puta. Na primjer, brojevi $2662, 550005$ i 45454554 su zanimljivi, a brojevi $6666, 7112, 112233$ i 88811188 nisu.

a) Dokazati da ne postoji zanimljiv četverocifren broj koji je prost.

b) Naći barem 27 parova cifara od kojih se ne može napisati niti jedan osmocifren zanimljiv broj koji je prost. Obrazložiti zašto se od tih parova ne može napisati niti jedan osmocifren zanimljiv prost broj!
Napomena: U svakom paru cifre moraju biti različite, te se misli na neuređene parove, što znači da poredak nije bitan. Na primjer, par $\{0, 3\}$ smatramo istim kao par $\{3, 0\}$ (tj. računamo ih kao jedan par).

Zadatak 4. Dat je tupougli trougao ΔABC sa tupim uglom kod vrha A. Simetrala stranice AC siječe pravu AB u tački P, pri čemu se P nalazi na produžetku stranice AB preko A. Na pravoj AC data je tačka D takva da je C sredina duži AD. Na pravoj AB data je tačka Q takva da je A sredina duži PQ. Ako se prave QC i PD sijeku u tački T, dokazati da je $TC = TD$.

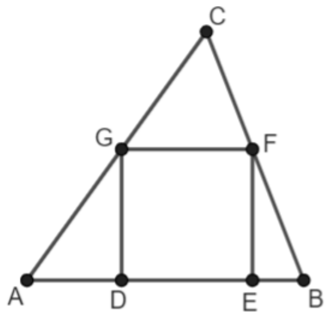
Zadatak 5. Na takmičenju je učestvovalo 205 učenika, te je maksimalan mogući broj bodova bio 40. Na kraju takmičenja se ispostavilo da je svaki učenik osvojio ili a ili b bodova, gdje su a i b prirodni brojevi takvi da je $1 \leq b < a \leq 40$. Poznato je da postoji bar jedan učenik koji je osvojio a bodova, kao i bar jedan učenik koji je osvojio b bodova. Također, ispostavilo se da je prosječni broj bodova po učeniku prirodan broj.

a) Odrediti sve mogućnosti za broj učenika koji su osvojili a bodova.

b) Odrediti broj mogućih parova (a, b) koji zadovoljavaju date uslove.

Napomena: prosječna vrijednost nekog niza brojeva je suma tih brojeva podijeljena sa brojem tih brojeva. Npr. prosječna vrijednost brojeva $2, 5, 8$ je $\frac{2+5+8}{3}=\frac{15}{3}=5$, a prosječna vrijednost brojeva $2, 2, 3, 9$ je $\frac{2+2+3+9}{4}=\frac{16}{4}=4$.

VIII RAZRED



Zadatak 1. Dati su trougao ABC i kvadrat $DEFG$, kao na slici. Obimi trouglova ABC, ADG, EBF, GFC su redom jednaki $78, 36, 30$ i 36. Odrediti dužinu svake od duži AD, DE, EB, BF, FC, CG i GA. Odgovor obrazložiti!

Zadatak 2. Ako za realne brojeve a, b, c vrijedi $abc = 1$ i $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right) = 111$, odrediti vrijednost izraza $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2$.

Zadatak 3. Za prirodan broj kažemo da je *lijep* ako nema nulu u svom dekadnom zapisu, ako su mu sve cifre međusobno različite, i ako za svake dvije susjedne cifre vrijedi da jedna dijeli drugu. Na primjer, brojevi 516 i 4263 su lijepi, dok brojevi 506, 515 i 4236 to nisu.

a) Koliko maksimalno cifara može imati *lijep* broj?
b) Koliko ukupno ima *lijepih* brojeva sa maksimalnim brojem cifara?

Odgovore obrazložiti!

Zadatak 4. Kada broj 13 podijelimo sa 5,7 i 9, dobijamo redom ostatke 3,6 i 4, te vrijedi $3+6+4=13$. Dakle, zbir ovih ostataka jednak je početnom broju 13.

a) Koliko ima prirodnih brojeva m takvih da kada podijelimo m sa 115 i 2024, zbir dva dobijena ostatka je jednak m? Odgovor obrazložiti!
b) Koliko ima prirodnih brojeva n takvih da kada podijelimo n sa $347, 462$ i 805, zbir tri dobijena ostatka je jednak n? Odgovor obrazložiti!

Napomena: Ostatak pri dijeljenju prirodnim brojem može biti jednak 0.

Zadatak 5. U oštrouglom trouglu ABC vrijedi $\angle BCA = 30°$ i $AC < BC$. Tačka M nalazi se u unutrašnjosti trougla ABC tako da vrijedi $\angle AMB = 105°$. Simetrale duži AM i BM sijeku stranice AC i BC u tačkama P i Q, redom.

a) Dokazati da tačke M, P i Q leže na istoj pravoj.
b) Ako je obim trougla CPQ jednak 44, a površina trougla ABC jednaka 120, odrediti dužinu stranice AB.

IX RAZRED

Zadatak 1. Dat je trougao ABC u Descartesovom pravouglom koordinatnom sistemu sa vrhovima $A(5,0)$, $B(11,8)$ i $C(c,4)$, pri čemu je $c > 0$. Neka su B' i C' simetrične slike tačaka B i C, redom, u odnosu na y −osu. Ako su tačke A, B' i C' kolinearne (tj. leže na istoj pravoj), odrediti:

a) koordinate tačke C;
b) površinu četverougla $BCC'B'$;
c) površinu trougla ABC.

Napomena: Za tačku X' kažemo da je simetrična slika tačke X u odnosu na pravu p ako vrijedi $XX' \perp p$ i $\overline{X'T} \cong \overline{XT}$, gdje je $\{T\} = XX' \cap p$.

Zadatak 2. Dat je tupougli trougao ABC sa tupim uglom kod vrha A. Simetrala stranice $\overline{AC}$ siječe pravu AB u tački P, pri čemu se P nalazi na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko A. Na pravoj AC data je tačka D takva da je C sredina duži $\overline{AD}$. Na pravoj AB data je tačka Q takva da je A sredina duži $\overline{PQ}$. Ako se prave QC i PD sijeku u tački T, dokazati da je $\overline{TC} = \overline{TD}$.

Zadatak 3. Za prirodan broj kažemo da je *lijep* ako nema nulu u svom dekadnom zapisu, ako su mu sve cifre međusobno različite, i ako za svake dvije susjedne cifre vrijedi da jedna dijeli drugu. Na primjer, brojevi 516 i 4263 su lijepi, dok brojevi 506, 515 i 4236 to nisu.

a) Koliko maksimalno cifara može imati *lijep* broj?
b) Koliko ukupno ima *lijepih* brojeva sa maksimalnim brojem cifara?

Odgovore obrazložiti!

Zadatak 4. Kada broj 13 podijelimo sa $5{,}7$ i 9, dobijamo redom ostatke $3{,}6$ i 4, te vrijedi $3 + 6 + 4 = 13$. Dakle, zbir ovih ostataka jednak je početnom broju 13.

a) Koliko ima prirodnih brojeva m takvih da kada podijelimo m sa 115 i 2024, zbir dva dobijena ostatka je jednak m? Odgovor obrazložiti!
b) Koliko ima prirodnih brojeva n takvih da kada podijelimo n sa 347, 462 i 805, zbir tri dobijena ostatka je jednak n? Odgovor obrazložiti!

Napomena: Ostatak pri dijeljenju prirodnim brojem može biti jednak 0.

Zadatak 5. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi.

a) Da li iz tvrdnje $c(a^3 + b^3) = a(b^3 + c^3) = b(c^3 + a^3)$ slijedi tvrdnja $a = b = c$?
b) Da li iz tvrdnje $a(a^3 + b^3) = b(b^3 + c^3) = c(c^3 + a^3)$ slijedi tvrdnja $a = b = c$?

VI RAZRED – rješenja zadataka i šema bodovanja

Zadatak 1. Neka je $A = \{a \mid \overline{123a5}$ je djeljiv sa $15\}$ (dakle, A je skup svih cifara a za koje je petocifreni broj $\overline{123a5}$ djeljiv sa 15), a $B = \{b \mid \overline{1b2bb6}$ je djeljiv sa $12\}$ (slično, B je skup svih cifara b za koje je šestocifreni broj $\overline{1b2bb6}$ djeljiv sa 12). Odrediti skup X takav da (istovremeno) vrijede relacije $X \cup B = \{1,3,4,5,6,7,9\}$ i $B \setminus X = A \cap B$. Obavezno obrazložiti kako ste odredili koji elementi pripadaju skupu X, a koji ne pripadaju!

Rješenje:

Broj je djeljiv sa 15 ukoliko je djeljiv sa 3 i 5. Pošto se broj $\overline{123a5}$ završava sa 5, on je sigurno djeljiv sa 5. Kako je broj djeljiv sa 3 kad mu je zbir cifara djeljiv sa 3, to mora $1 + 2 + 3 + a + 5 = 11 + a$ biti djeljivo sa 3, odakle zaključujemo da $a \in \{1,4,7\}$. Dakle, $A = \{1,4,7\}$.

Broj je djeljiv sa 12 ukoliko je djeljiv sa 3 i 4. Broj je djeljiv sa 4 ukoliko mu je dvocifreni završetak djeljiv sa 4. Broj $\overline{b6}$ je djeljiv sa 4 za $b \in \{1,3,5,7,9\}$. Kako je zbir cifara broja $\overline{1b2bb6}$ jednak $1 + b + 2 + b + b + 6 = 3b + 9$, što je uvijek djeljivo sa 3, to je ovaj broj djeljiv sa 3 za svako b (mogli smo i provjeriti svaku moguću vrijednost b). Dakle, $B = \{1,3,5,7,9\}$.

Kako je $X \cup B = \{1,3,4,5,6,7,9\}$, to je $X \cup \{1,3,5,7,9\} = \{1,3,4,5,6,7,9\}$. Odavde zaključujemo da skup X sigurno sadrži elemente 4 i 6, te da su mu još jedini potencijalni elementi $1,3,5,7,9$.

Međutim, kako je $B \setminus X = A \cap B$, te je $A \cap B = \{1,7\}$, to imamo $\{1,3,5,7,9\} \setminus X = \{1,7\}$. Odavde zaključujemo da elementi 1 i 7 ne pripadaju skupu X, te da $3,5,9$ pripadaju skupu X (inače bi bili u $\{1,3,5,7,9\}$).

Dakle, $X = \{3,4,5,6,9\}$.

Šema bodovanja:

- **3 boda** za određivanje skupa A, i to:
  - **1 bod** za zaključak kad je broj djeljiv sa 15 i navođenje pravila djeljivosti sa 3 i 5
  - **1 bod** za zaključak da je dati broj uvijek djeljiv sa 5
  - **1 bod** za određivanje mogućnosti za cifru a

  Validno je da učenik isproba svih 10 mogućnosti za a, te utvrdi za koje od tih njih je broj djeljiv sa 15. Da bi za to dobio sva tri boda, potrebno je da se vidi da je učenik zaista provjerio sve mogućnosti za a.
- **3 boda** za određivanje skupa B, i to:
  - **1 bod** za zaključak kad je broj djeljiv sa 12 i navođenje pravila djeljivosti sa 3 (ako nije ranije navedeno) i 4
  - **1 bod** za određivanje mogućnosti za b iz djeljivosti sa 4
  - **1 bod** za zaključak da je dati broj uvijek djeljiv sa 3 (ili za sve dobijene vrijednosti b)
- **1 bod** za zaključak da elementi 4 i 6 pripadaju skupu X
- **2 boda** za zaključak da elementi 1 i 7 ne pripadaju skupu X, a da elementi $3,5$ i 9 pripadaju
- **1 bod** za konačni skup X

Zadatak 2. Na putu za federalno takmičenje nastavnik je Emilu i Nori rekao da napišu po jedan razlomak. Emilu je bilo mrsko razmišljati, pa pošto je danas 11.5.2024. godine, napisao je razlomak $\frac{115}{2024}$. Nakon što je i Nora napisala svoj razlomak, nastavnik je primijetio: „Za razliku od Emila, Nora je napisala neskrativ razlomak. Ako se recipročna vrijednost Emilovog razlomka sabere sa Norinim razlomkom, te se taj zbir pomnoži sa recipročnom vrijednošću Norinog razlomka, dobija se 9." Koji razlomak je Nora napisala? Odgovor obrazložiti!

Napomena: Recipročna vrijednost razlomka se dobija kada zamijenimo brojnik i nazivnik, npr. recipročna vrijednost razlomka $\frac{14}{9}$ je jednaka $\frac{9}{14}$. Također, razlomak $\frac{14}{9}$ je neskrativ, dok $\frac{15}{9}$ nije (može se skratiti sa 3).

Rješenje:

Primijetimo najprije da je $115 = 23 \cdot 5$, te da je $2024 = 23 \cdot 88$, pa je Emilov razlomak jednak $\frac{115}{2024} = \frac{5}{88}$. Neka je Norin razlomak jednak $\frac{a}{b}$, pri čemu je $NZD(a, b) = 1$. Iz uslova zadatka je

$$\left(\frac{88}{5} + \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{b}{a} = 9.$$

Kako je proizvod razlomka i njegove recipročne vrijednosti jednak 1, primjenjujući distributivnost dobijamo

$$\frac{88}{5} \cdot \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 9 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{88}{5} \cdot \frac{b}{a} + 1 = 9 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{88}{5} \cdot \frac{b}{a} = 8 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{a} = \frac{8}{\frac{88}{5}} = \frac{\frac{8}{1}}{\frac{88}{5}} = \frac{8 \cdot 5}{88 \cdot 1} = \frac{40}{88} = \frac{5}{11}.$$

Dakle, recipročna vrijednost Norinog razlomka je $\frac{5}{11}$, pa je Norin razlomak jednak $\frac{11}{5}$ (i on je neskrativ).

Napomena: Naravno, moguće je da učenik Norin razlomak označi sa x, pa je tada recipročna vrijednost jednaka $\frac{1}{x}$, te da dalje radi ekvivalentno gornjem rješenju.

