BILTEN FEDERALNOG TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA 2024. GODINE

Sarajevo, 20.4.2024. godine

Federalno takmičenje iz matematike učenika srednjih škola održano je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu, 20.4.2024. godine. Na takmičenju su učestvovala 134 učenika koji su odabrani na kantonalnim takmičenjima, kao i na kvalifikacionom takmičenju.

Prisutnima su se na otvaranju obratili prof. dr. Esmir Pilav ispred Udruženja matematičara Kantona Sarajevo, prof. dr. Zenan Šabanac i prof. dr. Senada Kalabušić ispred Prirodno-matematičkog, te Admir Beširević ispred takmičarske komisije. Takmičenje je otvorio prof. dr. Esmir Pilav, predsjednik Udruženja matematičara Kantona Sarajevo.

Na zahtjevnim zadacima učenici su pokazali zavidno znanje, te je u svakom razredu prvoplasirani učenik imao preko 30 bodova (od mogućih 50), dok je ukupno 20 učenika imalo preko 25 bodova. Pobjednik u prvom razredu je osvojio maksimalnih 50 bodova. Na Matematičku olimpijadu BiH (MOBiH) se plasiralo 20 učenika, a na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olimpijadu 14 učenika. MOBiH se održava 18. i 19. maja u Franjevačkoj klasičnoj gimnaziji u Visokom.

ZADACI

I RAZRED

Zadatak 1.

a) Napisati broj $0,\dot{7} = 0,77777\ldots$ u obliku razlomka.

b) Ako su $0 \leq a \leq 9$ i $0 \leq b \leq 9$ cijeli brojevi takvi da je broj $\sqrt{2,\dot{a} + 3,\dot{b}}$ racionalan, odrediti sve mogućnosti za vrijednost zbira $a + b$.

Napomena: Broj $2,\dot{a}$ jednak je $2,aaaaa\ldots$, a broj $3,\dot{b}$ jednak je $3,bbbbb\ldots$

Zadatak 2. Neka je x realan broj takav da je broj $T = x + \frac{1}{x}$ prirodan i strogo veći od 2.

a) Dokazati da je broj $x^8 + \frac{1}{x^8}$ prirodan i ispitati da li je on djeljiv sa T.

b) Dokazati da je broj $x^7 + \frac{1}{x^7}$ prirodan i ispitati da li je on djeljiv sa T.

Zadatak 3. Data je kružnica k sa centrom u tački O i prečnikom AB. Neka je M sredina duži AO i neka je CD tetiva kružnice k koja prolazi kroz M (pri čemu je $DM < MC$). Neka je $H \neq D$ tačka na duži CD takva da vrijedi $DM = MH$. Ako je $BH \perp CD$, odrediti ugao $\angle ABC$.

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve n i N takve da je N potpun kvadrat prirodnog broja koji u svom decimalnom zapisu sadrži samo cifre 2 i 5 i pri tome se cifra 2 pojavljuje tačno n puta, a cifra 5 tačno jednom.

Zadatak 5. Date su 24 tačake u prostoru tako da nikoje tri od njih nisu kolinearne. Kažemo da je ravan lijepa ako sadrži bar tri od ove 24 tačke.

a) Da li je moguće da postoje tačno 2024 lijepe ravni? Odgovor obrazložiti!

b) Da li je moguće da postoje tačno 2004 lijepe ravni? Odgovor obrazložiti!

II RAZRED

Zadatak 1.

a) Mak je izabrao tri proizvoljna realna broja a, b, c i formirao tri kvadratne jednačine
$$x^2 - 2ax + b^2 = 0, x^2 - 2bx + c^2 = 0, x^2 - 2cx + a^2 = 0.$$
Dokazati da barem jedna od ovih jednačina ima realno rješenje!

b) Nina je izabrala tri proizvoljna realna broja a, b, c i formirala tri kvadratne jednačine
$$ax^2 + 2bx + c = 0, bx^2 + 2cx + a = 0, cx^2 + 2ax + b = 0.$$
Dokazati da barem jedna od ovih jednačina ima realno rješenje!

Zadatak 2. U trouglu ABC tačka D leži na stranici $\overline{AB}$ tako da je CD simetrala ugla $\angle ACB$. Simetrala duži $\overline{CD}$ siječe pravu AB u tački E. Ako je $\overline{BE} = 4$ i $\overline{AB} = 5$, dokazati da je $2\overline{AD} = \overline{ED}$.

Zadatak 3. Na krugu je raspoređeno 999 prirodnih brojeva tako da za svaka dva susjedna broja na krugu vrijedi da je apsolutna vrijednost njihove razlike jednaka njihovom najvećem zajedničkom djeliocu. Odrediti najveći prirodan broj N takav da sa sigurnošću možemo tvrditi da je proizvod brojeva na krugu djeljiv sa N.
Napomena: Brojevi na krugu se smiju ponavljati.

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve n i N takve da je N potpun kvadrat prirodnog broja koji u svom decimalnom zapisu sadrži samo cifre 2 i 5 i pri tome se cifra 2 pojavljuje tačno n puta, a cifra 5 tačno jednom.

Zadatak 5. Neka su a, b, c, d realni brojevi iz zatvorenog intervala $[0,1]$. Dokazati da vrijedi nejednakost
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} - \frac{1}{4} \leq \left(\frac{a + b + c + d}{4}\right)^2,$$
te odrediti sve četvorke (a, b, c, d) za koje vrijedi jednakost.

III RAZRED

Zadatak 1.

a) Neka je α realan broj takav da vrijedi $\cos\alpha = \frac{1}{4}$. Odrediti vrijednost $\cos 3\alpha$.

b) Neka je $f(x) = \cos x + \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$. Dokazati da za svaki realan broj x vrijedi nejednakost

$$-\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2,$$

te odrediti sve x za koje vrijedi $f(x) = -\frac{2}{3}$, te sve x za koje je $f(x) = 2$.

Zadatak 2. Odrediti sve parove (a, b) realnih brojeva takvih da sistem jednačina

$$x + y = a - 1,$$
$$x(y + 1) - z^2 = b,$$

ima jedinstveno rješenje po x, y, z u skupu realnih brojeva.

Zadatak 3. Na krugu je raspoređeno 999 prirodnih brojeva tako da za svaka dva susjedna broja na krugu vrijedi da je apsolutna vrijednost njihove razlike jednaka njihovom najvećem zajedničkom djeliocu. Odrediti najveći prirodan broj N takav da sa sigurnošću možemo tvrditi da je proizvod brojeva na krugu djeljiv sa N.
Napomena: Brojevi na krugu se smiju ponavljati.

Zadatak 4. Na pravoj p su date dvije različite tačke M i N. Kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 sa centrima O_1, O_2, O_3, O_4 redom, dodiruju pravu p tako da se k_1 i k_2 dodiruju izvana u M, a k_3 i k_4 se dodiruju izvana u N, te su k_1 i k_3 sa iste strane prave p (a k_2 i k_4 sa druge strane prave p). Ako postoji kružnica k takva da sve kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 dodiruju kružnicu k iznutra, dokazati da se prave O_1O_3, O_2O_4 i p sijeku u jednoj tački ili su paralelne.

Zadatak 5. Neka je p prost broj i neka je $S = \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$. Odrediti broj podskupova skupa S čiji je zbir elemenata djeljiv sa p.

IV RAZRED

Zadatak 1. Neka je $a \neq 1$ pozitivan realan broj. Funkcije $f, g, h_1, h_2, h_3, \dots$ definisane su sa

$$f(x) = a^{ax}, \qquad g(x) = \frac{\log_3 x - \log_9 a^2}{\log_3 a}, \qquad h_1(x) = g\big(f(x)\big), \qquad h_n(x) = h_1\big(h_{n-1}(x)\big)$$

pri čemu posljednja relacija vrijedi za sve prirodne brojeve $n \geq 2$.

a) Ako je $a = 10$, odrediti zbir cifara broja $h_{1000}(1)$.

b) Odrediti sve vrijednosti broja a za koje je $h_{2024}(2024) = 2024$.

Zadatak 2. Neka je x realan broj. Za svaki prirodan broj n definišimo $t_n = x^n + x^{-n}$. Pretpostavimo da je t_1 cio broj strogo veći od 2.

a) Dokazati da je t_n cio broj za sve prirodne brojeve n.

b) Odrediti sve prirodne brojeve n takve da je t_n djeljiv s t_1.

Zadatak 3. Mrav se nalazi u tački O. U svakom potezu on bira jedan od četiri smjera: sjever, jug, istok ili zapad, te se pomjera 1 metar u tom smjeru. Nakon 2024 poteza mrav se ponovo našao u tački O. Dokazati da je broj načina da to postigne jednak $\binom{2024}{1012}^2$.

Napomena: 2024. potez ne mora biti prvi put kada se mrav nađe u tački O, bitno je samo da se nakon 2024 poteza nađe u toj tački.

Zadatak 4. Na pravoj p su date dvije različite tačke M i N. Kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 sa centrima O_1, O_2, O_3, O_4 redom, dodiruju pravu p tako da se k_1 i k_2 dodiruju izvana u M, a k_3 i k_4 se dodiruju izvana u N, te su k_1 i k_3 sa iste strane prave p (a k_2 i k_4 sa druge strane prave p). Ako postoji kružnica k takva da sve kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 dodiruju kružnicu k iznutra, dokazati da se prave O_1O_3, O_2O_4 i p sijeku u jednoj tački ili su paralelne.

Zadatak 5. Neka je p prost broj i neka je $S = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$. Odrediti broj podskupova skupa S čiji je zbir elemenata djeljiv sa p.

Rješenja zadataka i šema bodovanja

I RAZRED

Zadatak 1.

c) Napisati broj $0,\dot{7} = 0{,}77777\ldots$ u obliku razlomka.

d) Ako su $0 \leq a \leq 9$ i $0 \leq b \leq 9$ cijeli brojevi takvi da je broj $\sqrt{2,\dot{a} + 3,\dot{b}}$ racionalan, odrediti sve mogućnosti za vrijednost zbira $a + b$.

Napomena: Broj $2,\dot{a}$ jednak je $2, aaaaa\ldots$, a broj $3,\dot{b}$ jednak je $3, bbbbb\ldots$

Rješenje:

a) Neka je $x = 0,\dot{7} = 0{,}77777\ldots$ Tada imamo da je $10x = 7{,}77777\ldots = 7 + 0{,}77777\ldots$ odnosno $10x = 7 + x$, iz čega slijedi da je $x = \frac{7}{9}$. Na sličan način možemo generalno dobiti da je $0.\dot{a} = \frac{a}{9}$ za bilo koju cifru a.

b) Neka je $x = 2,\dot{a} + 3,\dot{b}$. Iz uslova zadatka je $\sqrt{x}$ racionalan broj, pa x mora biti kvadrat racionalnog broja. Iz dijela pod a) imamo da je $2,\dot{a} = 2 + 0,\dot{a} = 2 + \frac{a}{9}$ i $3,\dot{b} = 3 + 0,\dot{b} = 3 + \frac{b}{9}$, pa je $x = 5 + \frac{a}{9} + \frac{b}{9} = \frac{45+a+b}{9} = \frac{45+a+b}{3^2}$. Da bi x bio kvadrat racionalnog broja mora vrijediti da je $45 + a + b$ kvadrat prirodnog broja. Kako je $0 \leq a + b \leq 18$, jedina opcija je $45 + a + b = 49$, odnosno $a + b = 4$. Ta vrijednost sa zaista može dostići na primjer za $a = b = 2$, kada imamo da je $x = 2,\dot{2} + 3,\dot{2} = 5,\dot{4} = \frac{49}{9} = \left(\frac{7}{3}\right)^2$.