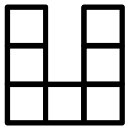
Šema bodovanja:

- **1 bod** za skraćivanje Emilovog razlomka s 23 (ukoliko učenik ne skrati Emilov razlomak, Norin razlomak će dobiti takav da se može skratiti sa 23, ovaj bod učenik može osvojiti ako skrati Norin razlomak s 23)
- **3 boda** za pravilno postavljanje jednačine $\left(\frac{88}{5} + \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{b}{a} = 9$ (ili $\left(\frac{88}{5} + x\right) \cdot \frac{1}{x} = 9$, pri čemu učenik dobija ove bodove i ako umjesto $\frac{88}{5}$ piše $\frac{2024}{115}$)
- **3 boda** za dobijanje relacije $\frac{88}{5} \cdot \frac{b}{a} = 8$ (ili 4 boda ukoliko se dobije $\frac{88}{5} = 8 \cdot \frac{a}{b}$, vidjeti napomenu)
- **3 boda** za završetak rješenja (1 bod za dobijanje $\frac{b}{a}$ u neskraćenom obliku, 1 bod za skraćivanje sa 8, te 1 bod za dobijanje $\frac{a}{b}$)

Napomena: Ukoliko učenik dobije relaciju $\frac{88}{5} = 8 \cdot \frac{a}{b}$, dobija 4 boda, pri čemu se još jedan bod dobija za određivanje razlomka $\frac{a}{b}$, te još jedan za skraćivanje razlomka sa 8).

Zadatak 3. Tabela 50×50 je popunjena redom brojevima od 1 do 2500. Dakle, u prvom redu su redom brojevi od 1 do 50, u drugom redu su redom brojevi od 51 do 100, ... , u zadnjem redu su redom brojevi od 2451 do 2500. Da li u toj tabeli 50×50 postoji sedam polja koja grade slovo U (kao na slici), tako da je:

a) zbir brojeva u tih sedam polja jednak 4202? Odgovor obrazložiti!
b) zbir brojeva u tih sedam polja jednak 2024? Odgovor obrazložiti!
c) zbir brojeva u tih sedam polja jednak 6000? Odgovor obrazložiti!



Rješenje:
Primijetimo da ako je u nekom polju napisan broj a, onda je u polju iznad napisan broj $a-50$, ispod $a+50$, lijevo $a-1$, a desno $a+1$ (pod uslovom da u tabeli postoje polja iznad, ispod, lijevo i desno).
Označimo sa x broj koji se nalazi u srednjem od donja tri polja naše figure. Tada imamo sljedeću situaciju:

x-101		x-99
x-51		x-49
x-1	x	x+1

Dakle, zbir brojeva u ovih 7 polja je $x-101+x-99+x-51+x-49+x-1+x+x+1=7x-300$.

a) Ako je moguće da je zbir jednak 4202, tada imamo $7x-300=4202$, tj. $7x=4502$. Međutim, broj 4502 nije djeljiv sa 7, pa je ovaj slučaj nemoguć.
b) Sada imamo $7x-300=2024$, tj. $7x=2324$, odakle je $x=2324:7=332$. Ovaj slučaj je moguć, te na slici vidimo koji dio ploče bi pokrila polja naše figure.

231	232	233
281	282	283
331	332	333

c) Sada dobijamo $7x-300=6000$, tj. $7x=6300$, odakle je $x=900$. Kada bi ovaj slučaj bio moguć, imali bismo situaciju kao na sljedećoj slici:

799	800	801
849	850	851
899	900	901

Međutim, ovo je nemoguće jer je 900 posljednji broj u svom redu (jer je $900:50=18$, pa je 900 posljednji broj u 18. redu), pa je 901 prvi broj u narednom redu, te oni nisu u susjednim poljima.

Šema bodovanja:

- **1 bod** za zaključak čemu su jednaki susjedni brojevi nekog polja u odnosu na broj u tom polju
- **3 boda** za izražavanje svih brojeva u figuri preko jedne nepoznate
- **2 boda** za izražavanje zbira brojeva u figuri preko jedne nepoznate
- **1 bod** za dio pod a, **1 bod** za dio pod b), **2 boda** za dio pod c) (od čega je 1 za rješavanje jednačine)

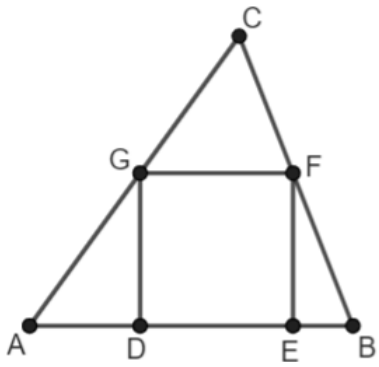
Napomena: Ukoliko učenik ne postavi jednačinu, nego gleda šta se dešava sa zbirom kad se figura pomjera, za dio pod b) je dovoljno da pronađe dio ploče sa odgovarajućim zbirom, ali za dijelove pod a) i c) je neophodno da ima dokaz da je taj zbir nemoguć (argumenti „probavanjem se dobija da ne postoji ovaj zbir“ se ne priznaju).

Zadatak 4. Dati su trougao ABC i kvadrat $DEFG$, kao na slici. Obimi trouglova ABC, ADG, EBF, GFC su redom jednaki $78\ cm, 36\ cm, 30\ cm, 36\ cm$.

a) Odrediti dužinu stranice kvadrata $DEFG$. Odgovor obrazložiti!

b) Duž GC je jednaka $\frac{6}{7}$ duži AG, a duž CF je jednaka $\frac{6}{7}$ duži FB (ovi uslovi vrijede i za dio pod c)). Odrediti dužinu duži AB. Odgovor obrazložiti!

c) Duž AG je trostruko veća od duži BE. Odrediti dužine duži AG, AD, BE, BF. Odgovor obrazložiti!



Rješenje:

a) Označimo stranicu kvadrata $DEFG$ sa a. Imamo da je

$$36 = GF + FC + CG = a + FC + CG$$
$$30 = FB + BE + EF = FB + BE + a$$
$$36 = DA + AG + GD = DA + AG + a$$
$$78 = BC + AC + AB$$

Sabiranjem prve tri jednakosti, te korištenjem četvrte, dobijamo:

$$\begin{aligned} 102 &= a + FC + CG + FB + BE + a + DA + AG + a \\ &= (FC + FB) + (AG + CG) + (DA + a + BE) + 2 \cdot a = BC + AC + AB + 2 \cdot a \\ &= 78 + 2 \cdot a, \end{aligned}$$

odakle je $2a = 102 - 78 = 24$, tj. $a = 12\ cm$.

b) Sada iz trougla CGF imamo $CG + CF = 36 - a = 36 - 12 = 24$, pa iz $GC = \frac{6}{7} \cdot AG$ i $CF = \frac{6}{7} \cdot FB$ dobijamo $\frac{6}{7} \cdot AG + \frac{6}{7} \cdot BF = 24$, tj. $\frac{6}{7}(AG + BF) = 24$, odakle je $AG + BF = 28$. Sada je

$$AC + BC = AG + GC + CF + BF = (AG + BF) + (CG + CF) = 28 + 24 = 52,$$

odakle je $AB = 78 - (AC + BC) = 78 - 52 = 26\ cm$.

c) Kako je $BE + AD = AB - DE = 26 - 12 = 14$, te je $AD + AG = 36 - GD = 36 - 12 = 24\ cm$, dobijamo $AD + 3 \cdot BE = 24$. Posljednju jednakost možemo pisati kao $BE + AD + 2 \cdot BE = 24$, te zbog $BE + AD = 14$ dobijamo $14 + 2 \cdot BE = 24$, odakle izračunavamo $BE = 5\ cm$.
Sada lako određujemo i ostale stranice: $AG = 3 \cdot BE = 3 \cdot 5 = 15\ cm$, $AD = 14 - BE = 14 - 5 = 9\ cm$, te $BF = 30 - BE - FE = 30 - 5 - 12 = 13\ cm$.

Šema bodovanja:

- **3 boda** za dio pod a)
  - **1 bod** od ova 3 se dobija za ideju sabiranja obima trouglova ADG, EBF, CGF
- **3 boda** za dio pod b)
  - **1 bod** od ova 3 se dobija za izračunavanje zbira duži AG i BF
- **4 boda** za dio pod c), i to:
  - **1 bod** za relacije $BE + AD = 14$ i $AD + 3 \cdot BE = 24$
  - **2 boda** za određivanje jedne od traženih duži
  - **1 bod** za određivanje dužina preostale tri duži

Zadatak 5. Kada broj 13 podijelimo sa $5{,}7$ i 9, dobijamo redom ostatke $3{,}6$ i 4, te vrijedi $3+6+4=13$. Dakle, zbir ovih ostataka jednak je početnom broju 13.

a) Da li postoji prirodan broj $m>222$ takav da kada podijelimo m sa 128 i 222, zbir dva dobijena ostatka je jednak m? Odgovor obrazložiti!

b) Odrediti sve prirodne brojeve $n>222$ takve da kada podijelimo n sa $96, 128$ i 222, zbir tri dobijena ostatka je jednak n. Odgovor obrazložiti!

Rješenje:

a) Neka broj m pri dijeljenju sa 128 daje ostatak r, a pri dijeljenju sa 222 ostatak s, te zapišimo broj m u obliku $m=128\cdot k+r$ $(0\leq r<128)$ i $m=222\cdot l+s$ $(0\leq s<222)$. Imamo

$$r+s=222\cdot l+s \qquad \Leftrightarrow$$
$$r=222\cdot l.$$

Međutim, kako je $m>222$, to je $l\geq 1$ (l je količnik prilikom dijeljenja m sa 222). Sada je nemoguće da vrijedi $r=222\cdot l$, jer je $r<128$, a $222\cdot l\geq 222$, pa ne postoji traženi broj m.

b) Neka n daje ostatke a,b,c pri dijeljenju s $96, 128, 222$, redom, te neka je $n=222\cdot t+c$. Sada je

$$a+b+c=222\cdot t+c \qquad \Leftrightarrow$$
$$a+b=222\cdot t.$$

Slično kao u dijelu pod a) zaključujemo da je $t\geq 1$, pa je $a+b=222\cdot t\geq 222$. Broj a je ostatak pri dijeljenju broja n sa 96, pa je $0\leq a\leq 95$, a kako je broj b ostatak pri dijeljenju broja n sa 128, to je $0\leq b\leq 127$. Međutim, kako je $95+127=222$, vidimo da je jedino moguće da vrijedi $a+b\geq 222$ ako je $a=95$ i $b=127$. Također, mora vrijediti $t=1$, pa je $n<222\cdot 2=444$.

Dakle, broj n daje ostatak 95 pri dijeljenju sa 96, te ostatak 127 pri dijeljenju sa 128. To znači da je broj $n+1$ djeljiv sa 96 i 128, pa je samim tim djeljiv sa njihovim najmanjim zajedničkim sadržiocem. Kako je $96=3\cdot 32$ i $128=4\cdot 32$, to je $NZS(96{,}128)=32\cdot 3\cdot 4=384$. Dakle, broj $n+1$ je djeljiv sa 384, te je manji od 445, pa mora vrijediti $n+1=384$, tj. $n=383$. Ostaci broja 383 pri dijeljenju sa $96{,}128{,}222$ su redom $95{,}127{,}161$, i vrijedi $95+127+161=383$, pa je to zaista rješenje zadatka.

Šema bodovanja:

- Dio pod a) vrijedi **2 boda**, a 1 bod se dobija za relaciju $r=222\cdot l$ ili $s=128\cdot k$
- Dio pod b) vrijedi **8 bodova**, i to:
  - **1 bod** za dobijanje relacije $a+b=222\cdot t$ (ili sličih relacija u kojima nema a ili b)
  - **2 boda** za zaključak da mora vrijedi $a=95$ i $b=127$, **1 bod** za zaključak $n<444$
  - **2 boda** za zaključak da je broj $n+1$ djeljiv sa 96 i 128
  - **2 boda** za određivanje broja n

VII razred - rješenja zadataka i šema bodovanja

Zadatak 1. Odrediti zbir prvih 2024 decimala (tj. cifara iza decimalnog zareza) u decimalnom zapisu broja $\frac{11}{21}$.

Rješenje

Postupkom dijeljenja dobijamo $11 : 21 = 0{,}523809523\ldots = 0,\overline{523809}$, gdje se nadvučeni niz decimala periodično ponavlja. Drugim riječima, niz od prve do šeste decimale je 523809, niz od sedme do dvanaeste također 523809, kao i niz od trinaeste do osamnaeste itd. Dakle, niz 523809 uvijek počinje na decimali čiji redni broj daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 6, a završava na decimali čiji je redni broj djeljiv sa 6. Kako je $2024 = 6 \cdot 337 + 2$, to se u prvih 2024 decimala javlja 337 potpunih perioda – posljednji je od 2017. do 2022. decimale. Zbir cifara u jednom periodu je $5 + 2 + 3 + 8 + 0 + 9 = 27$, a 2023. i 2024. decimala su redom 5 i 2, pa je zbir prvih 2024 decimala datog razlomka jednak $337 \cdot 27 + 5 + 2 = 9106$.

Šema bodovanja

- Izračunavanje decimalnog zapisa razlomka $\frac{11}{21}$ i zaključak da je taj zapis periodičan sa periodom 6: **3 boda**
  - Ukoliko učenik tačno izračuna prvih 6 cifara, ali ne zaključi da je zapis periodičan, dobija 1 od ova 3 boda. S druge strane, ako napravi grešku prilikom dijeljenja, te zbog toga dobije drugačiji period, dobija 2 od ova 3 boda ukoliko zaključi da je decimalni zapis periodičan.
- Određivanje broja potpunih perioda u prvih 2024 decimala: **3 boda**
  - Ukoliko je učenik zbog greške u računu dobio drugačiji period, i dalje može osvojiti ova 3 boda (pod uslovom da je period bar 2)
- Određivanje cifara koje se javljaju u posljednjem (nepotpunom) periodu: **2 boda**
  - Ukoliko je učenik zbog greške u računu dobio drugačiji period, može osvojiti ova 2 boda samo ako broj 2024 nije djeljiv sa njegovim periodom
- Dobivanje tačnog rezultata: **2 boda**
  - Učenik može dobiti 1 od ova 2 boda ukoliko je zbog greške u računu dobio drugačiji period, ali je za njegov period tačno izračunao sumu

Zadatak 2. Odrediti sve trojke (a, b, c) prirodnih brojeva za koje vrijedi

$$\frac{a}{8}+\frac{b}{11}+\frac{c}{23}=\frac{1165}{2024}.$$

Rješenje

Vrijedi $2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23$, što znači da je 2024 najmanji zajednički sadržilac svih nazivnika u jednačini. Nakon svođenja na najmanji zajednički sadržalac razlomaka na lijevoj strani, jednačina postaje

$$\frac{253a + 184b + 88c}{2024} = \frac{1165}{2024} \iff$$
$$253a + 184b + 88c = 1165.$$

Jasno je da je $253a < 1165$, pa je $a < \frac{1165}{253} = 4\frac{153}{253}$, pa je $a \leq 4$. Međutim, za $a = 4$, jednačina se svodi na $184b + 88c = 153$, što je nemoguće jer je $b \geq 1$. Dakle, $a \in \{1, 2, 3\}$. Ispitajmo svaki od ovih slučajeva.

1° $a = 1$

Tada je $184b + 88c = 1165 - 253 \cdot 1 = 912$. Brojevi $184, 88$ i 912 su djeljivi s 8, pa nakon djeljenja s 8 posljednja jednačina postaje

$$23b + 11c = 114.$$

Kako je $23b < 114$, to je $b < \frac{114}{23} = 4\frac{22}{23}$, pa je $b \leq 4$, odnosno $b \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ispitajmo ove slučajeve.

1°° $b = 1 \Rightarrow 11c = 114 - 23 \cdot 1 = 91$, što nema rješenja jer 91 nije djeljivo s 11.

2°° $b = 2 \Rightarrow 11c = 114 - 23 \cdot 2 = 68$, što nema rješenja jer 68 nije djeljivo s 11.

3°° $b = 3 \Rightarrow 11c = 114 - 23 \cdot 3 = 45$, što nema rješenja jer 45 nije djeljivo s 11.

4°° $b = 4 \Rightarrow 11c = 114 - 23 \cdot 4 = 22 \Rightarrow c = \frac{22}{11} = 2.$

2° $a = 2$

Tada je $184b + 88c = 1165 - 253 \cdot 2 = 659$. Ova jednačina nema rješenja jer je lijeva strana parna (brojevi $184b$ i $88c$ su uvijek parni), a desna neparna.

3° $a = 3$

Tada je $184b + 88c = 1165 - 253 \cdot 3 = 406$. Ova jednačina nema rješenja jer je lijeva strana djeljiva s 8 (brojevi $184b$ i $88c$ su uvijek djeljivi s 8), a desna nije.

Zaključujemo, jedino rješenje je $(a, b, c) = (1, 4, 2)$.

Šema bodovanja

- Dobijanje jednakosti $253a + 184b + 88c = 1165$: **1 bod**
    - Ovaj bod se dodjeljuje i ukoliko učenik ispravno svede lijevu stranu na zajednički nazivnik 2024
- Zaključak $a \in \{1, 2, 3, 4\}$: **2 boda**
    - Ovi bodovi se dodjeljuju i ukoliko učenik na analogan način ograniči b ili c umjesto a
    - Ovi bodovi se dodjeljuju i ukoliko učenik ograniči vrijednost nepoznate iz početne jednačine (prije množenja s 2024)
- Dokaz da je slučaj $a = 4$ nemoguć: **1 bod**
- Rješavanje slučaja $a = 1$: **3 boda**
    - Ukoliko učenik ograniči odozgo vrijednost nepoznate b ili c, dobija 2 od 3 boda.
- Rješavanje slučajeva $a = 2$ i $a = 3$: **3 boda**
    - Ukoliko učenik riješi samo jedan od ova dva slučaja, dobija 2 od 3 boda.

Napomena: Ukoliko učenik posmatra slučajeve po b ili c umjesto a, ili ukoliko dobije slabiju granicu za vrijednost a, bodovanje slučajeva se vrši u skladu s brojem riješenih i neriješenih slučajeva, a što sličnije opisanoj šemi.

Zadatak 3. Za prirodan broj kažemo da je *zanimljiv* ako se zapisuje koristeći tačno dvije različite cifre, te ako se obje javljaju isti broj puta. Na primjer, brojevi $2662, 550005$ i 45454554 su zanimljivi, a brojevi $6666, 7112, 112233$ i 88811188 nisu.

a) Dokazati da ne postoji zanimljiv četverocifren broj koji je prost.

b) Naći barem 27 parova cifara od kojih se ne može napisati niti jedan osmocifren zanimljiv broj koji je prost. Obrazložiti zašto se od tih parova ne može napisati niti jedan osmocifren zanimljiv prost broj!
Napomena: U svakom paru cifre moraju biti različite, te se misli na neuređene parove, što znači da poredak nije bitan. Na primjer, par $\{0, 3\}$ smatramo istim kao par $\{3, 0\}$ (tj. računamo ih kao jedan par).

Rješenje

a) Posmatrajmo proizvoljan četverocifren zanimljiv broj x. Označimo sa a i b cifre kojim se on zapisuje, pri čemu je a vodeća cifra. Kako se obje cifre javljaju po dva puta, mogućnosti za x su $\overline{aabb}, \overline{abba}$ i $\overline{abab}$.

Ako je $x = \overline{aabb}$, suma njegovih cifara na neparnim mjestima (to su prva i treća cifra) je $a + b$, a suma cifara na parnim mjestima (to su druga i četvrta cifra) je također $a + b$. Razlika ove dvije sume je 0, što je djeljivo s 11, pa je po pravilu djeljivosti s 11 imamo da je sam broj x djeljiv s 11. (Pravilo djeljivosti s 11: broj je djeljiv s 11 ako i samo ako je razlika sume njegovih cifara na neparnim mjestima i sume njegovih cifara na parnim mjestima djeljiva s 11). Dakle, pošto je x četverocifren broj djeljiv s 11, on nije prost.

Ako je $x = \overline{abba}$, razlika sume njegovih cifara na neparnim mjestima i sume njegovih cifara na parnim mjestima je $(a + b) - (b + a) = 0$, pa je on djeljiv s 11, što znači da nije prost.

Ako je $x = \overline{abab}$, imamo $x = \overline{ab00} + \overline{ab} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = \overline{ab} \cdot 101$. Ovaj broj nije prost jer je djeljiv sa 101 i veći je od 101. Dakle, ne postoji zanimljiv četverocifren broj koji je prost.

Napomena: Alternativno, za slučaj $x = \overline{aabb}$ smo mogli dobiti $x = \overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b)$, što je djeljivo sa 11. Slično, za slučaj $x = \overline{abba}$ smo mogli dobiti $x = \overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$, što je djeljivo sa 11.

b) Ako su obje cifre u paru parne, svaki broj sačinjen od tih cifara završava parnom cifrom, pa je paran, tj. nije prost. Imamo 10 ovakvih parova: $\{0, 2\}, \{0, 4\}, \{0, 6\}, \{0, 8\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}$.
Ako je jedna cifra u paru parna, a druga 5, svaki broj sačinjen od ovih cifara završava ili sa 5 ili sa parnom cifrom, pa je ili paran ili djeljiv s 5, tj. nije prost. Imamo 5 takvih parova: $\{0, 5\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 8\}$.
Ako je osmocifren zanimljiv broj zapisan pomoću cifara a i b, zbir njegovih cifara je $4 \cdot (a + b)$ (obje cifre javljaju po 4 puta). Dakle, ako je $a + b$ djeljivo s 3, i odgovarajući broj je djeljiv s 3. Ovakvih parova ima 15: $\{0, 3\}, \{0, 6\}, \{0, 9\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 8\}, \{2, 4\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{3, 9\}, \{4, 5\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}, \{6, 9\}, \{7, 8\}$. Međutim, parove $\{0, 6\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 8\}$ smo već uračunali, pa ovdje dobijamo 11 novih parova.
Konačno, primijetimo da će broj sačinjen od cifara 0 i 7 uvijek biti djeljiv sa 7 (prilikom postupka dijeljenja uvijek dobijamo količnik 0 ili 1, bez ostatka). Tako dobijamo još jedan par $\{0, 7\}$.
Ukupno smo dobili $10 + 5 + 11 + 1 = 27$ parova s traženom osobinom.

Šema bodovanja

Dio a) vrijedi **4 boda**, i to:

- Dokaz da brojevi oblika $\overline{aabb}$ i $\overline{abba}$ ne mogu biti prosti: **2 boda** (oba oblika po 1 bod)
- Dokaz da broj oblika $\overline{abab}$ ne može biti prost: **2 boda**

Dio b) vrijedi **6 bodova**, i to:

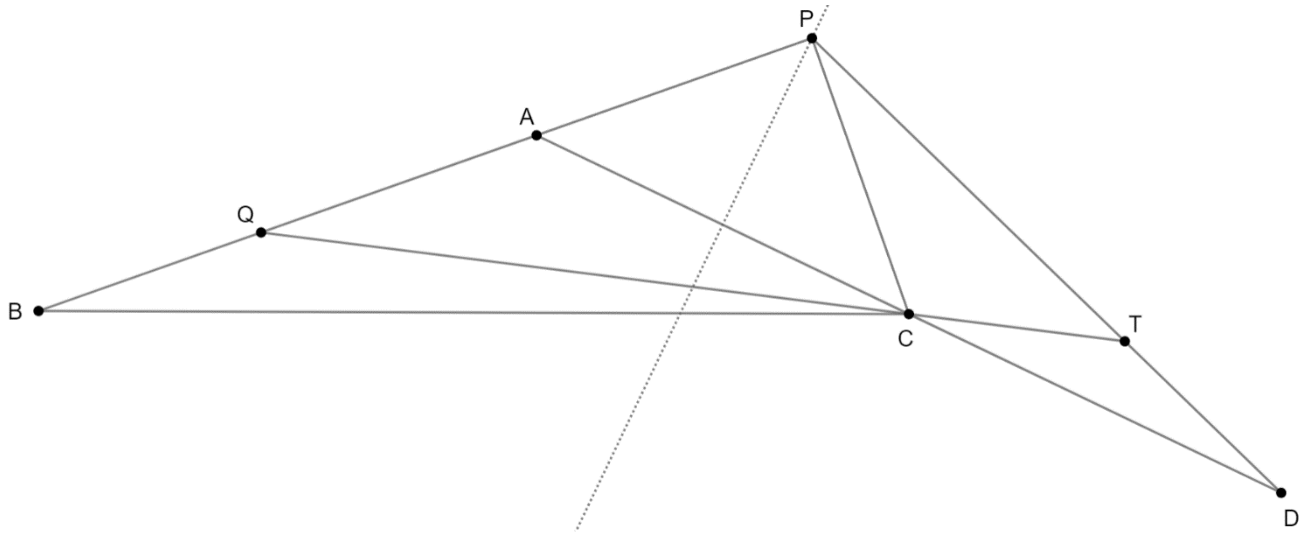
- Zaključak da parovi s obje parne cifre zadovoljavaju uslov, te navođenje tih parova: **1 bod**
- Zaključak da parovi sačinjeni od parne cifre i cifre 5 zadovoljavaju uslov, te navođenje tih parova: **1 bod**

- Zaključak da parovi čija je suma djeljiva s 3 zadovoljavaju uslov, te navođenje tih parova: **2 boda**
- Zaključak da parovi sačinjeni od 0 i cifre različite od 1 zadovoljavaju uslov, te navođenje tih parova: **2 bod**

Napomena: Pod „navođenje tih parova“ se podrazumijeva navođenje onih parova koji nisu ranije navedeni.

Zadatak 4. Dat je tupougli trougao ΔABC sa tupim uglom kod vrha A. Simetrala stranice AC siječe pravu AB u tački P, pri čemu se P nalazi na produžetku stranice AB preko A. Na pravoj AC data je tačka D takva da je C sredina duži AD. Na pravoj AB data je tačka Q takva da je A sredina duži PQ. Ako se prave QC i PD sijeku u tački T, dokazati da je $TC = TD$.

Rješenje



Simetrala duži je po definiciji skup tačaka koje su jednako udaljene od krajeva te duži. Kako tačka P pripada simetrali duži AC, to je jednako udaljena od njenih krajeva, tj. vrijedi $PA = PC$. To znači da je trougao ΔPAC jednakokraki, pa vrijedi $\angle PAC = \angle PCA$. Kako je $\angle QAC = 180° - \angle PAC$ i $\angle PCD = 180° - \angle PCA$, imamo i $\angle QAC = \angle PCD$.
Dalje, kako je A sredina duži PQ, i kako je ΔPAC jednakokraki, imamo $AQ = AP = CP$. Također, kako je C sredina duži AD, imamo $AC = CD$. Dakle, dobili smo $AQ = CP$, $\angle QAC = \angle PCD$ i $AC = CD$, odakle na osnovu stava SUS slijedi $\Delta QAC \cong \Delta PCD$.
Iz posljednje podudarnosti zaključujemo $\angle ACQ = \angle CDP$. Uglovi $\angle ACQ$ i $\angle TCD$ su unakrsni, pa je $\angle ACQ = \angle TCD$. Sada imamo $\angle TCD = \angle ACQ = \angle CDP = \angle CDT$, što znači da je trougao ΔTCD jednakokraki. Odatle slijedi $TC = TD$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja

- Zaključak $PA = PC$: **2 boda**
- Zaključak $\angle QAC = \angle PCD$: **1 bod**
- Zaključak $AQ = CP$: **1 bod**
- Zaključak $\Delta QAC \cong \Delta PCD$: **3 boda**
- Privođenje dokaza kraju: **3 boda**

Zadatak 5. Na takmičenju je učestvovalo 205 učenika, te je maksimalan mogući broj bodova bio 40. Na kraju takmičenja se ispostavilo da je svaki učenik osvojio ili a ili b bodova, gdje su a i b prirodni brojevi takvi da je $1 \leq b < a \leq 40$. Poznato je da postoji bar jedan učenik koji je osvojio a bodova, kao i bar jedan učenik koji je osvojio b bodova. Također, ispostavilo se da je prosječni broj bodova po učeniku prirodan broj.

a) Odrediti sve mogućnosti za broj učenika koji su osvojili a bodova.
b) Odrediti broj mogućih parova (a, b) koji zadovoljavaju date uslove.