Šema bodovanja:

- dio pod a): **2 boda**
- dio pod b):
  - generalni zaključak da je $0.\dot{a} = \frac{a}{9}$: **1 bod**
  - zapis vrijednosti pod korijenom kao $\frac{45+a+b}{9}$: **3 boda**
  - zaključak da broj $45 + a + b$ mora biti kvadrat prirodnog broja: **3 boda**
  - zaključak da je jedino rješenje $a + b = 4$: **1 bod**

Zadatak 2. Neka je x realan broj takav da je broj $T = x + \frac{1}{x}$ cijeli i strogo veći od 2.

c) Dokazati da je broj $x^8 + \frac{1}{x^8}$ cijeli i ispitati da li je on djeljiv sa T.

d) Dokazati da je broj $x^7 + \frac{1}{x^7}$ cijeli i ispitati da li je on djeljiv sa T.

Rješenje:

Radi kraćeg zapisa, za prirodan broj $n \geq 2$ označimo sa $T_n = x^n + \frac{1}{x^n}$.

a) Primijetimo da je $T^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = T_2 + 2$, odnosno $T_2 = T^2 - 2$. Na sličan način imamo da je $T_2^2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = T_4 + 2$, te $T_4^2 = T_8 + 2$. Sada imamo da je $T_8 = T_4^2 - 2 = (T_2^2 - 2)^2 - 2 = ((T^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2 = (T^4 - 4T^2 + 2)^2 - 2 = T^8 + 20T^4 - 8T^6 - 16T^2 + 2$. Očigledno je sada T_8 cijeli broj (jer je T cijeli broj), a vidimo i da $T \nmid T_8$, jer bi u suprotnom $T|2$, što je u kontradikciji sa uslovom $T > 2$.

b) Posmatrajmo $T_3 \cdot T_4 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = x^7 + \frac{1}{x^7} + x + \frac{1}{x} = T_7 + T$. U dijelu pod a) smo već dobili da je T_4 cijeli broj ($T_4 = T_2^2 - 2 = (T^2 - 2)^2 - 2$). Dokažimo da je i T_3 cijeli broj, te da je djeljiv sa T. Iz toga direktno zaključujemo da je i T_7 cijeli broj djeljiv sa T (jer je $T_7 = T_3 \cdot T_4 - T$).

I način:

Imamo da je $T^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + \frac{3}{x} = T_3 + 3T$. Dakle, $T_3 = T^3 - 3T$, iz čega direktno slijedi i da je T_3 cijeli broj i da je djeljiv sa T.

II način:

Imamo da je $T \cdot T_2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x} = T_3 + T$, odnosno $T_3 = T(T_2 - 1)$. Kako smo u dijelu pod a) već dokazali da je broj T_2 cijeli ($T_2 = T^2 - 2$), iz prethodne relacije slijedi da je i T_3 cijeli broj i da je djeljiv sa T.

Dakle, T_7 je cijeli broj djeljiv sa T.

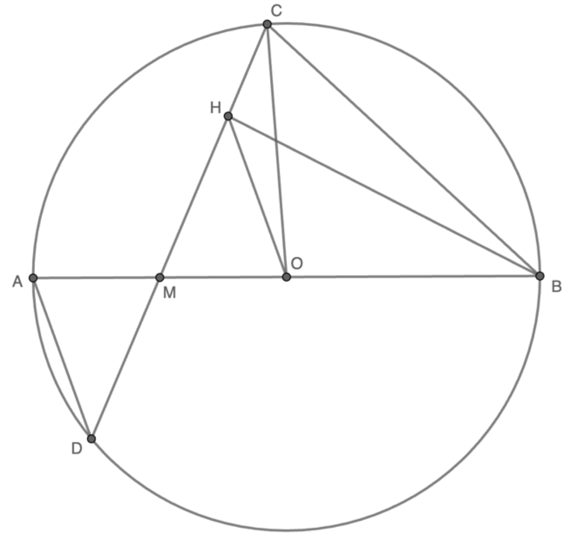
Šema bodovanja:

- izražavanje T_2 ili T_4 preko T: **1 bod**
- dio pod a):
  - izražavanje T_8 preko T i zaključak da je T_8 cijeli broj: **2 boda**
  - dokaz da T ne dijeli T_8: **1 bod**
- dio pod a):
  - dokaz da je T_3 cijeli broj koji je djeljiv sa T: **2 boda**
  - relacija $T_3 \cdot T_4 = T_7 + T$: **3 boda**
  - krajnji zaključak da je T_7 cijeli broj djeljiv sa T: **1 bod**

Zadatak 3. Data je kružnica k sa centrom u tački O i prečnikom AB. Neka je M sredina duži AO i neka je CD tetiva kružnice k koja prolazi kroz M (pri čemu je $DM < MC$). Neka je $H \neq D$ tačka na duži CD takva da vrijedi $DM = MH$. Ako je $BH \perp CD$, odrediti ugao $\angle ABC$.

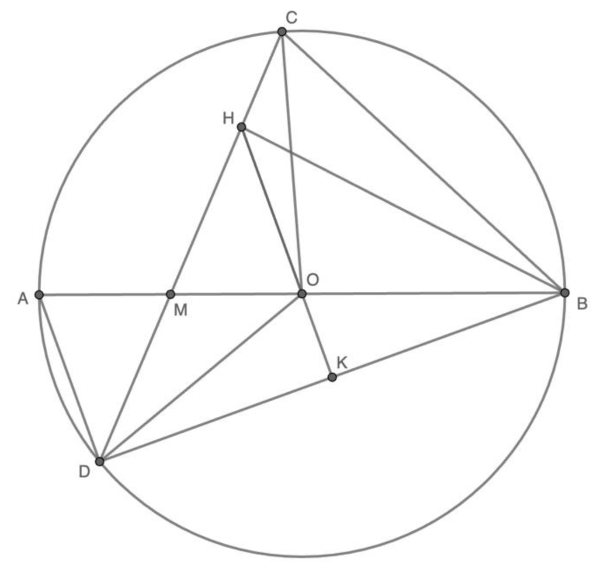
Rješenje I:

Primijetimo da je četverougao $ADOH$ paralelogram (jer mu se dijagonale polove, odnosno vrijedi $AM = MO$ i $DM = MH$). Označimo ugao $\angle ADH = \alpha$. Sada imamo i da je $\angle DHO = \alpha$ (iz paralelograma), a pošto je $\angle ADH = \angle ADC = \angle ABC = \alpha$ (kao periferijski uglovi nad istom tetivom) zaključujemo da je četverougao $CHOB$ tetivan ($\angle OBC + \angle CHO = \alpha + (180° - \alpha) = 180°$). Iz tog tetivnog imamo da je $\angle COB = \angle CHB = 90°$, a kako je $OB = OC = OA$ (jer je O centar kružnice) dobijamo da je $\angle OBC = \angle OCB = 45°$, odnosno $\angle ABC = 45°$.



Rješenje II:

Slično kao u prvom rješenju dobijamo da je $\angle ABC = \angle DHO$. Primijetimo da je O zapravo težište trougla DBH (jer je BM težišnica tog trougla i vrijedi $BO = OA = 2OM$). Označimo sa K presjek pravih HO i DB. Kako je O težište, tačka K je ujedno i sredina duži BD. Sada su trouglovi ODK i OBK podudarni (SSS, jer je $OB = OD, DK = KB$ i $KO = KO$), iz čega slijedi da je $\angle DKO = \angle BKO = 90°$. Sada je HK ujedno i težišnica i visina u trouglu DHB, pa je taj trougao jednakokraki, odnosno vrijedi $HD = HB$, iz čega zaključujemo da je $\angle HDB = \angle HBD = \angle KHD = \angle KHB = 45°$, odnosno $\angle DHO = \angle ABC = 45°$.



Šema bodovanja:

- zaključak da je $ADOH$ paralelogram: **2 boda**
- dokaz da je $\angle ABC = \angle DHO$: **2 boda**

I rješenje:

- dokaz da je četverougao $CHOB$ tetivan: **3 boda**
- dokaz da je $\angle COB = 90°$: **1 bod**
- dokaz da je $\angle ABC = 45°$: **2 boda**

II rješenje:

- zaključak da je O težište trougla DHB: **3 boda**
- uvođenje tačke K i navođenje da je $DK = KB$: **1 bod**
- dokaz da je trougao DHB jednakokraki: **1 bod**
- dokaz da je $\angle ABC = 45°$: **1 bod**

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve n i N takve da je N potpun kvadrat prirodnog broja koji u svom decimalnom zapisu sadrži samo cifre 2 i 5 i pri tome se cifra 2 pojavljuje tačno n puta, a cifra 5 tačno jednom.

Rješenje:
Dokazat ćemo da su jedina rješenja $(n, N) = (1,25)$ i $(n, N) = (2,225)$.
Primijetimo prvo da kvadrat prirodnog broja ne može završavati cifrom 2, tako da cifra 5 mora biti zadnja. Dakle, $N = 22 \dots 225$, pri čemu imamo n cifara 2. Primijetimo da je

$$N = 22 \dots 225 = 22 \dots 200 + 25 = 100 \cdot 22 \dots 2 + 25 = 100 \cdot 2 \cdot 11 \dots 1 + 25$$
$$= 100 \cdot 2 \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{9} + 25.$$

Posljednja jednakost vrijedi zbog $\underbrace{11 \dots 1}_{n-2} = \frac{\overbrace{99 \dots 9}^{n-2}}{9} = \frac{10^{n-1}-1}{9}$. Dakle, imamo da je

$$N = \frac{2 \cdot 10^{n+1} + 25}{3^2}.$$

Kako bi ovo bio potpun kvadrat, mora $2 \cdot 10^{n+1} + 25 = M^2$, za neki prirodan broj M. Sada imamo

$$2^{n+2} \cdot 5^{n+1} = 2 \cdot 10^{n+1} = M^2 - 25 = (M-5)(M+5).$$

Da bi broj $M^2 - 25$ bio paran, mora M biti neparno, pa su oba broja $M - 5$ i $M + 5$ parna. Slično, kako bi broj $M^2 - 25$ bio djeljiv sa 5, mora i M biti djeljiv sa 5, pa su oba broja $M - 5$ i $M + 5$ djeljiva sa 5. Dakle, brojevi $M - 5$ i $M + 5$ su djeljivi sa 10. Neka je $M - 5 = 10k$ za neki nenegativni cijeli broj broj k. Sada imamo

$$2^{n+2} \cdot 5^{n+1} = 10k \cdot (10k + 10)$$
$$2^n \cdot 5^{n-1} = k \cdot (k+1)$$