Napomena: prosječna vrijednost nekog niza brojeva je suma tih brojeva podijeljena sa brojem tih brojeva. Npr. prosječna vrijednost brojeva $2, 5, 8$ je $\frac{2+5+8}{3} = \frac{15}{3} = 5$, a prosječna vrijednost brojeva $2, 2, 3, 9$ je $\frac{2+2+3+9}{4} = \frac{16}{4} = 4$.

Rješenje

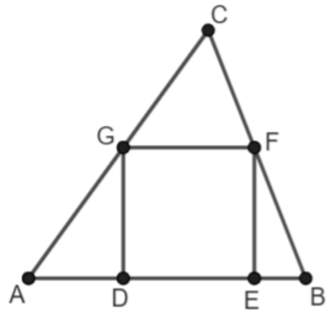
a) Neka je k učenika osvojilo a bodova. Tada je $205 - k$ učenika osvojilo b bodova. Kako postoji barem jedan učenik koji je osvojio a bodova, to je $k \geq 1$. Slično, kako postoji bar jedan učenik koji je osvojio b bodova, to je $k \leq 204$. Dakle, $1 \leq k \leq 204$.
Suma bodova svih učenika je $k \cdot a + (205 - k) \cdot b$, pa je prosječni broj bodova po učeniku jednak
$$\frac{k \cdot a + (205 - k) \cdot b}{205} = \frac{ka + 205b - kb}{205} = \frac{ka - kb}{205} + \frac{205b}{205} = \frac{k(a-b)}{205} + b.$$
Po uslovu zadatka ovaj broj je prirodan, a kako je b prirodan broj, to i $\frac{k(a-b)}{205}$ mora biti prirodan broj. Drugim riječima, broj $k(a - b)$ mora biti djeljiv s 205, odnosno mora biti djeljiv s 5 i s 41. Pošto vrijedi $1 \leq b < a \leq 40$, to je $1 \leq a - b \leq 39$, pa $a - b$ ne može biti djeljivo s 41. Kako je 41 prost broj, slijedi da k mora biti djeljivo s 41, što uz uslov $1 \leq k \leq 204$ implicira $k \in \{41,82,123,164\}$. Svaka od ovih vrijednosti je moguća. Naime, dovoljno je da broj $a - b$ bude djeljiv sa 5 (jer će onda proizvod $k(a - b)$ biti djeljiv sa 205), što je očigledno moguće.

b) Primijetimo da niti jedan od brojeva $41,82,123,164$ nije djeljiv sa 5, a svaki je djeljiv sa 41. To znači da je broj $k(a - b)$ djeljiv sa 205 ako i samo ako je broj $a - b$ djeljiv sa 5. Kako je $1 \leq a - b \leq 39$, to $a - b \in \{5,10,15,20,25,30,35\}$. Primijetimo da parova u kojima je $a - b = 5$ ima 35 (to su ustvari parovi $(6,1), (7,2), (8,3), \dots, (40,35)$), parova u kojima je $a - b = 10$ ima 30 (to su ustvari parovi $(11,1), (12,2), \dots, (40,10)$)... Generalno, primijetimo da parova u kojima je $a - b = s$ ima $40 - s$ (to su $(s + 1,1), (s + 2,2), \dots, (40,40 - s)$). Dakle, ukupan broj parova je
$$40 - 5 + 40 - 10 + 40 - 15 + 40 - 20 + 40 - 25 + 40 - 30 + 40 - 35 = 140.$$

Šema bodovanja

- Dio pod a) nosi 5 bodova, i to:
  - Izražavanje prosječnog broja bodova preko k, a i b: **1 bod**
  - Zaključak $205 \mid k(a - b)$ (ili dobijanje izraza $\frac{k(a-b)}{205} + b$): **1 bod**
  - Zaključak da 41 ne dijeli $a - b$, te da zbog toga mora dijeliti k: **2 boda**
  - Određivanje mogućih vrijednosti k: **1 bod**
- Dio pod b) nosi 5 bodova, i to:
  - Zaključak da $a - b$ mora biti djeljivo s 5 i određivanje skupa mogućih vrijednosti za $a - b$: **2 boda**
  - Određivanje broja parova u svakom od tih slučajeva: **2 boda**
  - Dobijanje tačnog rezultata: **1 bod**

VIII razred - rješenja zadataka i šema bodovanja



Zadatak 1. Dati su trougao ABC i kvadrat $DEFG$, kao na slici. Obimi trouglova ABC, ADG, EBF, GFC su redom jednaki $78, 36, 30$ i 36. Odrediti dužinu svake od duži AD, DE, EB, BF, FC, CG i GA. Odgovor obrazložiti!

Rješenje:

Označimo stranicu kvadrata $DEFG$ sa a. Imamo da je

$36 + 30 + 36 = O_{\Delta GFC} + O_{\Delta EBF} + O_{\Delta ADG} = (GF + FC + CG) + (FB + BE + EF) + (DA + AG + GD) = 2a + (AG + AC) + (BF + FC) + (AD + a + EB) = 2a + AC + BC + AB = 2a + O_{\Delta ABC} = 2a + 78,$

odakle zaključujemo da je $a = 12$. Sada imamo da je $AD + AG = 36 - 12 = 24$, a iz Pitagorine teoreme na trougao ΔADG imamo $AG^2 = AD^2 + 12^2 = AD^2 + 144$, odnosno:

$$AG^2 - AD^2 = (AG - AD)(AG + AD) = 144,$$

Odakle je $AG - AD = 6$. Sada sabiranjem ove relacije sa $AD + AG = 24$ dobijamo da je $AG = 15$, pa je $AD = 9$.

Napomena: Alternativno, mogli smo u relaciju $AG^2 = AD^2 + 144$ uvrstiti $AG = 24 - AD$, pa nakon uvrštavanja imamo $576 - 48 \cdot AD + AD^2 = AD^2 + 144$, pa je $48 \cdot AD = 576 - 144 = 432$, pa je $AD = 9$ i $AG = 24 - 9 = 15$.

Analogno u trouglu ΔEBF imamo $EB + BF = 30 - 12 = 18$ i $BF^2 = EB^2 + 144$, odakle istim postupkom kao gore dobijamo $BF = 13, EB = 5$.

Primijetimo sada da su prave GF i AB paralelne, pa primjenom Talesove teoreme dobijamo $\frac{GC}{GA} = \frac{CF}{FB}$, odnosno $\frac{GC}{CF} = \frac{GA}{FB} = \frac{15}{13}$, odakle je $GC = CF \cdot \frac{15}{13}$. Sada iz $GC + CF = 36 - 12 = 24$ imamo $CF \cdot \frac{15}{13} + CF = 24$,odakle dobijamo da je $CF = \frac{78}{7}, CG = \frac{90}{7}$. Dakle, imamo da je $AD = 9, DE = 12, EB = 5, BF = 13, FC = \frac{78}{7}, CG = \frac{90}{7}, GA = 15$.

Šema bodovanja:

- izračunavanje stranice kvadrata: **2 boda**
- izračunavanje stranica AD, AG, BE, BF: **4 boda** (za samo jedan par stranica (npr. AD i AG) se dobija 3 boda, a od ta 3 boda se dobija 1 bod ako se izračuna $AD + AG$ i primijeni Pitagorina teorema na trougao ADG)
- izračunavanje stranica CF i CG: **4 boda** (2 od ova 4 boda se dobija ako se primijeni Talesova teorema i dobije odnos ovih stranica, ili bilo koji drugi odnos (npr. iz sličnosti trouglova) pomoću kojeg se može izvršiti izračun)

Zadatak 2. Ako za realne brojeve a, b, c vrijedi $abc = 1$ i $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right) = 111$, odrediti vrijednost izraza $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2$.

Rješenje:

Označimo sa $P = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right)$ i $Q = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2$. Primijetimo da je:

$$Q = \left(a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + 2 \cdot b \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}\right) + \left(c^2 + 2 \cdot c \cdot \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2}\right) = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 6.$$

S druge strane imamo:

$$111 = P = \left(ab + \frac{1}{ab} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right) = abc + \frac{1}{abc} + \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} + \frac{c}{ab} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac}.$$

Primijetimo da vrijedi $\frac{ab}{c} = \frac{\left(\frac{1}{c}\right)}{c} = \frac{1}{c^2}, \frac{ac}{b} = \frac{1}{b^2}, \frac{bc}{a} = \frac{1}{a^2}$, kao i $\frac{c}{ab} = \frac{c}{\frac{1}{c}} = c^2, \frac{a}{bc} = a^2, \frac{b}{ac} = b^2$, pa je

$$111 = P = 2 + a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Dakle, vrijedi $Q = P + 4 = 111 + 4 = 115$.

Šema bodovanja:

- dokaz da je $Q = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 6$: **2 boda**
- dokaz da je $P = \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} + \frac{c}{ab} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + 2$: **2 boda**
- dokaz da je $\frac{ab}{c} = \frac{1}{c^2}, \frac{ac}{b} = \frac{1}{b^2}, \frac{bc}{a} = \frac{1}{a^2}$: **2 boda**
- dokaz da je $\frac{c}{ab} = c^2, \frac{a}{bc} = a^2, \frac{b}{ac} = b^2$: **2 boda**
- dokaz da je $Q = P + 4 = 115$: **2 boda**

Zadatak 3. Za prirodan broj kažemo da je *lijep* ako nema nulu u svom dekadnom zapisu, ako su mu sve cifre međusobno različite, i ako za svake dvije susjedne cifre vrijedi da jedna od njih dijeli drugu. Na primjer, brojevi 516 i 4263 su lijepi, dok brojevi 506, 515 i 4236 to nisu.

a) Koliko maksimalno cifara može imati *lijep* broj?
b) Koliko ukupno ima *lijepih* brojeva sa maksimalnim brojem cifara?

Odgovore obrazložiti!

Rješenje:

a) Broj 93628415 je lijep i u sebi sadrži osam cifara.
Pokažimo da ne možemo imati lijep broj sa svih devet cifara 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Pretpostavimo suprotno. Kako ciframa 5 i 7 susjed može biti samo jedna cifra (cifra 1), to cifre 5 i 7 moraju biti krajnje cifre lijepog broja. Dakle, jedna od cifrara 5 i 7 je na početku, a druga na kraju. Međutim, kako cifra 1 mora biti susjed svakoj od njih, ona bi morala biti i na drugom i na osmom mjestu, što je kontradikcija. Dakle, lijep broj ne može imati devet cifara, pa može imati maksimalno osam cifara.

b) Posmatrajmo osmocifrene lijepe brojeve koji u sebi imaju cifru 5 (tada ne sadrže cifru 7). Kao što smo vidjeli, cifra 5 mora biti krajnja cifra i njen susjed mora biti cifra 1, pa je taj broj oblika $\overline{abcdef15}$ ili $\overline{51abcdef}$. Jasno je da imamo isto brojeva u oba slučaja, jer ako lijepom broju obrnemo redoslijed cifara, on je i dalje lijep. Prebrojmo zato koliko imamo lijepih brojeva oblika $\overline{abcdef15}$. Nepoznate cifre su 2, 3, 4, 6, 8, 9. Broj 9 može stajati samo uz cifre 1 i 3, pa broj 9 mora biti ili susjedni cifri 1 ili na početku, te u oba slučaja mora biti susjedan broju 3. Dakle, lijep broj je oblika $\overline{abcd3915}$ ili $\overline{93cdef15}$. Od preostalih brojeva 2, 4, 6 i 8 samo broj 6 može stajati uz 3, pa su lijepi brojevi oblika $\overline{abc63915}$ ili $\overline{936def15}$. Kako od cifara 2,4,6 samo 2 može stajati uz 6, to imamo mogućnosti $\overline{ab263915}$ ili $\overline{9362ef15}$. Preostala dva broja 4 i 8 možemo straviti u bilo kojem poretku jer su djeljivi sa 2 i 1, te broj 4 dijeli broj 8. Dakle, moguće su sljedeće kombinacije: $48263915, 84263915, 93624815$ i 93628415. Dakle, imamo 4 broja oblika $\overline{abcdef15}$, pa imamo i 4 broja oblika $\overline{51abcdef}$, tj. ukupno 8 osmocifrenih lijepih brojeva koji sadrže cifru 5.
Dodatnih 8 lijepih brojeva sa maksimalnim brojem cifara možemo dobiti kada cifru 5 zamijenimo cifrom 7 (jer i cifra 7 mora biti na početku ili kraju, te joj susjed mora biti cifra 1). Dakle, ukupno imamo 16 *lijepih* brojeva sa maksimalnim brojem cifara.

Šema bodovanja

- Dio pod a) vrijedi **4 boda,** i to:
  - Pronalazak bar jednog lijepog osmocifrenog broja: **1 bod**
  - Zaključak da cifre 5 i 7 moraju biti na krajevima, te da im susjed mora biti cifra 1: **1 bod**
  - Dokaz da ne može postojati devetocifren lijep broj: **2 boda**
- Dio pod b) vrijedi **6 bodova,** i to:
  - Zaključak da brojeva koji sadrže 5 ima isto kao i onih koji sadrže 7: **1 bod**
  - Zaključak da je isto brojeva kojima je cifra 5 (7) na početku/na kraju: **1 bod**
  - Zaključak o položaju cifre 9: **1 bod**
  - Zaključak o položaju cifara 3, 6 i 2: **1 bod**
  - Zaključak o položaju cifara 4 i 8 **1 bod**
  - Ispravno prebrojavanje broja mogućnosti: **1 bod**

Zadatak 4. Kada broj 13 podijelimo sa 5,7 i 9, dobijamo redom ostatke 3,6 i 4, te vrijedi $3+6+4=13$. Dakle, zbir ovih ostataka jednak je početnom broju 13.

a) Koliko ima prirodnih brojeva m takvih da kada podijelimo m sa 115 i 2024, zbir dva dobijena ostatka je jednak m? Odgovor obrazložiti!

b) Koliko ima prirodnih brojeva n takvih da kada podijelimo n sa 347, 462 i 805, zbir tri dobijena ostatka je jednak n. Odgovor obrazložiti!