Kako je $NZD(k, k+1) = 1$ zaključujemo da 2^n u potpunosti dijeli jedan od brojeva k ili $k+1$. Isto vrijedi i za 5^{n-1}. Laganom provjerom dobijamo da su za $n = 1$ i $n = 2$ jedina rješenja $k = 1$ i $k = 4$, redom, što daje $N = 25$ i $N = 225$, redom, što zaista jesu rješenja.
Za $n \geq 3$ razlikujemo slučajeve:
1° $k = 1$ i $k + 1 = 2^n \cdot 5^{n-1}$. Dobijamo da je $2^n \cdot 5^{n-1} = 2$, tj. $n = 1$, što je kontradikcija sa $n \geq 3$.
2° $k = 2^n$ i $k + 1 = 5^{n-1}$. Dobijamo da je $2^n + 1 = 5^{n-1}$. Za $n = 3$ imamo da je $25 = 5^{n-1} > 2^n + 1 = 9$. Kako se n povećava, lijeva strana nejednakosti se množi sa 5, a desna sa najviše 2, tako da za sve $n \geq 3$ vrijedi $5^{n-1} > 2^n + 1$, pa u ovom slučaju nemamo rješenja.
3° $k = 5^{n-1}$ i $k + 1 = 2^n$. Dobijamo da je $5^{n-1} = 2^n - 1$. U prethodnom slučaju smo već dokazali da je $5^{n-1} > 2^n + 1$ za $n \geq 3$, tako da vrijedi i $5^{n-1} > 2^n - 1$, što znači da ni u ovom slučaju nemamo rješenja.
4° $k = 2^n \cdot 5^{n-1}$ i $k + 1 = 1$. Ovaj slučaj je očigledno nemoguć jer je $1 = k + 1 > k = 2^n \cdot 5^{n-1} > 1$.
Dakle, jedina rješenja su $(n, N) = (1,25)$ i $(n, N) = (2,225)$.

Šema bodovanja:

- zaključak da cifra 5 mora biti zadnja: **0 bodova**
- izražavanje $N = \frac{2 \cdot 10^{n+1} + 25}{3^2}$: **2 boda**
- dobijanje jednačine $2^{n+2} \cdot 5^{n+1} = (M-5)(M+5)$: **1 boda**
- zaključak da je $NZD(k, k+1) = 1$ (analogno da je $NZD(M-5, M+5) = 10$) i ispisivanje mogućih slučajeva: **3 boda**
- rješavanje svih slučajeva: **4 boda (2 boda** se mogu dodijeliti ako se riješe samo 2° ili 3°)

Zadatak 5. Date su 24 tačke u prostoru tako da nikoje tri od njih nisu kolinearne. Kažemo da je ravan *lijepa* ako sadrži bar tri od ove 24 tačke.

a) Da li je moguće da postoje tačno 2024 lijepe ravni? Odgovor obrazložiti!
b) Da li je moguće da postoje tačno 2004 lijepe ravni? Odgovor obrazložiti!

Rješenje:

a) Ako nikoje četiri od ove 24 tačke nisu komplanarne (tj. ne leže u istoj ravni), onda svake tri od ove 24 tačke određuju ravan. U tom slučaju imamo

$$\binom{24}{3} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2024$$

ravni. Dakle, mogu postojati 2024 lijepe ravni.

b) Pretpostavimo da postoji tačno 2004 lijepe ravni. Vidjeli smo da 24 tačke maksimalno mogu definirati 2024 ravni tako da $2024 - 2004 = 20$ trojki tačaka leži u ravnima već određenim od strane drugih trojki.

Ako jedna od ravni sadrži 7 ili više tačaka, tada ima $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ trojki tačaka u ovoj ravni i broj trojki je veći od broja ravni za najmanje $35 - 1 = 34$. Dakle, najveći mogući broj ravni je $2024 - 34 = 1990$. Kontradikcija.

Dakle, svaka ravan može sadržavati najviše 6 tačaka. Neka su a, b, c broj ravni koje sadrže $4, 5, 6$ tačaka redom. Prilikom brojanja trojki, u slučajevima $k = 4{,}5{,}6$, brojimo svaku ravan koja sadrži k tačaka $\binom{7}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4, 10, 20$ puta, što je za $3, 9, 19$ puta više od ukupnog broja ravni, redom. Dakle, broj ravni zadovoljava sljedeću jednakost

$$2024 - 3a - 9b - 19c = 2004.$$

Dakle, $3a + 9b + 19c = 20$. Međutim, ne postoje nenegativni cijeli brojevi a, b, c koji zadovoljavaju ovu jednačinu, što nas dovodi do kontradikcije.

Prema tome, ne mogu postojati tačno 2004 lijepe ravni.

Šema bodovanja:

- dio pod a): **2 boda**
- dio pod b):
  - konstatacija da 20 trojki tačaka leži u ravnima već određenim od strane drugih trojki: **1 bod**
  - eliminacija slučaja da u jednoj ravni leži 7 ili više tačaka: **2 boda**
  - razmatranje slučaja kada ravan sadrži $4, 5$ ili 6 tačaka: **5 bodova**

II RAZRED

Zadatak 1.

a) Mak je izabrao tri proizvoljna realna broja a, b, c i formirao tri kvadratne jednačine

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0, x^2 - 2bx + c^2 = 0, x^2 - 2cx + a^2 = 0.$$

Dokazati da barem jedna od ovih jednačina ima realno rješenje!

b) Nina je izabrala tri proizvoljna realna broja a, b, c i formirala tri kvadratne jednačine

$$ax^2 + 2bx + c = 0, bx^2 + 2cx + a = 0, cx^2 + 2ax + b = 0.$$

Dokazati da barem jedna od ovih jednačina ima realno rješenje!

Rješenje:

a) Pretpostavimo da niti jedna od jednačina koje je formirao Mak nema realnih rješenja. Tada sve tri odgovarajuće diskriminante moraju biti strogo manje od nule. To znači da tada vrijedi

$$4a^2 - 4b^2 < 0, 4b^2 - 4c^2 < 0, 4c^2 - 4a^2 < 0.$$

Zbrajanjem ove tri nejednakosti dobijemo

$$4a^2 - 4b^2 + 4b^2 - 4c^2 + 4c^2 - 4a^2 < 0,$$

tj.,

$$0 < 0,$$

što je očigledna kontradikcija. Do kontradikcije nas je dovela pretpostavka da su sve tri diskrimante strogo negativne, pa postoji bar jedna od njih koja je nenegativna. U tom slučaju odgovarajuća kvadratna jednačina ima realno rješenje.

b) Pretpostavimo kao i u prethodnom dijelu da sve tri kvadratne jednačine koje je formirala Nina nemaju realnih rješenja. Tada su odgovarajuće diskriminante strogo manje od nule:

$$4b^2 - 4ac < 0, 4c^2 - 4ab < 0, 4a^2 - 4bc < 0,$$

tj.

$$b^2 - ac < 0, c^2 - ab < 0, a^2 - bc < 0.$$

Zbrajanjem dobijemo da tada vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac < 0.$$

Posljendja nejednakost se može napisati u obliku

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 < 0,$$

koja očigledno nije tačna. Kontradikcija! Do kontradikcije nas je dovela pretpostavka da su sve tri diskrimante strogo negativne, pa postoji bar jedna od njih koja je nenegativna i u tom slučaju odgovarajuća kvadratna jednačina ima realno rješenje.

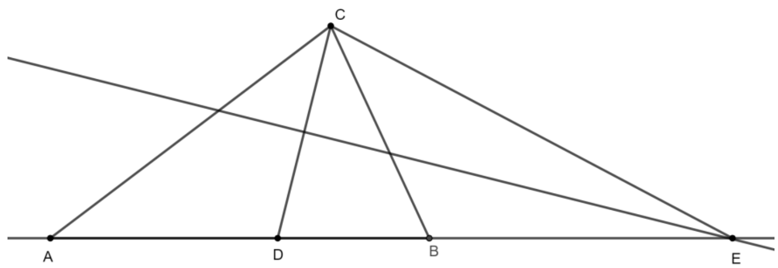
Šema bodovanja:

- Dio pod a) nosi **4 boda**, i to:
    - **1 bod** za izražavanje diskriminanti
    - **3 boda** za dolazak do kontradikcije
- Dio pod b) nosi **6 bodova**, i to:
    - **1 bod** za izražavanje diskriminanti
    - **5 bodova** za dolazak do kontradikcije (ako učenik dođe do nejednakosti $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac < 0$ i tu se zaustavi, dobija 2 od 5 bodova)

Zadatak 2. U trouglu ABC tačka D leži na stranici $\overline{AB}$ tako da je CD simetrala ugla $\angle ACB$. Simetrala duži $\overline{CD}$ siječe pravu AB u tački E. Ako je $\overline{BE} = 4$ i $\overline{AB} = 5$, dokazati da je $2\overline{AD} = \overline{ED}$.

Napomena: Neki učenici su nacrtali trougao ABC tako da vrijedi $AC < BC$. Može se pokazati da u tom slučaju ne mogu biti zadovoljeni dati uslovi (tačka E je ustvari presjek tangente u C na opisanu kružnicu trougla ABC sa pravom AB).

Rješenje 1:



Označimo uglove trougla u vrhovima A, B, C redom sa α, β, γ. Tada je $\angle BCD = \angle ACD = \frac{\gamma}{2}$. Ugao $\angle BDC$ je vanjski ugao u trouglu ADC, pa vrijedi

$$\angle BDC = \alpha + \frac{\gamma}{2}.$$

Trougao CDE je jednakokraki trougao (jer tačka E leži na simetrali stranice $\overline{CD}$, pa je

$$\angle ECD = \angle EDC = \alpha + \frac{\gamma}{2}$$

(jer je $\angle EDC = \angle BDC$). Odavde imamo da je

$$\angle ECB = \angle ECD - \angle BCD = \alpha + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} = \alpha.$$

Označimo $\overline{AD} = x, \overline{DB} = y$. Prema uslovu zadatka je

$$x + y = \overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB} = 5.$$

Kako je trougao CDE jednakokraki, to je

$$\overline{CE} = \overline{DE} = \overline{DB} + \overline{BE} = y + 4.$$

Trouglovi AEC i BEC su slični ($\angle EAC = \alpha = \angle ECB$ i $\angle AEC = \angle BEC$), pa vrijedi

$$\overline{CE} : \overline{BE} = \overline{AE} : \overline{CE},$$

tj.

$$\overline{CE}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{BE}.$$

Prema uslovu zadatka je $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = 9$, pa imamo

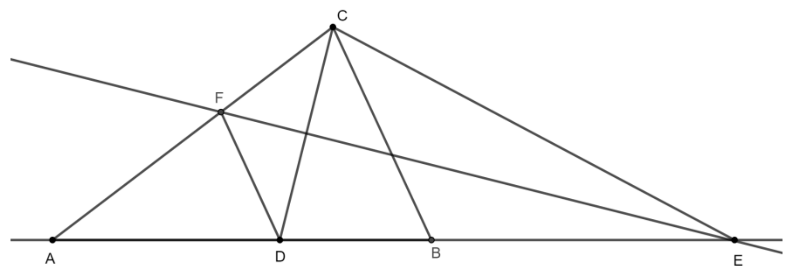
$$(y + 4)^2 = 36.$$

Jedino pozitivno rješenje posljednje jednačine je $y = 2$, odakle slijedi da je $x = 3$.
Znači, $\overline{AD} = x = 3$ i $\overline{ED} = \overline{DB} + \overline{BE} = y + 4 = 6$, pa vrijedi da je $2\overline{AD} = \overline{ED}$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da je $\angle BDC = \alpha + \frac{\gamma}{2}$ – **1 bod**
- Zaključak da je trougao CDE jednakokraki – **1 bod**
- Zaključak da je $\angle ECB = \alpha$ – **1 bod**
- Zaključak da su trouglovi AEC i BEC slični – **3 boda**
- Zaključak da je $\overline{CE}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{BE}$ – **1 bod**
- Izračun $\overline{AD} = 3$ i $\overline{ED} = 6$ – **3 boda**

Rješenje 2:
Koristeći iste oznake kao u prethodnom rješenju, možemo pokazati da jetrougao CDE jednakokraki trougao i da je $\overline{CE} = y + 4$.
Označimo sa F tačku u kojoj simetrala duži $\overline{CD}$ siječe stranicu $\overline{AC}$. Tada je $\overline{CF} = \overline{DF}$ (jer je tačka F na simetrali duži $\overline{CD}$) i $\angle CDF = \angle FCD = \frac{\gamma}{2}$.