Napomena: Ostatak pri dijeljenju prirodnim brojem može biti jednak 0.

Rješenje:

a) Neka su ostaci broja m pri dijeljenju sa 115 i 2024 jednaki x i y, redom. Dakle, vrijedi $0 \leq x \leq 114$, $0 \leq y \leq 2023$ te $m = x + y$ $(*)$. Neka je $m = 2024k + y$ za neki nenegativni cijeli broj k. Sada iz $(*)$ imamo $2024k + y = x + y$, odakle je $2024k = x$. Kako je $x \leq 114 < 2024$, jedina mogućnost je $k = x = 0$. To nam govori da je m djeljiv sa 115, i da je $m = y < 2024$. Dakle, u obzir dolaze svi prirodni brojevi djeljivi sa 115 koji su manji od 2024. Takvih brojeva ukupno ima $\left\lfloor \frac{2024}{115} \right\rfloor = 17$. Laganom provjerom utvrđujemo da zaista svi brojevi $m = 115k$, za $k \in \{1,2,\dots,17\}$ zadovoljavaju uslove zadatka.

b) Neka su ostaci broja n pri dijeljenju sa 347, 462 i 805 jednaki x, y i z, redom. Dakle, vrijedi $0 \leq x \leq 346, 0 \leq y \leq 461, 0 \leq z \leq 804$, te $n = x + y + z$ $(**)$. Neka je $n = 805k + z$ za neki nenegativni cijeli broj k. Sada iz $(**)$ imamo $805k = x + y$. Kako je $x + y \leq 346 + 461 = 807 < 2 \cdot 805$, jedine dvije mogućnosti su $k = 0$ i $k = 1$. Za $k = 0$ imamo $x = y = 0$, pa je $n = z \leq 804$ i n je djeljiv sa 347 i 462, a takav broj ne postoji (jer je $NZS(347,462) > 804$). Dakle, vrijedi $k = 1$, $x + y = 805$ te $805 \leq n = 805 + z < 2 \cdot 805$ (jer je $z < 805$). Sada, zbog činjenice da je $x \leq 346$ i $y \leq 461$ razlikujemo tri slučaja:

$1°$ $x = 346, y = 459$. Dakle, n pri dijeljenju sa 347 daje ostatak 346, a pri dijeljenju sa 462 ostatak 459. Jedini brojevi između 805 i $2 \cdot 805$ koji daju ostatak 459 pri dijeljenju sa 462 su 921 i 1383, a od njih nijedan ne daje ostatak 346 pri dijeljenju sa 347, pa ovaj slučaj nema rješenja.

$2°$ $x = 345, y = 460$. Dakle, n pri dijeljenju sa 347 daje ostatak 345, a pri dijeljenju sa 462 ostatak 460. Jedini brojevi između 805 i $2 \cdot 805$ koji daju ostatak 460 pri dijeljenju sa 462 su 922 i 1384, a od njih nijedan ne daje ostatak 345 pri dijeljenju sa 347, pa ovaj slučaj nema rješenja.

$3°$ $x = 344, y = 461$. Dakle, n pri dijeljenju sa 347 daje ostatak 344, a pri dijeljenju sa 462 ostatak 461. Jedini brojevi između 805 i $2 \cdot 805$ koji daju ostatak 461 pri dijeljenju sa 462 su 923 i 1385, a od njih jedini koji daje ostatak 344 pri dijeljenju sa 347 jeste broj 1385. Laganom provjerom utvrđujemo da broj $n = 1385$ zaista zadovoljava uslove zadatka.

Dakle, postoji samo jedan prirodan broj n sa traženom osobinom i to $n = 1385$.

Šema bodovanja:

a)

- svođenje na $2024k = x$ i dokaz da mora vrijediti $x = 0$ **1 bod**
- pravilno zaključivanje i prebrojavanje svih mogućnosti za broj m: **1 bod**

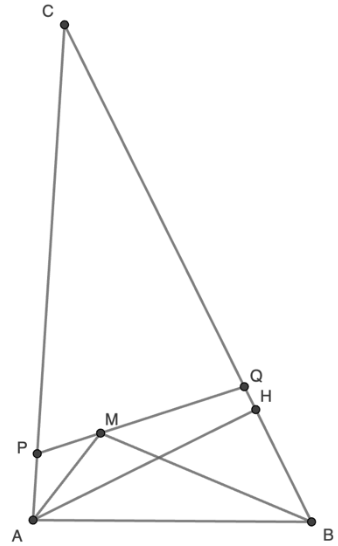
b)

- svođenje na $805k = x + y$: **1 bod**
- zaključak da je $k = 0$ ili $k = 1$: **1 bod**
- odbacivanje slučaja $k = 0$: **1 bod**
- zaključak da su jedina tri moguća slučaja ona navedena u rješenju: **2 boda**
- rješavanje slučajeva: **3 boda** (ako učenik napravi grešku u rješavanju koja se može lagano popraviti oduzima se **1 bod**)

Zadatak 5. U oštrouglom trouglu ABC vrijedi $\angle BCA = 30°$ i $AC < BC$. Tačka M nalazi se u unutrašnjosti trougla ABC tako da vrijedi $\angle AMB = 105°$. Simetrale duži AM i BM sijeku stranice AC i BC u tačkama P i Q, redom.

a) Dokazati da tačke M, P i Q leže na istoj pravoj.
b) Ako je obim trougla CPQ jednak 44, a površina trougla ABC jednaka 120, odrediti dužinu stranice AB.

Rješenje:



a) Dokazat ćemo da je $\angle PMA + \angle QMB = 75°$, iz čega će slijediti da je $\angle PMQ = 180°$, odnosno tačke P, M i Q leže na istoj pravoj. Kako P leži na simetrali duži AM imamo da je $PM = PA$, odnosno $\angle PMA = \angle PAM = \angle CAM$. Slično je i $\angle QMB = \angle QBM = \angle CBM$. Iz trougla ABC imamo $\angle CAB + \angle CBA = 180° - 30°$, odnosno $\angle CAM + \angle MAB + \angle CBM + \angle MBA = 150°$, a kako je $\angle MAB + \angle MBA = 75°$ (iz trougla AMB), zaključujemo da je $\angle CAM + \angle CBM = 75°$, odnosno $\angle PMA + \angle QMB = 75°$, što je i trebalo dokazati.

b) Obim trougla CPQ jednak je $44 = CP + CQ + PQ = CP + CQ + PM + QM = CP + CQ + PA + QB = CA + CB$ (1). Neka je H podnožje visine iz tačke A na stranicu CB. Kako je $\angle ACH = 30°$, to je $\angle CAH = 60°$, pa je trougao CAH polovina jednakostraničnog trouga, odakle je $AH = \frac{CA}{2}$. Sada je površina trougla ABC jednaka $120 = \frac{CB \cdot AH}{2} = \frac{CA \cdot CB}{4}$, pa je $CA \cdot CB = 480$ (2). Iz (1) imamo $CA = 44 - CB$, pa uvrštavajući to u (2) dobijamo:

$$CB^2 - 44 \cdot CB + 480 = 0$$
$$CB^2 - 20CB - 24CB + 480 = 0$$
$$CB(CB - 20) - 24(CB - 20) = 0$$
$$(CB - 20)(CB - 24) = 0.$$

Dakle, vrijedi $CB = 20$ ili $CB = 24$. Slučaj $CB = 20$ odbacujemo, jer bi tad vrijedilo $CA = 24 > CB$, što je kontradikcija sa uslovom zadatka. Dakle, vrijedi $CB = 24$ i $CA = 20$, kao i $AH = \frac{CA}{2} = 10$. Sada iz Pitagorine teoreme u trouglu AHC imamo $HC^2 = AC^2 - AH^2 = 300$, pa je $HC = 10\sqrt{3}$. Odatle imamo $HB = CB - CH = 24 - 10\sqrt{3}$. Konačno, iz Pitagorine teoreme u trouglu AHB imamo $AB^2 = AH^2 + HB^2 = 976 - 480\sqrt{3}$, odnosno $AB = \sqrt{976 - 480\sqrt{3}} = 4\sqrt{61 - 30\sqrt{3}}$.

Napomena: Jednačinu $CB^2 - 44 \cdot CB + 480 = 0$ smo mogli zapisati kao $CB^2 - 2 \cdot CB \cdot 22 + 22^2 - 4 = 0$, tj. $(CB - 22)^2 = 4$, odakle $CB - 22 \in \{-2, +2\}$, tj. $CB \in \{20, 24\}$, te završavamo kao ranije.

Šema bodovanja:

a)

- dokaz da vrijedi $\angle CAM + \angle CBM = 75°$: **1 bod**
- dokaz da je $\angle PMQ = 180°$: **1 bod**

b)

- dokaz da je $CA + CB = 44$: **1 bod**
- dodavanje tačke H i zaključak $AH = \frac{AC}{2}$ **1 bod**
- dokaz da je $CA \cdot CB = 480$: **2 boda**
- izračunavanje CA i CB: **2 boda**
- izračunavanje CH ili HB: **1 bod**
- izračunavanje AB: **1 bod**

IX RAZRED – rješenja zadataka i šema bodovanja

Zadatak 1. Dat je trougao ABC u Descartesovom pravouglom koordinatnom sistemu sa vrhovima $A(5,0)$, $B(11,8)$ i $C(c,4)$, pri čemu je $c > 0$. Neka su B' i C' simetrične slike tačaka B i C, redom, u odnosu na y –osu. Ako su tačke A, B' i C' kolinearne (tj. leže na istoj pravoj), odrediti:

a) koordinate tačke C;
b) površinu četverougla $BCC'B'$;
c) površinu trougla ABC.

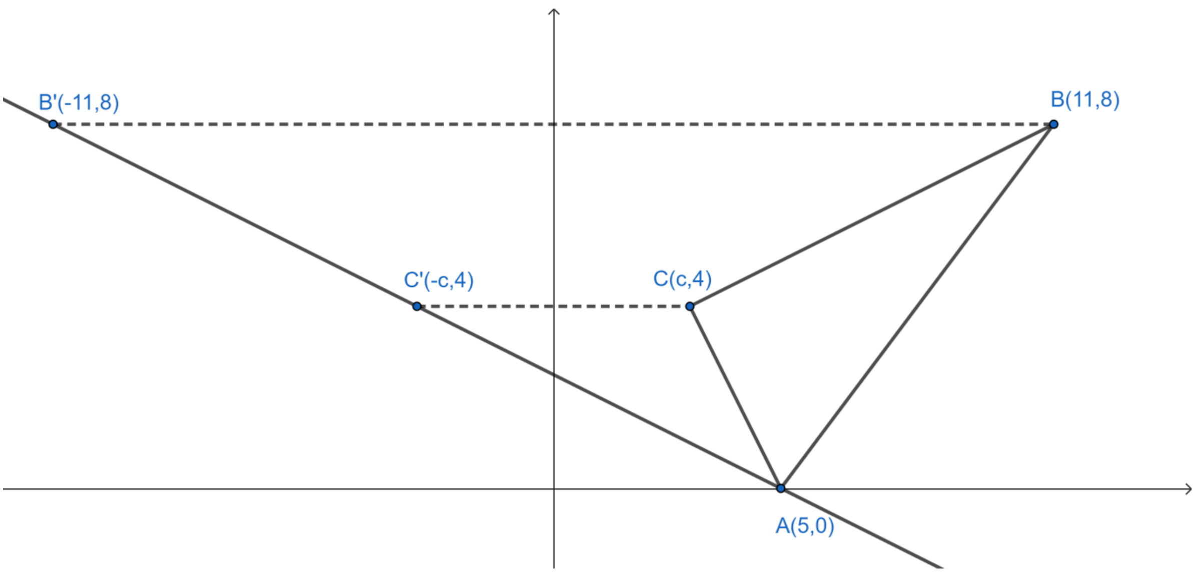
Napomena: Za tačku X' kažemo da je simetrična slika tačke X u odnosu na pravu p ako vrijedi $XX' \perp p$ i $\overline{X'T} \cong \overline{XT}$, gdje je $\{T\} = XX' \cap p$.

Rješenje 1

Kada se tačka preslika simetrično u odnosu na y –osu, slika tačke ima istu y –koordinatu (jer je prava na kojoj leže tačka i njena ismetrična slika okomita na y –osu), a x –koordinata slike je jednaka suprotnoj x –koordinati originalne tačke (jer su udaljenost slike i originala od y ose jednake).

Dakle, koordinate tačaka B' i C' su $B'(-11,8)$ i $C'(-c,4)$.

a) Kako su prema uslovu zadatka tačke A, B' i C' kolinearne, koordinate tačke C', a samim tim i tačke C, ćemo odrediti iz uslova da tačka C' pripada pravoj određenoj tačkama A i B'.