Tada je $\angle AFD = \gamma$ (vanjski ugao kod vrha F u trouglu FCD), pa su trouglovi ADF i ABC slični. Iz te sličnosti imamo

$$\overline{AD}:\overline{DB} = \overline{AF}:\overline{FC}.$$

S druge strane, EF je simetrala ugla $\angle AEC$. Naime, EF je simetrala stranice $\overline{CD}$ u jednakokrakom trouglu CDE, pa je ujedno i simetrala ugla $\angle DEC = \angle AEC$. Iz teoreme o simetrali unutrašnjeg ulga trougla slijedi da je

$$\overline{AF}:\overline{FC} = \overline{AE}:\overline{CE}.$$

Ovaj i prethodni omjer nam daju

$$\overline{AD}:\overline{DB} = \overline{AE}:\overline{CE}.$$

Odavde je

$$x : y = 9 : (y + 4),$$

tj.

$$x = \frac{9y}{y+4}.$$

Uvrštavanjem posljednje jednakosti u $x + y = 5$ i rješavanjem odgovarajuće kvadratne jednačine po y dobije se da je $y = 2$, odakle slijedi da je $x = 3$.
Znači, $\overline{AD} = x = 3$ i $\overline{ED} = \overline{DB} + \overline{BE} = y + 4 = 6$, pa vrijedi da je $2\overline{AD} = \overline{ED}$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da je trougao CDE jednakokraki – **1 bod**
- Zaključak da su trouglovi ABC i ADF slični – **3 boda**
- Zaključak da je $\overline{AD}:\overline{DB} = \overline{AE}:\overline{CE}$ – **3 boda**
- Izračun $\overline{AD} = 3$ i $\overline{ED} = 6$ – **3 boda**

Zadatak 3. Na krugu je raspoređeno 999 prirodnih brojeva tako da za svaka dva susjedna broja na krugu vrijedi da je apsolutna vrijednost njihove razlike jednaka njihovom najvećem zajedničkom djeliocu. Odrediti najveći prirodan broj N takav da sa sigurnošću možemo tvrditi da je proizvod brojeva na krugu djeljiv sa N.
Napomena: Brojevi na krugu se smiju ponavljati.

Rješenje:
Primijetimo da ako su na krugu redom poredani brojevi $4,3,2,1,2,1,2,1,2,1,\ldots,2,1,2,1,2$, oni zadovoljavaju uslove zadatka, a njihov proizvod je $2^{499} \cdot 3 \cdot 4 = 2^{501} \cdot 3$. Dakle, $N \leq 2^{501} \cdot 3$.
Najprije primijetimo da na krugu ne mogu biti dva susjedna neparna broja, jer je njihova razlika paran broj, pa im to ne može biti najveći zajednički djelilac. Zbog toga na krugu može biti maksimalno 499 neparnih brojeva, pa mora biti bar 500 parnih.
Na osnovu prethodno rečenog, na krugu moraju biti dva susjedna parna broja. Ako niti jedan od njih nije djeljiv sa 4, onda oba ta broja daju ostatak 2 pri dijeljenju sa 4, pa je njihova razlika (što je u ovom slučaju i njihov najveći zajednički djelilac) djeljiva sa 4, što je očigledno nemoguće. Dakle, na tabli postoji broj djeljiv sa 4.
Dokažimo još da na tabli mora postojati broj djeljiv sa 3. Pretpostavimo suprotno. Tada svi brojevi na tabli daju ostatak 1 ili 2 pri dijeljenju sa 3. Primijetimo da ne možemo imati dva susjedna broja koja daju isti ostatak, jer bi onda njihova razlika bila djeljiva sa 3, što nije moguće jer oni nisu djeljivi sa 3. To znači da se ostaci 1 i 2 naizmjenično ponavljaju na krugu. Međutim, to nije moguće jer je na krugu neparan broj (999) brojeva. Dakle, na krugu se mora nalaziti broj djeljiv sa 3.
Dakle, na krugu se nalazi bar 500 parnih brojeva od kojih je bar jedan djeljiv sa 4, pa je proizvod djeljiv sa $2^{499} \cdot 4 = 2^{501}$. Kako je na krugu i broj djeljiv sa 3, to je proizvod djeljiv sa $2^{501} \cdot 3$. Dakle, $N = 2^{501} \cdot 3$.

Šema bodovanja:

- Konstrukcija koja dokazuje da je $N \leq 2^{501} \cdot 3$ – **2 boda** (može biti i više konstrukcija, pa da učenik gleda najveći zajednički djelilac proizvoda brojeva u tim konstrukcijama; Također, ukoliko učenik nema gornju konstrukciju, ali ima konstrukciju koja može biti korisna, npr. koja daje odgovarajući broj dvica, može dobiti 1 od ova 2 boda)
- Dokaz da je $N \geq 2^{501} \cdot 3$ nosi **7 bodova**, i to:
  - Dokaz da na krugu mora biti bar 500 parnih brojeva – **2 boda** (ukoliko učenik samo dokaže da ne mogu biti dva susjedna neparna broja na krugu, dobija 1 od ova 2 boda)
  - Dokaz da na krugu postoje dva susjedna parna broja te da je bar jedan od njih djeljiv sa 4 – **2 boda**
  - Dokaz da na krugu postoji broj djeljiv sa 3 – **3 boda**
  - Zaključak da je $N \geq 2^{501} \cdot 3$ – **1 bod**

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve n i N takve da je N potpun kvadrat prirodnog broja koji u svom decimalnom zapisu sadrži samo cifre 2 i 5 i pri tome se cifra 2 pojavljuje tačno n puta, a cifra 5 tačno jednom.

Rješenje:
Dokazat ćemo da su jedina rješenja $(n, N) = (1,25)$ i $(n, N) = (2,225)$.
Primijetimo prvo da kvadrat prirodnog broja ne može završavati cifrom 2, tako da cifra 5 mora biti zadnja. Dakle, $N = 22 \ldots 225$, pri čemu imamo n cifara 2. Primijetimo da je

$$N = 22 \ldots 225 = 22 \ldots 200 + 25 = 100 \cdot 22 \ldots 2 + 25 = 100 \cdot 2 \cdot 11 \ldots 1 + 25$$
$$= 100 \cdot 2 \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{9} + 25.$$

Posljednja jednakost vrijedi zbog $\underbrace{11 \ldots 1}_{n-2} = \frac{\overbrace{99 \ldots 9}^{n-2}}{9} = \frac{10^{n-1}-1}{9}$. Dakle, imamo da je

$$N = \frac{2 \cdot 10^{n+1} + 25}{3^2}.$$

Kako bi ovo bio potpun kvadrat, mora $2 \cdot 10^{n+1} + 25 = M^2$, za neki prirodan broj M. Sada imamo

$$2^{n+2} \cdot 5^{n+1} = 2 \cdot 10^{n+1} = M^2 - 25 = (M-5)(M+5).$$

Da bi broj $M^2 - 25$ bio paran, mora M biti neparno, pa su oba broja $M - 5$ i $M + 5$ parna. Slično, kako bi broj $M^2 - 25$ bio djeljiv sa 5, mora i M biti djeljiv sa 5, pa su oba broja $M - 5$ i $M + 5$ djeljiva sa 5. Dakle, brojevi $M - 5$ i $M + 5$ su djeljivi sa 10. Neka je $M - 5 = 10k$ za neki nenegativni cijeli broj broj k. Sada imamo

$$2^{n+2} \cdot 5^{n+1} = 10k \cdot (10k + 10)$$
$$2^n \cdot 5^{n-1} = k \cdot (k+1)$$

Kako je $NZD(k, k+1) = 1$ zaključujemo da 2^n u potpunosti dijeli jedan od brojeva k ili $k+1$. Isto vrijedi i za 5^{n-1}. Laganom provjerom dobijamo da su za $n = 1$ i $n = 2$ jedina rješenja $k = 1$ i $k = 4$, redom, što daje $N = 25$ i $N = 225$, redom, što zaista jesu rješenja.
Za $n \geq 3$ razlikujemo slučajeve:
$1°$ $k = 1$ i $k + 1 = 2^n \cdot 5^{n-1}$. Dobijamo da je $2^n \cdot 5^{n-1} = 2$, tj. $n = 1$, što je kontradikcija sa $n \geq 3$.
$2°$ $k = 2^n$ i $k + 1 = 5^{n-1}$. Dobijamo da je $2^n + 1 = 5^{n-1}$. Za $n = 3$ imamo da je $25 = 5^{n-1} > 2^n + 1 = 9$. Kako se n povećava, lijeva strana nejednakosti se množi sa 5, a desna sa najviše 2, tako da za sve $n \geq 3$ vrijedi $5^{n-1} > 2^n + 1$, pa u ovom slučaju nemamo rješenja.
$3°$ $k = 5^{n-1}$ i $k + 1 = 2^n$. Dobijamo da je $5^{n-1} = 2^n - 1$. U prethodnom slučaju smo već dokazali da je $5^{n-1} > 2^n + 1$ za $n \geq 3$, tako da vrijedi i $5^{n-1} > 2^n - 1$, što znači da ni u ovom slučaju nemamo rješenja.
$4°$ $k = 2^n \cdot 5^{n-1}$ i $k + 1 = 1$. Ovaj slučaj je očigledno nemoguć jer je $1 = k + 1 > k = 2^n \cdot 5^{n-1} > 1$.
Dakle, jedina rješenja su $(n, N) = (1,25)$ i $(n, N) = (2,225)$.