Ako je jednačina prave AB' data sa $y = kx + n$, onda iz činjenice da su tačke $A(5,0)$ i $B'(-11,8)$ na toj pravoj, slijedi da mora biti zadovoljen sljedeći sistem jednačina:

$$0 = 5k + n,$$

$$8 = -11k + n.$$

Rješenje posljednjeg sistema jednačina je $k = -\frac{1}{2}, n = \frac{5}{2}$, pa jednačina prave glasi

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Kako i tačka $C'(-c, 4)$ pripada toj pravoj, to vrijedi

$$4 = \frac{c}{2} + \frac{5}{2},$$

odakle se dobije da je $c = 3$. Koordinate tačake C su $C(3,4)$.

b) Primijetimo da je četveorugao $BCC'B'$ trapez ($BB' \parallel CC'$). Dužine osnovica su $\overline{BB'} = 2 \cdot 11 = 22$ i $\overline{CC'} = 2 \cdot 3 = 6$, a dužina visine je 4 (koliko iznosi udaljenost između paralelnih pravih BB' i CC' čije su jednačine $y = 8$ i $y = 4$, redom). Površina četveorugla $BCC'B'$ je jednaka

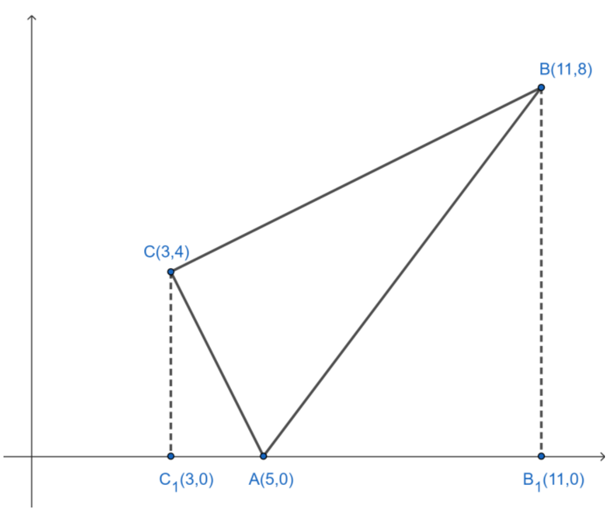
$$P_{BCC'C'} = \frac{22+6}{2} \cdot 4 = 56.$$

c) Površinu trougla ABC možemo dobiti tako što od površine trougla ABB' oduzmemo zbir površina trapeza $BCC'B'$ i trougla ACC'.
U trouglu ABB' je $\overline{BB'} = 22$, a visina na tu stranicu je jednaka vrijednosti y −koordinate tačaka B i B', tj. iznosi 8.
Slično, u trouglu ACC' je $\overline{CC'} = 6$, a visina na tu stranicu je jednaka vrijednosti y −koordinate tačaka C i C', tj. iznosi 4.
Sada imamo

$$P_{ABC} = \frac{22 \cdot 8}{2} - \left(56 + \frac{6 \cdot 4}{2}\right) = 20.$$

Rješenje 2 za dio pod c)

Spustimo normale iz tačaka B i C na x −osu, i podnožja tih normala označimo sa B_1 i C_1. Njihove koordinate su $B_1(11,0)$ i $C_1(3,0)$. Primijetimo da je četveorugao BB_1C_1C pravougli trapez (čije su osnovice $\overline{BB_1} = 8$ i $\overline{CC_1} = 4$ i $\angle BB_1C_1 = \angle B_1C_1C = 90^\circ$ i visina $\overline{B_1C_1} = 11 - 3 = 8$), te da su trouglovi AB_1B i ACC_1 pravougli (sa katetama $\overline{AB_1} = 11 - 5 = 6$, $\overline{BB_1} = 8$ i $\overline{AC_1} = 5 - 3 = 2$, $\overline{CC_1} = 4$, redom). Tada površinu trougla ABC možemo dobiti tako što od površine trapeza BB_1C_1C oduzmemo zbir površina trouglova AB_1B i ACC_1. Imamo



$$P_{ABC} = \frac{8+4}{2} \cdot 8 - \left(\frac{6 \cdot 8}{2} + \frac{2 \cdot 4}{2}\right) = 20.$$

Rješenje 3 za dio pod c)

Izračunajmo dužine stranica trougla ABC. Kako su koordinate vrhova $A(5,0)$, $B(11,8)$ i $C(4,3)$, to na osnovu formule za dužinu duži u koordinatnoj ravni imamo

$$\overline{AB} = \sqrt{(11-5)^2 + (8-0)^2} = 10,$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-5)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20},$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3-11)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{80}.$$

Primijetimo da je

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$

pa je trougao ABC pravougli sa katetama $\overline{AC} = \sqrt{20}$ i $\overline{BC} = \sqrt{80}$. Njegova površina je jednaka

$$P_{ABC} = \frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{80}}{2} = \frac{\sqrt{1600}}{2} = \frac{40}{2} = 20.$$

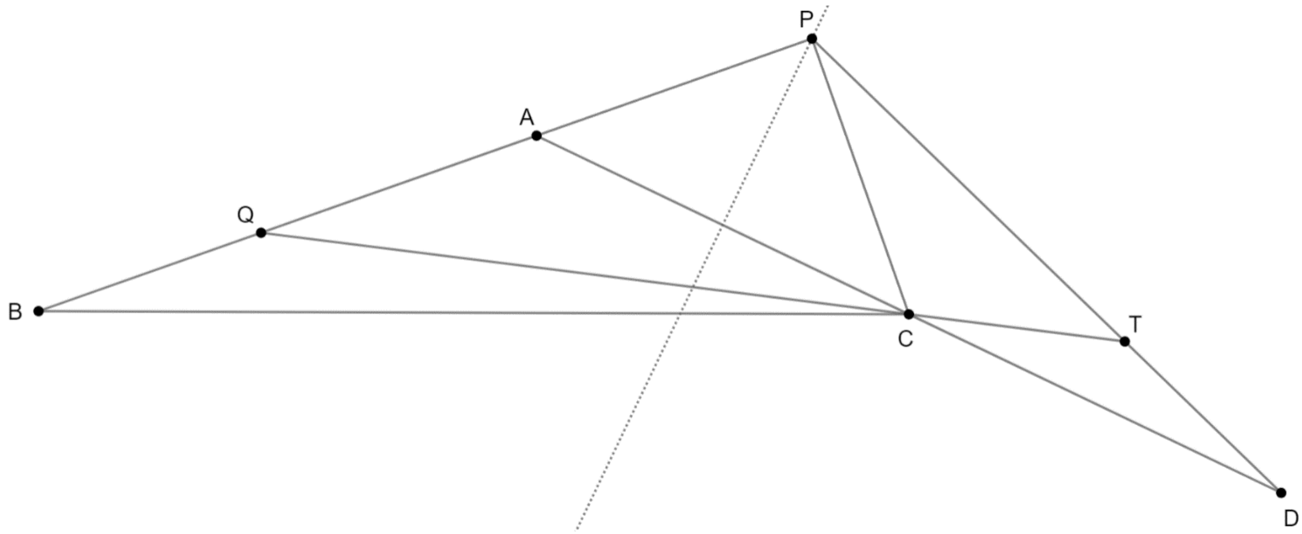
Komentar: Mogli smo i drugačije zaključiti da su prave AC i BC okomite. Naime, poznato je da su prave $y = k_1 x + n_1$ i $y = k_2 x + n_2$ okomite ako vrijedi $k_1 \cdot k_2 = -1$. Lako se dobija da je jednačina prave AC jednaka $y = -2x + 10$, a jednačina prave BC jednaka $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, pa su te dvije prave okomite.

Šema bodovanja

- dio zadatka pod a) vrijedi **4 boda**, i to:
  - Zaključak da su koordinate tačaka $B'(-11,8)$ i $C'(-c,4)$: **1 bod**
  - Dobijanje jednačine prave na kojoj leže tačke A, B' i C': **2 boda**
  - Dobijanje $c = 3$ (iz uslova da C' leži na gornjoj pravoj): **1 bod**
- dio zadatka pod b) vrijedi **2 boda**, i to:
  - Zaključak da je četverougao $BCC'B'$ trapez: **1 bod**
  - Izračun površine trapeza $BCC'B'$: **1 bod**
- dio zadatka pod c) vrijedi **4 boda**, i to:
  - Zaključak da se površina trougla ABC može dobiti oduzimanjem površina ravnih figura (trouglova i trapeza), kao što je prikazano u rješenjima 1 i 2: **2 boda**
  - Izračun površine trougla ABC: **2 boda**
  - Ukoliko učenik radi kao u rješenju 3, onda dokaz da je trougao ABC pravougli vrijedi **2 boda**, a izračun površine pomoću dužina kateta vrijedi **2 boda**

Zadatak 2. Dat je tupougli trougao ABC sa tupim uglom kod vrha A. Simetrala stranice $\overline{AC}$ siječe pravu AB u tački P, pri čemu se P nalazi na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko A. Na pravoj AC data je tačka D takva da je C sredina duži $\overline{AD}$. Na pravoj AB data je tačka Q takva da je A sredina duži $\overline{PQ}$. Ako se prave QC i PD sijeku u tački T, dokazati da je $\overline{TC} = \overline{TD}$.

Rješenje



Kako je svaka tačka simetrale duži jednako udaljena od krajeva te duži, a tačka P pripada simetrali duži AC, to je $\overline{PA} = \overline{PC}$. To znači da je trougao PAC jednakokraki, pa vrijedi $\angle PAC = \angle PCA$. Kako je $\angle QAC = 180° - \angle PAC$ i $\angle PCD = 180° - \angle PCA$, imamo i $\angle QAC = \angle PCD$.

Dalje, kako je A sredina duži $\overline{PQ}$, i kako je trougao PAC jednakokraki, imamo $\overline{AQ} = \overline{AP} = \overline{CP}$. Također, kako je C sredina duži $\overline{AD}$, imamo $\overline{AC} = \overline{CD}$. Dakle, dobili smo $\overline{AQ} = \overline{CP}$, $\angle QAC = \angle PCD$ i $\overline{AC} = \overline{CD}$, odakle na osnovu stava SUS o podudarnosti trouglova slijedi $\Delta QAC \cong \Delta PCD$.

Iz posljednje podudarnosti zaključujemo $\angle ACQ = \angle CDP$. Uglovi $\angle ACQ$ i $\angle TCD$ su unakrsni, pa je $\angle ACQ = \angle TCD$. Sada imamo $\angle TCD = \angle ACQ = \angle CDP = \angle CDT$, što znači da je trougao TCD jednakokraki. Odatle slijedi $\overline{TC} = \overline{TD}$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja

- Zaključak $\overline{PA} = \overline{PC}$: **2 boda**
- Zaključak $\angle QAC = \angle PCD$: **1 boda**
- Zaključak $\overline{AQ} = \overline{CP}$: **1 bod**
- Zaključak $\Delta QAC \cong \Delta PCD$: **3 boda**
- Privođenje dokaza kraju: **3 boda**

Zadatak 3. Za prirodan broj kažemo da je *lijep* ako nema nulu u svom dekadnom zapisu, ako su mu sve cifre međusobno različite, i ako za svake dvije susjedne cifre vrijedi da jedna od njih dijeli drugu. Na primjer, brojevi 516 i 4263 su lijepi, dok brojevi 506, 515 i 4236 to nisu.

a) Koliko maksimalno cifara može imati *lijep* broj?
b) Koliko ukupno ima *lijepih* brojeva sa maksimalnim brojem cifara?

Odgovore obrazložiti!

Rješenje:

a) Broj 93628415 je lijep i u sebi sadrži osam cifara.
Pokažimo da ne možemo imati lijep broj sa svih devet cifara 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Pretpostavimo suprotno. Kako ciframa 5 i 7 susjed može biti samo jedna cifra (cifra 1), to cifre 5 i 7 moraju biti krajnje cifre lijepog broja. Dakle, jedna od cifrara 5 i 7 je na početku, a druga na kraju. Međutim, kako cifra 1 mora biti susjed svakoj od njih, ona bi morala biti i na drugom i na osmom mjestu, što je kontradikcija. Dakle, lijep broj ne može imati devet cifara, pa može imati maksimalno osam cifara.

b) Posmatrajmo osmocifrene lijepe brojeve koji u sebi imaju cifru 5 (tada ne sadrže cifru 7). Kao što smo vidjeli, cifra 5 mora biti krajnja cifra i njen susjed mora biti cifra 1, pa je taj broj oblika $\overline{abcdef15}$ ili $\overline{51abcdef}$. Jasno je da imamo isto brojeva u oba slučaja, jer ako lijepom broju obrnemo redoslijed cifara, on je i dalje lijep. Prebrojmo zato koliko imamo lijepih brojeva oblika $\overline{abcdef15}$. Nepoznate cifre su 2, 3, 4, 6, 8, 9. Broj 9 može stajati samo uz cifre 1 i 3, pa broj 9 mora biti ili susjedni cifri 1 ili na početku, te u oba slučaja mora biti susjedan broju 3. Dakle, lijep broj je oblika $\overline{abcd3915}$ ili $\overline{93cdef15}$. Od preostalih brojeva 2, 4, 6 i 8 samo broj 6 može stajati uz 3, pa su lijepi brojevi oblika $\overline{abc63915}$ ili $\overline{936def15}$. Kako od cifara 2,4,6 samo 2 može stajati uz 6, to imamo mogućnosti $\overline{ab263915}$ ili $\overline{9362ef15}$. Preostala dva broja 4 i 8 možemo straviti u bilo kojem poretku jer su djeljivi sa 2 i 1, te broj 4 dijeli broj 8. Dakle, moguće su sljedeće kombinacije: $48263915, 84263915$, 93624815 i 93628415. Dakle, imamo 4 broja oblika $\overline{abcdef15}$, pa imamo i 4 broja oblika $\overline{51abcdef}$, tj. ukupno 8 osmocifrenih lijepih brojeva koji sadrže cifru 5.
Dodatnih 8 lijepih brojeva sa maksimalnim brojem cifara možemo dobiti kada cifru 5 zamijenimo cifrom 7 (jer i cifra 7 mora biti na početku ili kraju, te joj susjed mora biti cifra 1). Dakle, ukupno imamo 16 *lijepih* brojeva sa maksimalnim brojem cifara.

Šema bodovanja

- Dio pod a) vrijedi **4 boda,** i to:
  - Pronalazak bar jednog lijepog osmocifrenog broja: **1 bod**
  - Zaključak da cifre 5 i 7 moraju biti na krajevima, te da im susjed mora biti cifra 1: **1 bod**
  - Dokaz da ne može postojati devetocifren lijep broj: **2 boda**
- Dio pod b) vrijedi **6 bodova,** i to:
  - Zaključak da brojeva koji sadrže 5 ima isto kao i onih koji sadrže 7: **1 bod**
  - Zaključak da je isto brojeva kojima je cifra 5 (7) na početku/na kraju: **1 bod**
  - Zaključak o položaju cifre 9: **1 bod**
  - Zaključak o položaju cifara 3, 6 i 2: **1 bod**
  - Zaključak o položaju cifara 4 i 8 **1 bod**
  - Ispravno prebrojavanje broja mogućnosti: **1 bod**

Zadatak 4. Kada broj 13 podijelimo sa $5{,}7$ i 9, dobijamo redom ostatke $3{,}6$ i 4, te vrijedi $3+6+4=13$. Dakle, zbir ovih ostataka jednak je početnom broju 13.

a) Koliko ima prirodnih brojeva m takvih da kada podijelimo m sa 115 i 2024, zbir dva dobijena ostatka je jednak m? Odgovor obrazložiti!

b) Koliko ima prirodnih brojeva n takvih da kada podijelimo n sa $347, 462$ i 805, zbir tri dobijena ostatka je jednak n. Odgovor obrazložiti!