Šema bodovanja:

- zaključak da cifra 5 mora biti zadnja: **0 bodova**
- izražavanje $N = \frac{2 \cdot 10^{n+1} + 25}{3^2}$: **2 boda**
- dobijanje jednačine $2^{n+2} \cdot 5^{n+1} = (M-5)(M+5)$: **1 boda**
- zaključak da je $NZD(k, k+1) = 1$ (analogno da je $NZD(M-5, M+5) = 10$) i ispisivanje mogućih slučajeva: **3 boda**
- rješavanje svih slučajeva: **4 boda (2 boda** se mogu dodijeliti ako se riješe samo 2° ili 3°)

Zadatak 5. Neka su a, b, c, d realni brojevi iz zatvorenog intervala $[0,1]$. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}-\frac{1}{4} \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2,$$

te odrediti sve četvorke (a, b, c, d) za koje vrijedi jednakost.

Rješenje 1:
Množenjem sa 16 i sređivanjem imamo $3(a^2+b^2+c^2+d^2)-4 \leq 2(ab+bc+cd+da+ca+db)$, što možemo zapisati u obliku $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2+(a-d)^2 \leq 4$.
Neka je bez umanjenja opštosti $1 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Dokazat ćemo da je $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2 \leq 1.(*)$ Neka je $x=a-b, y=b-c, z=c-d$. Tada su x, y, z nenegativni realni brojevi za koje vrijedi $x+y+z=a-d \leq 1$. Međutim, kako su x, y, z brojevi između 0 i 1, to je $x^2 \leq x, y^2 \leq y, z^2 \leq z$, pa je $x^2+y^2+z^2 \leq x+y+z \leq 1$, što dokazuje $(*)$ (isti zaključak možemo izvesti i na sljedeći način: $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) \leq 1$). Kako je očigledno $(a-c)^2+(b-d)^2+(a-d)^2 \leq 1+1+1=3$, to uz $(*)$ daje traženu nejednakost. Da bi vrijedila jednakost mora vrijediti $a-c=1, b-d=1, a-d=1$, odnosno $a=b=1, c=d=0$. Provjerom dobijamo da tada zaista vrijedi jednakost. Dakle, sve četvorke za koje vrijedi jednakost su kada imamo dvije jedinice i dvije nule.

Šema bodovanja:
- Svođenje na $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2+(a-d)^2 \leq 4$ – **2 boda**
- Dokaz da je $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2 \leq 1$ – **5 bodova**
- Završetak dokaza – **3 boda** (pri čemu je **2 boda** dokazivanje nejednakosti, a **1 bod** slučaj jednakosti)

Rješenje 2:
Kao u prvom rješenju dobijamo $3(a^2+b^2+c^2+d^2)-4 \leq 2(ab+bc+cd+da+ca+db)$, što možemo zapisati kao $3a^2-2a(b+c+d)+3b^2+3c^2+3d^2-2(bc+cd+db) \leq 4$.
Fiksirajmo varijable b, c, d te primijetimo da je lijeva strana kvadratna funkcija po a. Kako je koeficijent uz a^2 jednak 3 (tj. veći je od 0), ova funkcija maksimum dostiže na nekom od krajeva intervala. Dakle, kada izraz $3a^2-2a(b+c+d)+3b^2+3c^2+3d^2-2(bc+cd+db)$ dostiže svoj maksimum, vrijedi $a=0$ ili $a=1$. Analogno zaključujemo da su ostale varijable jednake 0 ili 1 u slučaju kada izraz dostiže maksimum, pa je dovoljno samo ispitati slučajeve kada su sve varijable iz skupa $\{0,1\}$. Primijetimo da je vrijednost izraza jednaka 0 kada su sve varijable jednake 0 ili sve varijable jednake 1, te da je jednaka 3 kada su tri varijable jednake 1 (a preostala 0) kao i u slučaju kada su tri varijable jednake 0 (a preostala 1). U slučaju kada su dvije varijable jednake 1 i dvije jednake 0, vrijednost izraza je 4. Dakle, maksimum izraza je manji ili jednak 4, te jednakost vrijedi kada su dvije varijable jednake 0, a dvije jednake 1.

Šema bodovanja:
- Posmatranje izraza kao kvadratne funkcije po nekoj varijabli – **2 boda**
- Zaključak da izraz dostiže maksimum kada je ta varijabla jednaka 0 ili 1 – **4 boda**
- Zaključak da i ostale varijable u slučaju kada izraz dostiže maksimum moraju biti 0 ili 1 – **2 boda**
- Provjera mogućih slučajeva i slučaj jednakosti – **2 boda**

Rješenje 3 (rješenje učenice Nedžme Durović):
Kako je $x^2 \leq x$ za $x \in [0,1]$, to je $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$, pa je dovoljno dokazati $\frac{a+b+c+d}{4}-\frac{1}{4} \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$, što je tačno jer je ekvivalentno sa $\left(\frac{a+b+c+d}{4}-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Jednakost vrijedi kad su svi brojevi jednaki 0 ili 1 (zbog $x^2=x$) i kad je $\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{1}{2}$, tj. kad su dva broja jednaka 1, a dva jednaka 0.

III RAZRED

Zadatak 1.

a) Neka je α realan broj takav da vrijedi $\cos\alpha = \frac{1}{4}$. Odrediti vrijednost $\cos 3\alpha$.

b) Neka je $f(x) = \cos x + \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$. Dokazati da za svaki realan broj x vrijedi nejednakost

$$-\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 2,$$

te odrediti sve x za koje vrijedi $f(x) = -\frac{2}{3}$, kao i sve x za koje je $f(x) = 2$.

Rješenje:

a) Kako je $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ i $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, to je

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) &= \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha = \cos\alpha\,(2\cos^2\alpha - 1) - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= 2\cos^3\alpha - cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\ &= 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 3\cdot\frac{1}{4} = -\frac{11}{16}.\end{aligned}$$

b) Iz dokazanog pod a), te uz smjenu $t = \cos x$ (pri čemu $t \in [-1,1]$) imamo da je

$$\begin{aligned}f(x) = \cos x + \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x &= \cos x + \frac{2}{3}(2\cos^2 x - 1) + \frac{1}{3}(4\cos^3 x - 3\cos x) \\ &= \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Sada se nejednakost $-\frac{2}{3} \leq f(x)$ svodi na $\frac{4}{3}t^2(t+1) \geq 0$, što je tačno zbog $t^2 \geq 0$ i $t \geq -1$. Jednakost vrijedi za $\cos x = 0$ ili $\cos x = -1$, tj. $x \in \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{(2k+1)\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Nejednakost $f(x) \leq 2$ se svodi na $\frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{3}t^2 \leq 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, što se može zapisati kao $\frac{4}{3}(t-1)(t^2 + 2t + 2) \leq 0$, tj. kao $\frac{4}{3}(t-1)((t+1)^2 + 1) \leq 0$, što je tačno jer je prva zagrada nepozitivna, a druga pozitivna. Jednakost vrijedi za $t = 1$, tj. za $\cos x = 1$, pa $x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Šema bodovanja:

- Dio pod a) nosi **2 boda**
- Dio pod b) nosi **8 bodova**, i to:
  - **2 boda** za izražavanje $f(x)$ preko jedne varijable (za ove bodove nije nužno uvesti smjenu, dovoljno je da sve bude izraženo preko $\cos x$)
  - **1 bod** za dokazivanje nejednakosti $-\frac{2}{3} \leq f(x)$, te **1 bod** za slučaj jednakosti
  - **3 boda** za dokazivanje nejednakosti $f(x) \leq 2$, te **1 bod** za slučaj jednakosti

Zadatak 2. Odrediti sve parove (a,b) realnih brojeva takvih da sistem jednačina

$$x+y=a-1,$$
$$x(y+1)-z^2=b$$

ima jedinstveno rješenje u skupu realnih brojeva.

Rješenje 1:

Ako bismo imali rješenje (x,y,z) u kojem je $z\neq 0$, tada bi i $(x,y,-z)$ bilo rješenje sistema koje je različito od rješenja (x,y,z), što je kontradikcija sa jedinstvenošću rješenja. Dakle, smijemo samo imati rješenje u kojem je $z=0$. Primijetimo da uz smjenu $y+1=t$ brojevi x i t moraju zadovoljavati

$$x+t=a,$$
$$xt=b.$$

Ako bismo imali rješenje (x,t) u kojem je $x\neq t$, tada bi (t,x) također bilo rješenje sistema, što je opet kontradikcija sa jedinstvenošću. Dakle, mora vrijediti $x=t$, odakle je $b=\frac{a^2}{4}$. Dokažimo sada da zaista za sve parove (a,b) u kojima je $b=\frac{a^2}{4}$ sistem ima jedinstveno rješenje.

Jasno je da je (x,y,z) rješenje sistema

$$x+y=a-1,$$
$$x(y+1)-z^2=\frac{a^2}{4}$$

ako i samo ako je (x,t,z) rješenje sistema

$$x+t=a,$$
$$xt-z^2=\frac{a^2}{4}.$$

Ovaj sistem očigledno ima rješenje $x=t=\frac{a}{2}, z=0$. Da bi naš sistem imao rješenje u skupu realnih brojeva, jasno je da mora da vrijedi $xt\geq\frac{a^2}{4}$, tj. $4xt\geq a^2=(x+t)^2$, što se svodi na $(x-t)^2\leq 0$, što vrijedi samo za $x=t$. Onda mora vrijediti $x=t=\frac{a}{2}$ i $z=0$, pa je to jedinstveno rješenje sistema.

Šema bodovanja:

- Zaključak da u jedinstvenom rješenju mora vrijediti $z=0$ – **2 boda**
- Zaključak da u jedinstvenom rješenju mora vrijediti $x=t\ (=y+1)$ – **3 boda**
- Zaključak da brojevi a i b moraju zadovoljavati $b=\frac{a^2}{4}$ – **1 bod**
- Dokaz da sistem ima jedinstveno rješenje za $b=\frac{a^2}{4}$ – **4 boda**

Rješenje 2 (pristup kakav je imala većina učenika):

Sistem ima jedinstveno rješenje ako i samo ako jednačina (po x i z) $x(a-x)-z^2=b$ ima jedinstveno rješenje (jer je y jedinstveno određeno relacijom $y=a-1-x$). Diskriminanta ove kvadratne jednačine po x je $D=a^2-4(b+z^2)$, te ona mora biti jednaka nuli da bi rješenje bilo jedinstveno, tj. mora vrijediti $z^2=\frac{a^2}{4}-b$. Da bi postojalo jedinstveno z koje ovo zadovoljava, mora vrijediti $\frac{a^2}{4}=b$ (mogli smo odmah i u početnoj jednačini reći da mora vrijediti $z=0$ u jedinstvenom rješenju). Za $\frac{a^2}{4}=b$, diskriminanta je jednaka $-4z^2$, pa će jednačina (po x) imati rješenje samo za $z=0$, te će to rješenje biti jedinstveno (jer je $D=0$) i jednako $\frac{a}{2}$. (ekvivalentno, u slučaju $\frac{a^2}{4}=b$ jednačinu možemo zapisati u obliku $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+z^2=0$, što očigledno ima jedinstveno rješenje $x=\frac{a}{2}$ i $z=0$)

Zadatak 3. Na krugu je raspoređeno 999 prirodnih brojeva tako da za svaka dva susjedna broja na krugu vrijedi da je apsolutna vrijednost njihove razlike jednaka njihovom najvećem zajedničkom djeliocu. Odrediti najveći prirodan broj N takav da sa sigurnošću možemo tvrditi da je proizvod brojeva na krugu djeljiv sa N.
Napomena: Brojevi na krugu se smiju ponavljati.

Rješenje:
Primijetimo da ako su na krugu redom poredani brojevi $4,3,2,1,2,1,2,1,2,1,\dots,2,1,2,1,2$, oni zadovoljavaju uslove zadatka, a njihov proizvod je $2^{499} \cdot 3 \cdot 4 = 2^{501} \cdot 3$. Dakle, $N \leq 2^{501} \cdot 3$.
Najprije primijetimo da na krugu ne mogu biti dva susjedna neparna broja, jer je njihova razlika paran broj, pa im to ne može biti najveći zajednički djelilac. Zbog toga na krugu može biti maksimalno 499 neparnih brojeva, pa mora biti bar 500 parnih.
Na osnovu prethodno rečenog, na krugu moraju biti dva susjedna parna broja. Ako niti jedan od njih nije djeljiv sa 4, onda oba ta broja daju ostatak 2 pri dijeljenju sa 4, pa je njihova razlika (što je u ovom slučaju i njihov najveći zajednički djelilac) djeljiva sa 4, što je očigledno nemoguće. Dakle, na tabli postoji broj djeljiv sa 4.
Dokažimo još da na tabli mora postojati broj djeljiv sa 3. Pretpostavimo suprotno. Tada svi brojevi na tabli daju ostatak 1 ili 2 pri dijeljenju sa 3. Primijetimo da ne možemo imati dva susjedna broja koja daju isti ostatak, jer bi onda njihova razlika bila djeljiva sa 3, što nije moguće jer oni nisu djeljivi sa 3. To znači da se ostaci 1 i 2 naizmjenično ponavljaju na krugu. Međutim, to nije moguće jer je na krugu neparan broj (999) brojeva. Dakle, na krugu se mora nalaziti broj djeljiv sa 3.
Dakle, na krugu se nalazi bar 500 parnih brojeva od kojih je bar jedan djeljiv sa 4, pa je proizvod djeljiv sa $2^{499} \cdot 4 = 2^{501}$. Kako je na krugu i broj djeljiv sa 3, to je proizvod djeljiv sa $2^{501} \cdot 3$. Dakle, $N = 2^{501} \cdot 3$.

Šema bodovanja:
- Konstrukcija koja dokazuje da je $N \leq 2^{501} \cdot 3$ – **2 boda** (može biti i više konstrukcija, pa da učenik gleda najveći zajednički djelilac proizvoda brojeva u tim konstrukcijama; Također, ukoliko učenik nema gornju konstrukciju, ali ima konstrukciju koja može biti korisna, npr. koja daje odgovarajući broj dvica, može dobiti 1 od ova 2 boda)
- Dokaz da je $N \geq 2^{501} \cdot 3$ nosi **7 bodova**, i to:
  - Dokaz da na krugu mora biti bar 500 parnih brojeva – **2 boda** (ukoliko učenik samo dokaže da ne mogu biti dva susjedna neparna broja na krugu, dobija 1 od ova 2 boda)
  - Dokaz da na krugu postoje dva susjedna parna broja te da je bar jedan od njih djeljiv sa 4 – **2 boda**
  - Dokaz da na krugu postoji broj djeljiv sa 3 – **3 boda**
  - Zaključak da je $N \geq 2^{501} \cdot 3$ – **1 bod**

Zadatak 4. Na pravoj p su date dvije različite tačke M i N. Kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 sa centrima O_1, O_2, O_3, O_4 redom, dodiruju pravu p tako da se k_1 i k_2 dodiruju izvana u M, a k_3 i k_4 se dodiruju izvana u N, te su k_1 i k_3 sa iste strane prave p (a k_2 i k_4 sa druge strane prave p). Ako postoji kružnica k takva da sve kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 dodiruju kružnicu k iznutra, dokazati da se prave O_1O_3, O_2O_4 i p sijeku u jednoj tački ili su paralelne.

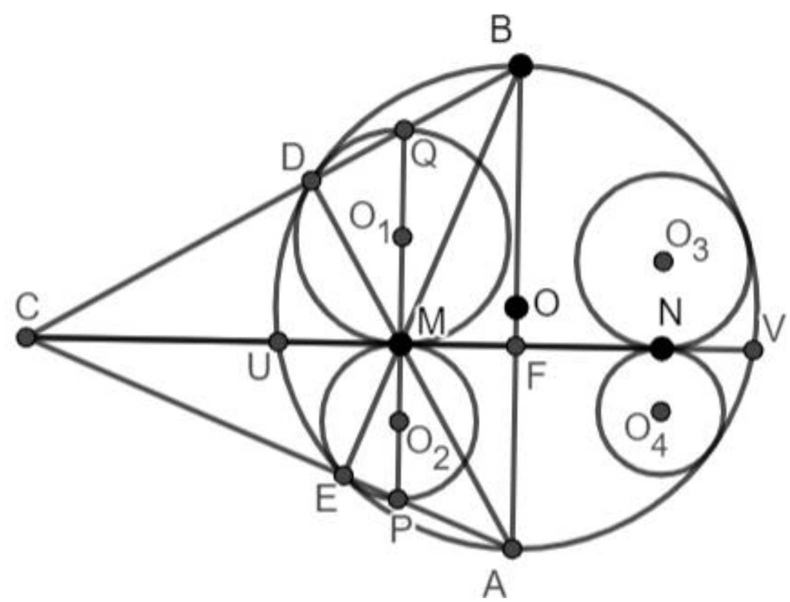
Rješenje 1:

Primijetimo najprije da je dovoljno dokazati $\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4}$. Naime, ako su prethodni odnosi jednaki 1, prave O_1O_3 i O_2O_4 su paralelne sa p. Ako su ovi odnosi manji od 1, te ako O_1O_3 siječe p u G, a O_2O_4 siječe p u G', tada su i G i G' sa iste strane tačke M u odnosu na N te iz Talesove teoreme vrijedi $\frac{GM}{GN} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4} = \frac{G'M}{G'N}$, odnosno $\frac{MN}{GN} = 1 - \frac{GM}{GN} = 1 - \frac{G'M}{G'N} = \frac{MN}{G'N}$, odakle je $GN = G'N$, tj. $G \equiv G'$. Slično vrijedi i ako je gornji odnos veći od 1.

Dakle, dovoljno je dokazati da je $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}$. Dokazat ćemo da je ovaj odnos fiksan pod uslovom da je kružnica k fiksna i da je prava p fiksna (ako fiksiramo k i p, onda su za svaku tačku M koja je na pravoj p, a unutar kružnice k jedinstveno određeni k_1 i k_2).

Neka k_1 i k_2 dodiruju k u D i E, redom. Primijetimo da homotetija sa centrom u D koja slika k_1 u k slika pravu p u njoj paralelnu pravu koja je tangenta kružnice k. Ta tangenta prolazi kroz sredinu A luka UV (onu sredinu luka koja je sa iste strane p kao i k_2). Dakle, tačke D, M, A su kolinearne. Slično, ako je B sredina drugog luka UV (onog koji je sa suprotne strane p u odnosu na k_2), tačke E, M, B su kolinearne. Jasno je da je AB prečnik kružnice k te da je AB okomito na p. Neka se AE i BD sijeku u C. Kako je $\angle ADB = \angle AEB = 90°$, to je $M = AD \cap BE$ ortocentar trougla ABC. Dakle, CM je okomito na AB, pa $C \in p$.

Sada ćemo na dva načina dokazati da je $\frac{r_1}{r_2} = \frac{BF}{AF}$, gdje je $F = p \cap AB$. Potpuno analogno se dokaže da je i $\frac{r_3}{r_4} = \frac{BF}{AF}$, odakle slijedi tvrdnja zadatka.



I način:

Neka prava O_1O_2 siječe AC i BC u tačkama P i Q, redom. Kako je $\angle MDQ = \angle ADB = 90°$, to $Q \in k_1$ i MQ je prečnik k_1 (do istog zaključka smo mogli doći zaključuući da je zbog $MQ||AB$ tačka Q ustvari slika od B pri homotetiji sa centrom u D koja slika k u k_1). Analogno, $P \in k_2$. Sada je $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2r_1}{2r_2} = \frac{QM}{MP} = \frac{\frac{QM}{MC}}{\frac{MP}{MC}} = \frac{\frac{BF}{CF}}{\frac{AF}{CF}} = \frac{BF}{AF}$.

Napomena: Vrlo slično ovom načinu, može se zaključiti da se simetrale duži MD i ME sijeku na p (to je ustvari sredina MC). Ove simetrale prolaze kroz O_1 i O_2 te polove BM i AM, pa se slično kao ranije dokaže $\frac{r_1}{r_2} = \frac{BF}{AF}$ (ovaj način je ustvari isti kao i gornji nakon što se primijeni homotetija sa centrom u M i koeficijentom $\frac{1}{2}$).

II način:

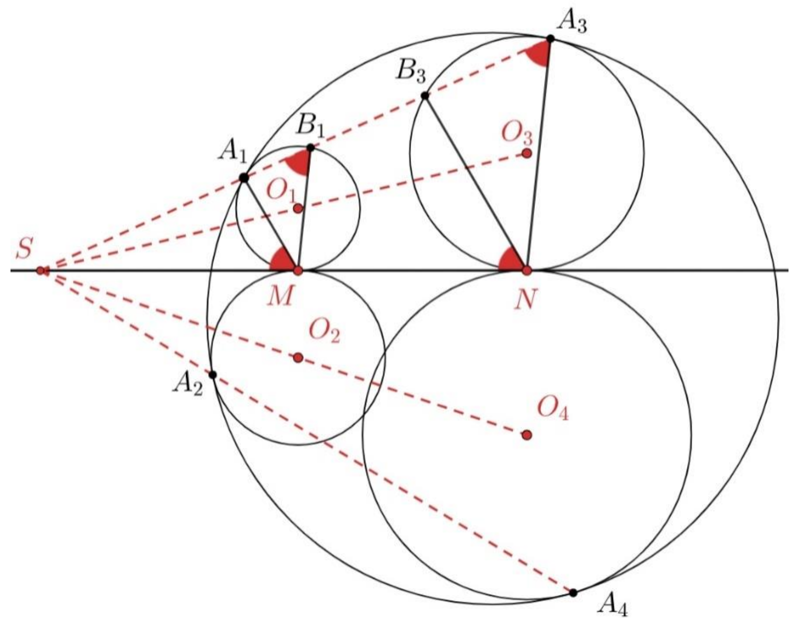
Primijetimo da je $\frac{r_1}{R} = \frac{DM}{DA}$ (R je poluprečnik kružnice k), jer je to ustvari koeficijent homotetije u D koja slika k_1 u k. Slično je $\frac{r_2}{R} = \frac{EM}{EB}$, pa koristeći $AD \cdot BC = 2P_{ABC} = BE \cdot AC$ dobijamo $\frac{r_1}{r_2} = \frac{DM \cdot EB}{EM \cdot DA} = \frac{DM \cdot BC}{EM \cdot AC} = \frac{P_{CMB}}{P_{CAM}} = \frac{CM \cdot BF}{CM \cdot AF} = \frac{BF}{AF}$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da je dovoljno dokazati $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}$ – **1 bod**
- Uvođenje tačaka A i B te dokaz kolinearnosti $A - M - D$ i $B - M - E$ – **2 boda**
- Zaključak da se BD i AE sijeku na p – **2 boda**
- Dokaz da je $\frac{r_1}{r_2} = \frac{BF}{AF}$ – **4 boda**
- Zaključak da analogno vrijedi $\frac{r_3}{r_4} = \frac{BF}{AF}$ i da je zbog toga dokaz gotov – **1 bod** (ovaj bod učenik može i ranije osvojiti ako kaže da je dovoljno dokazati da odnos $\frac{r_1}{r_2}$ zavisi samo od prave p i kružnice k, ali ne i od odabira tačke M)

Rješenje 2 (Ervin Macić, član komisije, rješenje koristi Monge teoremu)

Neka kružnica k_i dodiruje kružnicu k u tački $A_i, i = 1,2,3,4.$ Dokažimo da se prave A_1A_3, O_1O_3, MN sijeku u jednoj tački (analogno je i za prave A_2A_4, O_2O_4, MN). Zatim ćemo dokazati da se A_1A_3, MN, A_2A_4 također sijeku, odakle jasno slijedi da se i O_1O_3, MN, O_2O_4 također sijeku u jednoj tački, što je trebalo dokazati.