Napomena: Ostatak pri dijeljenju prirodnim brojem može biti jednak 0.

Rješenje:

a) Neka su ostaci broja m pri dijeljenju sa 115 i 2024 jednaki x i y, redom. Dakle, vrijedi $0 \le x \le 114$, $0 \le y \le 2023$ te $m = x + y$ $(*)$. Neka je $m = 2024k + y$ za neki nenegativni cijeli broj k. Sada iz $(*)$ imamo $2024k + y = x + y$, odakle je $2024k = x$. Kako je $x \le 114 < 2024$, jedina mogućnost je $k = x = 0$. To nam govori da je m djeljiv sa 115, i da je $m = y < 2024$. Dakle, u obzir dolaze svi prirodni brojevi djeljivi sa 115 koji su manji od 2024. Takvih brojeva ukupno ima $\left\lfloor \frac{2024}{115} \right\rfloor = 17$. Laganom provjerom utvrđujemo da zaista svi brojevi $m = 115k$, za $k \in \{1,2,\dots,17\}$ zadovoljavaju uslove zadatka.

b) Neka su ostaci broja n pri dijeljenju sa $347, 462$ i 805 jednaki x, y i z, redom. Dakle, vrijedi $0 \le x \le 346, 0 \le y \le 461, 0 \le z \le 804$, te $n = x + y + z$ $(**)$. Neka je $n = 805k + z$ za neki nenegativni cijeli broj k. Sada iz $(**)$ imamo $805k = x + y$. Kako je $x + y \le 346 + 461 = 807 < 2 \cdot 805$, jedine dvije mogućnosti su $k = 0$ i $k = 1$. Za $k = 0$ imamo $x = y = 0$, pa je $n = z \le 804$ i n je djeljiv sa 347 i 462, a takav broj ne postoji (jer je $NZS(347{,}462) > 804$). Dakle, vrijedi $k = 1, x + y = 805$ te $805 \le n = 805 + z < 2 \cdot 805$ (jer je $z < 805$). Sada, zbog činjenice da je $x \le 346$ i $y \le 461$ razlikujemo tri slučaja:

1° $x = 346, y = 459$. Dakle, n pri dijeljenju sa 347 daje ostatak 346, a pri dijeljenju sa 462 ostatak 459. Jedini brojevi između 805 i $2 \cdot 805$ koji daju ostatak 459 pri dijeljenju sa 462 su 921 i 1383, a od njih nijedan ne daje ostatak 346 pri dijeljenju sa 347, pa ovaj slučaj nema rješenja.

2° $x = 345, y = 460$. Dakle, n pri dijeljenju sa 347 daje ostatak 345, a pri dijeljenju sa 462 ostatak 460. Jedini brojevi između 805 i $2 \cdot 805$ koji daju ostatak 460 pri dijeljenju sa 462 su 922 i 1384, a od njih nijedan ne daje ostatak 345 pri dijeljenju sa 347, pa ovaj slučaj nema rješenja.

3° $x = 344, y = 461$. Dakle, n pri dijeljenju sa 347 daje ostatak 344, a pri dijeljenju sa 462 ostatak 461. Jedini brojevi između 805 i $2 \cdot 805$ koji daju ostatak 461 pri dijeljenju sa 462 su 923 i 1385, a od njih jedini koji daje ostatak 344 pri dijeljenju sa 347 jeste broj 1385. Laganom provjerom utvrđujemo da broj $n = 1385$ zaista zadovoljava uslove zadatka.

Dakle, postoji samo jedan prirodan broj n sa traženom osobinom i to $n = 1385$.

Šema bodovanja:

a)
- svođenje na $2024k = x$ i dokaz da mora vrijediti $x = 0$ **1 bod**
- pravilno zaključivanje i prebrojavanje svih mogućnosti za broj m: **1 bod**

b)
- svođenje na $805k = x + y$: **1 bod**
- zaključak da je $k = 0$ ili $k = 1$: **1 bod**
- odbacivanje slučaja $k = 0$: **1 bod**
- zaključak da su jedina tri moguća slučaja ona navedena u rješenju: **2 boda**
- rješavanje slučajeva: **3 boda** (ako učenik napravi grešku u rješavanju koja se može lagano popraviti oduzima se **1 bod**)

Zadatak 5. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi.

a) Da li iz tvrdnje $c(a^3+b^3)=a(b^3+c^3)=b(c^3+a^3)$ slijedi tvrdnja $a=b=c$?

b) Da li iz tvrdnje $a(a^3+b^3)=b(b^3+c^3)=c(c^3+a^3)$ slijedi tvrdnja $a=b=c$?

Rješenje

a) Ne slijedi. Naime, brojevi $a=b=2, c=\sqrt{5}-1$ su pozitivni, $2\neq\sqrt{5}-1$, a vrijedi data jednakost. Zaista, kako je $c^3=\left(\sqrt{5}-1\right)^3=5\sqrt{5}-3\cdot 5+3\sqrt{5}-1=-16+8\sqrt{5}$, imamo

$$c(a^3+b^3)=\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot(8+8)=16\sqrt{5}-16,$$
$$a(b^3+c^3)=b(c^3+a^3)=2\cdot\left(8-16+8\sqrt{5}\right)=16\sqrt{5}-16.$$

Komentar 1: Sada ćemo objasniti kako se može doći do gornjeg primjera. Dokažimo najprije da dva od brojeva a, b, c moraju biti jednaki. Pretpostavimo suprotno, neka je $a\neq b\neq c\neq a$. Tada jednakost $c(a^3+b^3)=a(b^3+c^3)$ možemo zapisati u obliku $ac(a+c)(a-c)=b^3(a-c)$, odakle se dijeljenjem sa $a-c\neq 0$ dobija $ac(a+c)=b^3$. Analogno dobijamo $bc(b+c)=a^3$.

Oduzimanjem posljednje dvije jednakosti dobijamo

$$(a-b)(ac+bc+c^2)=(b-a)(a^2+ab+b^2) \qquad /:(a-b)\neq 0$$

$$ac+bc+c^2=-a^2-ab-b^2.$$

Posljednja jednakost je očigledno nemoguća (lijeva strana je pozitivna, a desna negativna). Dakle, dva od brojeva a, b, c moraju biti jednaki. Neka je bez umanjenja opštosti $a=b\neq c$. Kao i ranije dobijamo $bc(b+c)=a^3$, što se zbog $a=b$ svodi na $c(b+c)=b^2$. Za $b=2$ dobijamo $c^2+2c=4$, što možemo zapisati kao $(c+1)^2=5$, odakle zbog $c>0$ imamo $c=\sqrt{5}-1$.

Komentar 2: Umjesto $b=2$ mogli smo uzeti bilo koju pozitivnu vrijednost. Naime, data jednakost je homogena (svi članovi su 4. stepena), što znači da ako trojka (a, b, c) zadovoljava datu jednakost, onda i trojka (ka, kb, kc) zadovoljava datu jednakost. Dakle, sve trojke koje zadovoljavaju datu jednakost su $(a,b,c)=\left\{\left(2k, 2k, k\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right): k\in\mathbb{R}\right\}$ i njihove permutacije. Do istog zaključka smo mogli doći rješavajući jednačinu na sljedeći način:

$$c(b+c)=b^2 \qquad /\cdot 4$$

$$4c^2+4bc=4b^2 \qquad /+1$$

$$(2c+b)^2=5b^2,$$

odakle zbog $2c+b>0$ vrijedi $2c+b=b\sqrt{5}$, tj. $2c=b\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)$.

b) Slijedi. Neka je bez umanjenja opštosti $a=\max\{a,b,c\}$, tj. $a\geq b$ i $a\geq c$. Tada vrijedi

$$a(a^3+b^3)\geq b(a^3+b^3)\geq b(c^3+b^3)=a(a^3+b^3),$$

tj. jednakost mora vrijediti svuda, pa iz $a^3+b^3>0$ slijedi $a=b$, a iz $b>0$ slijedi $c=a(=b)$.

Šema bodovanja

- dio zadatka pod a) vrijedi **5 bodova**, i to:
  - pronalazak brojeva koji zadovoljavaju date uslove (uz dokaz da zaista zadovoljavaju): **5 bodova**
  - mogući su parcijalni bodovi, i to: **3 boda** ako se dokaže da dva broja moraju biti jednaka i da ako treći broj nije jednak njima se jednakost svodi na $c(b+c)=b^2$ (ako učenik samo dobije da dva broja moraju biti jednaka, bez svođenja na prethodnu jednakost u slučaju da im treći broj nije jednak, dobija **2 boda**). Također, **1 bod** se može dobiti ako učenik pokuša tražiti rješenja u kojem su tačno dva broja jednaka (bez dokaza da moraju biti), te u tom slučaju svede jednakost na $c(b+c)=b^2$)
- dio zadatka pod b) vrijedi **5 bodova**, i to:
  - pretpostavka da je $a \geq b$ i $a \geq c$: **1 bod**
  - dolazak do nejednakosti $a(a^3+b^3) \geq b(a^3+b^3) \geq b(c^3+b^3)$: **2 boda**
  - zaključak da se mora dostići jednakost i određivanje slučajeva u kojima se dostiže: **2 boda**

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo

Rezultati učenika VI razreda

Plasman	Ime i prezime	Škola	Kanton	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Ukupno
1	Faris Varnica	JU OŠ "Kovačići"Sarajevo	KS	10	4	9	10	1	34
2	Luka Tanasković	JU OŠ "Safvet - beg Bašagić" Sarajevo	KS	7	10	9	6	0	32
2	Emin Džafić	JU OŠ "Kulin ban" Visoko	ZDK	10	9	9	4	0	32
4	Amna Brkanić	JU OŠ "Nafija Sarajlić"Sarajevo	KS	9	9	9	3	1	31
4	Emin Junuzi	JU OŠ "Edhem Mulabdić" Zenica	ZDK	10	9	7	3	2	31
6	Sarah Spahić	JU OŠ "Novi Grad" Tuzla	TK	9	10	9	0	1	29
6	Dalal Smajlović	JU OŠ "Silvije Strahimir Kranjčević" Sarajevo	KS	9	8	9	3	0	29
8	Mustafa Hodžić	JU OŠ "Meša Selimović" Zenica	ZDK	10	9	9	0	0	28
9	Amar Gekić	JU OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	KS	10	7	9	0	0	26
9	Mahir Hodžić	JU OŠ "Rapatnica" Rapatnica	TK	9	7	8	2	0	26
9	Zerin Đozo	JU OŠ" Druga osnovna škola"Ilidža	KS	10	8	7	1	0	26
9	Asja Krnić	JU OŠ ,,Isak Samokovlija'' Sarajevo	KS	10	9	7	0	0	26
13	Kemo Taljanović	JU OŠ "Meša Selimović" Sarajevo	KS	10	9	0	3	1	23
14	Mak Šimleša	JU OŠ "Sveti Franjo" Tuzla	TK	9	3	9	0	1	22
15	Leila Randall	JU OŠ" Hasan Kikić" Gračanica	TK	10	3	7	1	0	21
16	Medina Džafo	JU OŠ "Fatima Gunić"	KS	9	0	10	1	0	20
16	Nađa Srkalović	JU OŠ "Huso Hodžić" Tešanj	ZDK	9	3	8	0	0	20
16	Faris Fadžan	JU OŠ "Grbavica I"Sarajevo	KS	10	10	0	0	0	20
16	Lado Karač	KŠC "Sv. Pavao" Zenica	ZDK	6	6	8	0	0	20
20	Ajla Talović	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo	KS	10	8	0	0	0	18
21	Mehmed Ćeleš	JU OŠ "Meša Selimović" Sarajevo	KS	8	6	0	2	1	17
22	Aida Talović	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo	KS	9	7	0	0	0	16
22	Dalila Karić	JU OŠ "Harmani I" Bihać	USK	6	9	0	0	1	16
24	Lamija Smajilović	JU "Muhzin Rizvić" Fojnica	SBK	7	6	0	0	2	15
25	Una Hamedović	JU OŠ "Vladimir Nazor" Zenica	ZDK	10	4	0	0	0	14
26	Vanja Arsenovski	JU OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	KS	10	3	0	0	0	13
27	Azra Hadžić	JU OŠ "Alija Nametak"Sarajevo	KS	9	0	0	3	0	12
27	Naida Šakić	JU OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić" Gradačac	TK	9	0	0	3	0	12
29	Edib Devlic	JU OŠ "Kulin ban" Visoko	ZDK	4	6	0	0	0	10
30	Ajdin Mujačić	JU OŠ "Orahovica" Gračanica	TK	9	0	0	0	0	9
30	Harun Demir	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	KS	5	4	0	0	0	9
32	Una Šumar	JU OŠ "Harmani II" Bihać	USK	3	4	0	0	0	7
33	Edin Višnjić	JU OŠ"Skender Kulenović" Sarajevo	KS	5	0	1	0	0	6
34	Bilal Jašarević	JU OŠ "Husein ef. Đozo" Goražde	BPK	5	0	0	0	0	5
34	Ahmed Haskić	OŠ "Vitez" Vitez	SBK	4	1	0	0	0	5
36	Anida Dervišić	Osnovna škola "Travnik"	SBK	4	0	0	0	0	4
37	Edin Pivić	JU OŠ "Prača" Goražde	BPK	3	0	0	0	0	3