Posmatrajmo kružnice k_1, k_3, k koje su kružnice sa centrima O_1, O_3, O redom gdje je O centar kružnice k. Prema Monge teoremu, vrijedi da vanjski centri homotetije (eksimilicentri) kružnica po parovima $(k_1, k_3), (k_1, k), (k_3, k)$, odnosno tačke $S = O_1O_3 \cap MN, A_1, A_3$ redom leže na istoj pravoj. Ovim smo dokazali da da se prave A_1A_3, O_1O_3, MN sijeku u jednoj tački.

Posmatrajmo četverougao A_1A_3NM. Jasno je da zbog homotetije koja slika k_1 u k_3 iz tačke S vrijedi $\angle SMA_1 = \angle SNB_3$ gdje je B_3 presjek prave SA_3 sa k_3. Iz teoreme o uglu između tangente i tetive (TT) vrijedi $\angle SNB_3 = \angle SA_3N$, odakle slijedi da je ovaj četverougao tetivan. Analogno dobijamo da je A_2A_4NM tetivan. Primijetimo da su sada pravci A_1A_3, MN, A_2A_4 radikalne osi kružnica $A_1A_3NM, A_2A_4NM, A_1A_2A_3A_4$ odakle slijedi da se sijeku u jednoj tački.

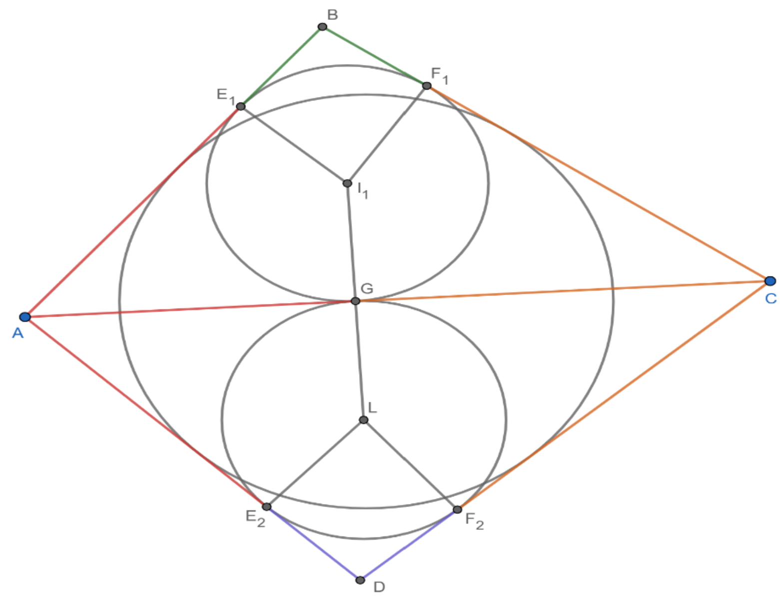
Kombiniranjem prvog i drugog tvrđenja jasno je da se i O_1O_3, MN, O_2O_4 sijeku u jednoj tački.

Rješenje 3 (dovršeno rješenje učenice Naide Gavranović)

I u ovom rješenju ćemo dokazati da vrijedi $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}$. Prvo ćemo dokazati lemu koju ćemo koristiti u dokazu (ova lema je prilično poznata):

Lema: U tangentnom četverouglu $ABCD$, upisane kružnice trouglova ΔABC i ΔACD se dodiruju.

Dokaz:



Neka su G_1, F_1 i E_1 tačke dodira upisane kružnice ΔABC sa stranicama AC, BC i AB, redom. Slično, neka su G_2, F_2 i E_2 tačke dodira upisane kružnice ΔACD sa stranicama AC, CD i AD, redom.

Neka je $DE_2 = DF_2 = t_2$, $CF_2 = CG_2 = l_2, AG_2 = AE_2 = h_2, AE_1 = AG_1 = h_1, BE_1 = BF_1 = t_1, CG_1 = CF_1 = l_1$.

Zbog činjenice da je četverougao $ABCD$ tangentan vrijedi da su mu sume naspramnih stranica jednake, tj. $AD + BC = AB + CD$ iz čega zaključujemo da je $t_1 + h_1 + t_2 + l_2 = t_1 + h_2 + t_2 + l_1$

$\Rightarrow h_1 + l_2 = h_2 + l_1 \ \Rightarrow h_1 - h_2 = l_1 - l_2$.

Međutim, kako je $l_1 + h_1 = AC = l_2 + h_2$, zaključujemo (sabiranjem npr.) da vrijedi $l_1 = l_2$ i $h_1 = h_2$, pa smo time dokazali da je $AG_1 = AG_2 \ i \ CG_1 = CG_2$ što je ekvivalentno s tvrdnjom da upisne kružnice trouglova $\Delta ABC \ i \ \Delta ACD$ dodiruju duž AC u istoj tački, pa se i same dodiruju.

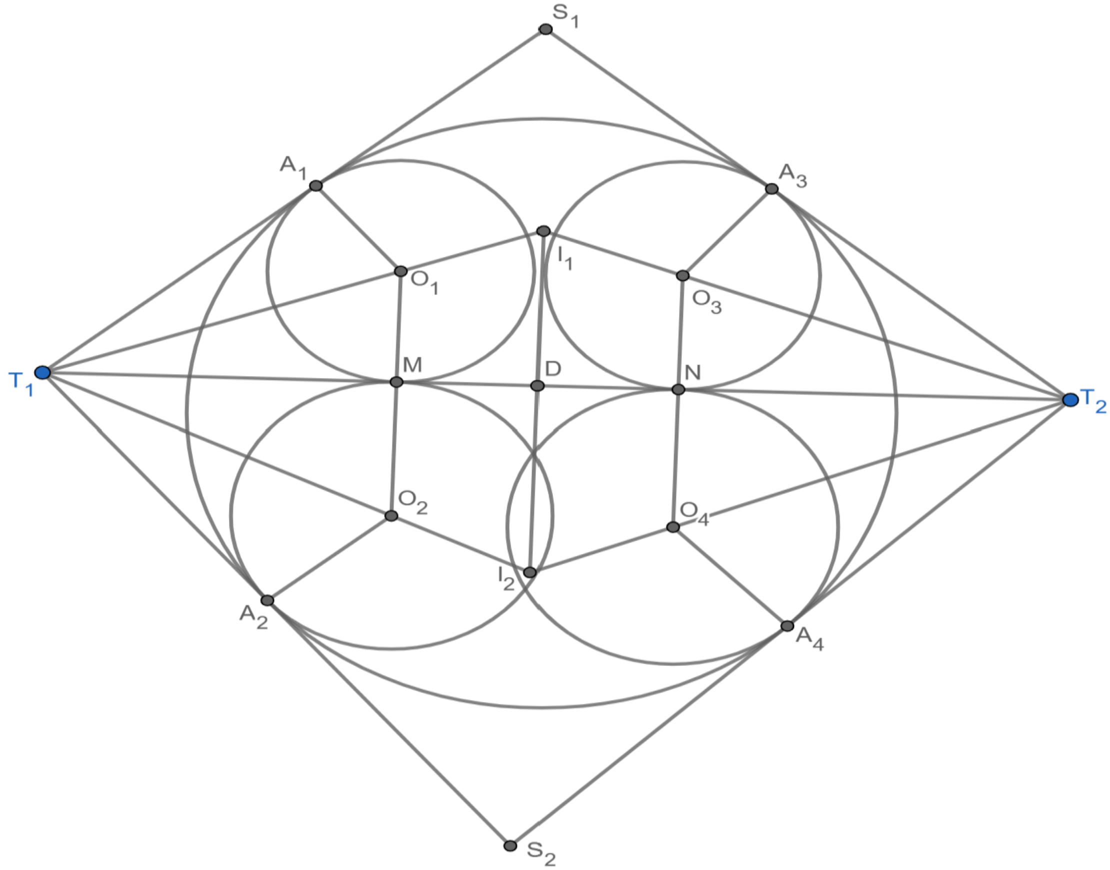
Komentar: Poznato je da je $AG_1 = \frac{AB+AC-BC}{2}, AG_2 = \frac{AD+AC-CD}{2}$, pa se korištenjem $AD + BC = AB + CD$ dobija $AG_1 = AG_2$, odakle slijedi tvrdnja.

Neka su tačke dodira kružnice k sa kružnicama $k_1, k_2, k_3 \ i \ k_4$ redom tačke $A_1, A_2, A_3 \ i \ A_4$. Za dvije kružnice koje se dodiruju, njihova radikalna osa jeste njihova zajednička tangenta u tački dodira. Iz ovoga znamo da je MN radikalna os za kružnice $k_1 \ i \ k_2$, te za kružnice $k_3 \ i \ k_4$. Sada ćemo uvesti tangente na kružnicu k u tačkama $A_1, A_2, A_3 \ i \ A_4$. Ove tangente će biti radikalne osi kružnice k sa kružnicama $k_1, k_2, k_3 \ i \ k_4$ redom. Kako se za svake tri kružnice njihove radikalne osi sijeku u jednoj tački koja je radikalni centar za te tri kružnice, to se tangente na kružnicu k u tačkama $A_1 \ i \ A_2$ sijeku na MN i ovu tačku možemo označiti sa T_1. Analogno označimo T_2 za tangente na kružnicu k u tačkama $A_3 \ i \ A_4$. Ako uvedemo i $T_1A_1 \cap T_2A_3 = S_1$ i $T_1A_2 \cap T_2A_4 = S_2$ dobijemo tangentni četverougao $T_1S_1T_2S_2$ kojem je upisana kružnica k.

Pošto su $T_1M \ i \ T_1A_1$ tangente na kružnicu k_1, pa onda vrijedi da je T_1O_1 simetrala ugla $\angle MT_1A_1$. Analogno dobijemo da je T_2O_3 simetrala ugla $\angle NT_2A_3$, T_1O_2 simetrala ugla $\angle MT_2A_2$ i T_2O_4 simetrala ugla $\angle NT_2A_4$. Ako uvedemo presjek $T_1O_1 \cap T_2O_3 = I_1$ dobijemo centar upisane kružnice za trougao $\Delta T_1S_1T_2$, te ako uvedemo presjek $T_1O_2 \cap T_2O_4 = I_2$ dobijemo centar upisane kružnice za trougao $\Delta T_1S_2T_2$.