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo

Rezultati učenika VII razreda

Plasman	Ime i prezime	Škola	Kanton	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Ukupno
1	Iman Boškailo	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	KS	8	6	9	10	0	33
2	Lamija Isović	JU OŠ "Isak Samokovlija" Sarajevo	KS	7	2	10	10	0	29
2	Adem Bišćević	JU OŠ "Mehmed-beg Kapetanović Ljubušak" Sarajevo	KS	10	10	8	0	1	29
4	Ismail Hadžović	JU OŠ "Ćamil Sijarić" Sarajevo	KS	9	5	3	10	1	28
5	Amina Agović	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	KS	10	8	8	0	0	26
6	Hamdi Mehmedovski	JU OŠ "Mirsad Prnjavorac" Vogošća	KS	8	10	5	0	0	23
7	Hamza Drkić	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	KS	5	10	6	1	0	22
8	Bakir Suljić	JU OŠ "Meša Selimović" Zenica	ZDK	10	1	0	10	0	21
8	Abdullah Harčević	JU OŠ "Jezerski" Bosanska Krupa	USK	10	9	2	0	0	21
10	Asja Husejinović	JU OŠ " Treća osnovna škola" Ilidža	KS	10	10	0	0	0	20
11	Samra Kulenović	JU OŠ "6.mart" Hadžići	KS	10	1	8	0	0	19
12	Emin Čišija	JU OŠ "Kulin ban" Visoko	ZDK	6	5	6	0	0	17
13	Faris Bašagić	JU OŠ "Osman Nuri Hadžić" Sarajevo	KS	10	3	3	0	0	16
13	Alma Fajić	JU OŠ "Poljice" Tuzla	TK	10	2	4	0	0	16
15	Sergej Smital	JU OŠ "Čengić Vila 1" Sarajevo	KS	7	1	7	0	0	15
15	Vedad Mujkanović	JU OŠ" Hamdija Kreševljaković Kamberi " Gradačac	TK	10	1	4	0	0	15
17	Naida Semić	JU OŠ "Zahid Baručija" Vogošća	KS	3	10	1	0	0	14
18	Mesud Mešić	JU OŠ " Dr. Safvet-beg Bašagić" Gradačac	TK	10	1	0	2	0	13
18	Faris Dervišević	JU OŠ " Harmani II" Bihać	USK	10	2	0	0	1	13
20	Madžid Smajić	JU OŠ "Džemal Bijedić" Tešanj	ZDK	10	1	1	0	0	12
20	Emina Durmo	JU OŠ "Četvrta osnovna škola" Ilidža	KS	9	1	2	0	0	12
22	Amna Hamzić	JU OŠ "Husein ef. Đozo" Goražde	BPK	6	1	4	0	0	11
22	Adijan Ćoralić	PU "Richmond Park Primary School" Sarajevo	KS	10	1	0	0	0	11
24	Vedad Lendo	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo	KS	4	1	0	3	0	8
24	Sajra Karagić	"Treća osnovna škola" Bugojno	SBK	8	0	0	0	0	8
24	Omar Tule	JU OŠ "Gnojnice" Mostar	HNK	8	0	0	0	0	8
27	Emina Mešinović	JU OŠ "Mehmedalija Mak Dizdar" Visoko	ZDK	6	1	0	0	0	7
28	Faris Karahasanović	JU OŠ "Prva osnovna škola Zavidovići" Zavidovići	ZDK	3	0	3	0	0	6
29	Mahir Sulejmanović	JU OŠ " Druga osnovna škola Živinice" Živinice	TK	2	1	2	0	0	5
30	Lamija Hodžić	JU OŠ "Čelebići" Konjic	HNK	2	0	0	0	0	2
31	Nevresa Bajagić	JU OŠ" Bašigovci" Živinice	TK	0	1	0	0	0	1
31	Adna Duranović	JU OŠ "Bužim" Bužim	USK	0	1	0	0	0	1
31	Asmir Šišić	Osnovna škola Kaćuni	SBK	0	1	0	0	0	1
31	Amna Kunovac	JU OŠ "Ustikolina" Goražde	BPK	0	1	0	0	0	1
31	Kanita Muharemović	"Treća osnovna škola" Bugojno	SBK	1	0	0	0	0	1
36	Merima Kovač	JU OŠ "Hasan Turčalo Brzi" Goražde	BPK	0	0	0	0	0	0
36	Edna Kovačević	JU OŠ "Mustafa Ejubović-Šejh Jujo" Mostar	HNK	0	0	0	0	0	0
36	Benjamin Bećirović	JU OŠ "Tušanj" Tuzla	TK	0	0	0	0	0	0

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo

Rezultati učenika VIII razreda

Plasman	Ime i prezime	Škola	Kanton	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Ukupno
1	Tarik Odžak	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo	KS	10	10	10	10	2	42
2	Dino Ahić	JU OŠ "Safvet-beg Bašagić" Visoko	ZDK	9	10	5	3	8	35
3	Ahmed Fišek	JU OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Visoko	ZDK	10	10	10	1	0	31
4	Faris Šabeta	JU OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	KS	2	10	10	3	2	27
5	Amir Karamovic	JU OŠ "Musa Ćazim Ćatic" Sarajevo	KS	10	10	6	0	0	26
6	Ana Sarić	JU OŠ "Malta" Sarajevo	KS	10	8	5	0	0	23
6	Daris Turčinović	JU OŠ "Skender Kulenović" Zenica	ZDK	6	10	7	0	0	23
6	Fatih Čebirić	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo	KS	10	2	8	3	0	23
6	Merjem Đonko	JU OŠ "Mehmedalija Mak Dizdar" Sarajevo	KS	9	4	10	0	0	23
10	Kenan Softić	PU "Richmond Park School" Tuzla	TK	10	10	1	0	0	21
11	Abdullah Muminagić	JU OŠ "Grbavica I" Sarajevo	KS	9	0	6	3	0	18
12	Adi Efendira	JU OŠ"Safvet-beg Bašagić" Visoko	ZDK	6	10	1	0	0	17
13	Mubina Ramić	JU OŠ "Jezerski" Bosanska Krupa	USK	6	10	0	0	0	16
13	Ajdin Talović	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo	KS	2	10	4	0	0	16
13	Benjamin Mujkić	JU OŠ "Sjenjak" Tuzla	TK	2	10	4	0	0	16
16	Džena Omanović	JU OŠ "Mula Mustafa Bašeskija" Donje Moštre	ZDK	4	9	2	0	0	15
17	Ibrahim Mulahusejnović	JU OŠ "Hasan Kikić" Gračanica	TK	2	10	1	1	0	14
18	Azra Jašarspahić	JU OŠ "Hamdija Kreševljaković" Kakanj	ZDK	5	0	8	0	0	13
19	Emil Macić	JU OŠ" Deveta osnovna škola" Ilidža	KS	5	0	7	0	0	12
19	Džana Hodžabegović	JU OŠ "Harmani II" Bihać	USK	6	2	4	0	0	12
21	Una Ugarak	Druga osnovna škola Bugojno	SBK	2	2	4	0	0	8
21	Amar Zjakić	JU OŠ "Harmani I" Bihać	USK	0	8	0	0	0	8
21	Fadil Ibrahimović	JU OŠ" Višća" Živinice	TK	1	6	1	0	0	8
24	Danija Sinanović	JU OŠ "Hasan Kaimija" Sarajevo	KS	3	4	0	0	0	7
25	Amina Džananović	JU OŠ "Hasan Kikić" Gračanica	TK	2	4	0	0	0	6
25	Amina Karović	JU OŠ "Ustikolina" Goražde	BPK	0	2	4	0	0	6
27	Vedad Hodžić	JU OŠ "Miričina" Gračanica	TK	0	4	0	0	0	4
27	Melisa Iskrić	JU OŠ" Ivan Goran Kovačić" Gradačac	TK	1	2	0	1	0	4
27	Naida Kadrić	JU OŠ "Safvet-beg Bašagić" Breza	ZDK	2	2	0	0	0	4
30	Ema Eminović	JU OŠ "Ivan Goran Kovačić" Gradačac	TK	2	0	1	0	0	3
30	Davud Mušinović	JU OŠ "Prva osnovna škola" Konjic	HNK	1	2	0	0	0	3
32	Amina Husić	"Treća osnovna škola" Bugojno	SBK	2	0	0	0	0	2
32	Eldar Zaketović	OŠ "Hasan Kikić" Gračanica	TK	2	0	0	0	0	2
32	Derviš Vinčević	Prva osnovna škola Donji Vakuf	SBK	2	0	0	0	0	2
35	Mirza Bubalo	JU OŠ "Druga osnovna škola" Konjic	HNK	0	0	1	0	0	1
36	Ema Jusufagić	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo	KS	0	0	0	0	0	0
36	Ahmed Zahirović	JU OŠ "Suljo Čilić" Jablanica	HNK	0	0	0	0	0	0
36	Aiša Suljić	JU OŠ "Tušanj" Tuzla	TK	0	0	0	0	0	0
36	Naida Alispahić	JU OŠ "Husein ef. Đozo" Goražde	BPK	0	0	0	0	0	0
36	Ema Karović	JU OŠ "Ustikolina" Goražde	BPK	0	0	0	0	0	0
36	Šejla Kostić	JU OŠ "Fahrudin Fahro Baščelija" Goražde	BPK	0	0	0	0	0	0

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo

Rezultati učenika IX razreda

Plasman	Ime i prezime	Škola	Kanton	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Ukupno
1	Harun Memić	JU OŠ "Isak Samokovlija" Sarajevo	KS	10	10	10	9	3	42
2	Hana Memić	JU OŠ " Čengić Vila 1" Sarajevo	KS	10	10	10	0	0	30
3	Abdurahman Ferhatbegović	JU OŠ "Ćamil Sijarić" Sarajevo	KS	9	10	8	0	0	27
4	Faruk Kunić	JU OŠ " Sjenjak" Tuzla	TK	9	0	10	6	0	25
5	Ajdin Bešić	JU OŠ "Harmani II" Bihać	USK	10	2	7	4	0	23
5	Fatima Čolan	JU OŠ "Vareš Majdan" Vareš	ZDK	9	10	4	0	0	23
5	Almir Hadžović	JU OŠ Čengić Vila 1" Sarajevo	KS	10	3	10	0	0	23
8	Dženan Jašarspahić	JU OŠ "15.april" Kakanj	ZDK	10	1	8	0	0	19
8	Adem Agić	JU OŠ "Hrasno" Sarajevo	KS	9	2	8	0	0	19
10	Mehmedalija Šibonjić	JU OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić" Gradačac	TK	10	0	7	1	0	18
10	Davud Palić	JU OŠ "Kovačići" Sarajevo	KS	9	0	8	1	0	18
12	Emrah Nišić	JU OŠ " Đurđevik " Živinice	TK	8	0	7	0	0	15
13	Ajla Krdžić	JU OŠ "Podlugovi" Ilijaš	KS	10	4	0	0	0	14
14	Faris Bašić	JU OŠ "Skender Kulenović" Zenica	ZDK	7	0	6	0	0	13
14	Fatima Dedić	JU OŠ "Dubrave" Živinice	TK	8	0	4	1	0	13
14	Hatidža Hamidović	JU OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo	KS	1	2	10	0	0	13
14	Ajla Rašidagić	JU OŠ "Hrasno" Sarajevo	KS	10	2	0	1	0	13
18	Danin Softić	KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	TK	8	0	4	0	0	12
18	Tarik Omanović	JU OŠ "Mula Mustafa Bašeskija" Visoko	ZDK	7	0	5	0	0	12
18	Dani ElHadari Pediša	JU OŠ "Mehmed Handžić" Sarajevo	KS	10	0	2	0	0	12
21	Max Dedić	JU OŠ " Hrasno" Sarajevo	KS	9	0	1	0	0	10
22	Amar Delić	JU OŠ "Prva osnovna škola" Maglaj	ZDK	8	0	0	0	0	8
22	Nejla Kozarević	JU OŠ "Slavinovići" Tuzla	TK	8	0	0	0	0	8
24	Emin Džambegović	JU OŠ "Prva osnovna škola" Ilidža	KS	0	2	5	0	0	7
24	Selim Čengić	JU OŠ "Grbavica II" Sarajevo	KS	6	0	1	0	0	7
26	Hana Ćufurović	JU OŠ "Todorovska Slapnica" Velika Kladuša	USK	5	0	0	0	0	5
26	Vedad Jusufspahić	Osnovna škola "Gračanica"	SBK	5	0	0	0	0	5
26	Emina Kustura	JU OŠ "Skender Kulenović" Zenica	ZDK	3	2	0	0	0	5
29	Nedžma Jusić	Treća osnovna škola Oborci	SBK	4	0	0	0	0	4
29	Uma Selimotić	JU OŠ "Četvrta osnovna škola" Mostar	HNK	4	0	0	0	0	4
31	Harun Salčinović	JU OŠ "Mak Dizdar" Zenica	ZDK	1	0	1	0	0	2
31	Lamija Salan	JU OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo	KS	2	0	0	0	0	2
33	Iman Karahmetović	JU OŠ "Fahrudin Fahro Baščelija" Goražde	BPK	0	0	0	0	0	0
33	Lejla Mulahmetović	JU OŠ "Ustikolina" Goražde	BPK	0	0	0	0	0	0
33	Majra Trakić	JU OŠ "Ustikolina" Goražde	BPK	0	0	0	0	0	0
33	Selma Dragušić	JU OŠ "Gornje Prekounje-Ripač" Bihać	USK	0	0	0	0	0	0
33	Mak Hadžiefendić	KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	TK	0	0	0	0	0	0
33	Hana Hebibović	JU OŠ "Prva osnovna škola " Konjic	HNK	0	0	0	0	0	0
33	Naida Mravović	JU OŠ "Druga osnovna škola" Konjic	HNK	0	0	0	0	0	0
33	Hana Omerbašić	JU OŠ "Ustikolina" Goražde	BPK	0	0	0	0	0	0
33	Alma Karabeg	Treća osnovna škola Bugojno	SBK	0	0	0	0	0	0
	Hana Kozica	Druga gimnazija Sarajevo	KS	10	10	10	1	0	31

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo

Juniorska matematička olimpijada BiH (JMOBiH) se održava 25.5.2024. godine u Doboju. Više informacija o satnici će biti objavljeno na našoj web stranici u narednom periodu. Na JMOBiH se pozivaju sljedeći učenici:

1. Iman Boškailo
2. Tarik Odžak
3. Dino Ahić
4. Ahmed Fišek
5. Faris Šabeta
6. Amir Karamović
7. Ana Sarić
8. Daris Turčinović
9. Fatih Čebirić
10. Merjem Đonko
11. Harun Memić
12. Hana Memić
13. Abdurahman Fehratbegović
14. Faruk Kunić
15. Ajdin Bešić
16. Fatima Čolan
17. Almir Hadžović
18. Dženan Jašarspahić
19. Adem Agić
20. Hana Kozica