Zbog dokazane leme upisane kružnice $\Delta T_1S_1T_2$ i $\Delta T_1S_2T_2$ dodiruju MN u istoj tački koju ćemo označiti sa D.

Sada sa $r_1, r_2, r_3,\ r_4, R_1\, i\ R_2$ redom označimo poluprečnike kružnica $k_1, k_2, k_3\ i\ k_4$, te poluprečnike upisanih kružnica za trouglove $\Delta T_1S_1T_2$ i $\Delta T_1S_2T_2$.



Iz činjenice da O_1 leži na I_1T_1, te da su $D\ i\ M$ dodiri tangente iz T_1 na k_1, zaključujemo da su trouglovi ΔT_1I_1D i ΔT_1O_1M homotetični. Zbog homotetije vrijedit će odnos $\frac{r_1}{R_1} = \frac{T_1M}{T_1D}$. $(\star)$

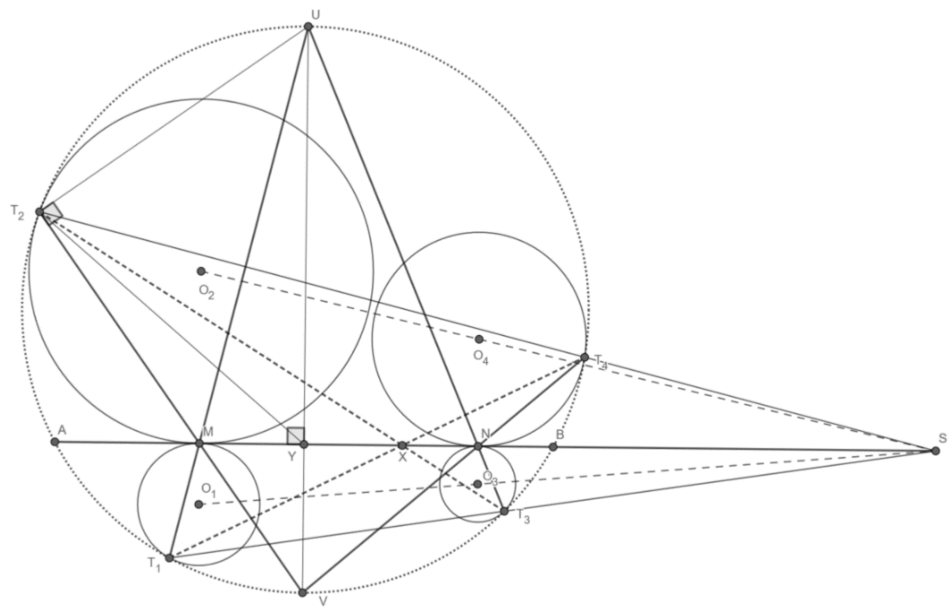
Na sličan način zaključit ćemo da su homotetni sljedeći parovi trouglova: ΔT_2I_1D i ΔT_2O_3N, ΔT_1I_2D i ΔT_1O_2M, te ΔT_2I_2D i ΔT_2O_4N. Iz ovih homotetija vrijedit će sljedeći odnosi: $\frac{r_3}{R_1} = \frac{T_2N}{T_2D}$ $(\star\star)$, $\frac{r_2}{R_2} = \frac{T_1M}{T_1D}$ $(\star\star\star)$ i $\frac{r_4}{R_2} = \frac{T_2N}{T_2D}$ $(\star\star\star\star)$.

Dijeljenjem $(\star)$ i $(\star\star)$ dobijamo da vrijedi $\frac{r_1}{r_3} = \frac{T_1M \cdot T_2D}{T_1D \cdot T_2N}$.

Dijeljenjem $(\star\star\star)$ i $(\star\star\star\star)$ dobijamo da vrijedi $\frac{r_2}{r_4} = \frac{T_1M \cdot T_2D}{T_1D \cdot T_2N}$.

Iz prethodne dvije relacije zaključujemo da je $\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4}$, pa možemo završiti kao u prethodnim rješenjima.

Rješenje 4 (rješenje učenika Haruna Alibegovića, rješenje koristi inverziju i Paskalovu teoremu):
Neka je T_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ presjek kružnice k_i sa k. Sa A, B označavamo presjeke p i k, a V je sredina luka AT_1B, dok je U sredina luka AT_2B. Sa Y označimo presjek pravih AB i UV.
Homotetijom sa centrom u T_1 koja šalje k_1 u k, M se slika u dodir tangente na k paralelne s AB i kružnice k, što je zapravo tačka U. Zbog toga su U, M, T_1 kolinearne. Analogno dobijamo da su U, N, T_3; V, M, T_2 i V, N, T_4 kolinearne.
Primjenom Paskalove teoreme na tetivni šestougao $T_1T_4VT_2T_3U$ dobijamo da se prave T_1T_4 i T_2T_3 sijeku na pravoj MN. Nazovimo tu tačku X.



Kako je UV prečnik k, i UV ⊥ AB to je $\angle MT_2U = \angle MYU = 90°$ pa je četverougao MT_2YU tetivan.
Primjetimo $\angle XT_4T_2 = \angle T_1T_4T_2 = \angle T_1UT_2 = \angle T_2UM = \angle T_2YM = 180 - \angle XYT_2$(pri čemu jednakosti dobijamo iz tetivnog MT_2YU i $T_2UT_4T_1$) pa je četverougao T_2T_4XY tetivan. Analogno je i T_1T_3XY tetivan.
No, primjenjujući obrnutu inverziju s centrom u X i prečnikom $\sqrt{XA * XB}$ znamo da se T_2 slika u T_3, a T_4 u T_1, zbog potencije tačke X na k. Samim tim se kružnica T_2T_4XY slika u pravu T_1T_3, a analogno kružnica T_1T_3XY u pravu T_2T_4. Slika Y je presjek ove dvije prave, ali on mora ležati na slici MN, što je sama prava MN.
Neka je to tačka S. Sada primjenjujući inverziju u S s prečnikom $\sqrt{SA * SB}$, T_1 se slika u T_3 zbog potencije S na K. Pošto se A slika u B, M se slika u tačku između A i B, pa se k_1 slika u kružnicu koja dodiruje pravu AB i iznutra dodiruje k u tački T_3 što mora biti kružnica k_3.
No poznato je da su centri inverznih kružnica kolinearni s centrom inverzije, pa O_1O_2 prolazi kroz S.
Analogno O_2O_4 prolazi kroz S, pa je tvrdnja zadatka dokazana.

Zadatak 5. Neka je p prost broj i neka je $S = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$. Odrediti broj podskupova skupa S čiji je zbir elemenata djeljiv sa p.

Rješenje 1:

Skup nazivamo *dobrim* ukoliko je suma njegovih elemenata djeljiva s p. Također, sa $s(X)$ označavamo sumu elemenata skupa X.

Definišimo skup $T = S \cup \{p\}$. Primijetimo da za svaki dobar podskup A skupa S imamo dva dobra podskupa skupa T – to su A i $A \cup \{p\}$. Izbrojat ćemo broj dobrih podskupova skupa T, a broj dobrih podskupova skupa S će biti jednak njegovoj polovini.

Za dva podskupa A i B skupa T kažemo da su *prijatelji* ako imaju istu kardinalnost, te ako njihove elemente možemo označiti sa $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ i $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ tako da postoji broj $m \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ takav da za sve $i = 1, 2, \dots, k$ vrijedi $b_i = a_i + m \ (mod\ p)$.

Neka je $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ proizvoljan podskup skupa T. Svi njegovi prijatelji su $A_t = \{a + t | a \in A\}$ za $t = 1, 2, \dots, p-1$, pri čemu podrazumijevamo da se sabiranje vrši po modulu p. Dakle, svaki podskup ima tačno $p-1$ prijatelja. Također, iz definicije prijateljstva slijedi da, ako dva skupa $A, B \subseteq T$ imaju zajedničkog prijatelja C, tada su i A i B prijatelji. To znači da podskupove skupa T, ne računajući $\emptyset$ i T, možemo podijeliti na disjunktne klase od po p podskupova koji su međusobno prijatelji.

Ako $k \notin \{0, p\}$, skupovi $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$ su po parovima različiti, te vrijedi $s(A_t) = s(A_0) + t \cdot k \ (mod\ p)$. Imamo

$$\begin{aligned} &s(A_i) \equiv s(A_j) \ (mod\ p) \Leftrightarrow \\ &s(A_0) + i \cdot k \equiv s(A_0) + j \cdot k \ (mod\ p) \Leftrightarrow \\ &(i-j) \cdot k \equiv 0 \ (mod\ p), \end{aligned}$$

a kako je $0 \leq i, j \leq p-1$, posljednja relacija može vrijediti ako i samo ako je $i = j$. Dakle, brojevi $s(A_0), s(A_1), \dots s(A_{p-1})$ čine potpun sistem ostataka po modulu p. To znači da je tačno jedan od skupova $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ dobar.

Iz predhodnog zaključujemo da sve podskupove skupa T, osim $\emptyset$ i T, možemo podijeliti na disjunktne klase od po p podskupova tako da je u svakoj klasi tačno jedan podskup dobar. Zato je broj nepraznih dobrih podskupova osim T jednak $\frac{2^p-2}{p}$, pa je broj nepraznih dobrih podskupova skupa S (osim S) jednak polovini ovog broja, tj. $\frac{2^{p-1}-1}{p}$. Kako je i skup S dobar, traženi broj podskupova skupa S je $\frac{2^{p-1}-1}{p} + 1$.

Šema bodovanja:

- Svođenje problema na prebrojavanje dobrih podskupova skupa $T = S \cup \{p\}$: **1 bod**
- Posmatranje relacije prijateljstva iz rješenja: **2 boda**
- Dokaz da podskupove od T možemo podijeliti na klase od p elemenata, pri čemu je u svakoj klasi tačno jedan element dobar: **6 bodova**
- Privođenje dokaza kraju: **1 bod**

Rješenje 2 (metod generatorskih funkcija):
Dobar skup definišemo kao u rješenju I.
Posmatrajmo polinom $f(x) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \dots (1 + x^{p-1})$. Neka je on u izmnoženom obliku jednak

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{\frac{p(p-1)}{2}} x^{\frac{p(p-1)}{2}}.$$

Prilikom množenja njegovih faktora član x^k dobijamo kad god odaberemo članove $x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^{j_t}$ takve da je $j_1 + j_2 + \cdots + j_t = k$, a iz ostalih zagrada odaberemo 1. To znači da je koeficijent c_k jednak broju načina da odaberemo različite brojeve $j_1, j_2, \dots, j_t \in S$ takve da im je suma jednaka k, tj. to je broj podskupova skupa S čija je suma jednaka k. Zaključujemo, broj dobrih podskupova skupa S je jednak $N = c_p + c_{2p} + \cdots + c_{\frac{p(p-1)}{2}}$.
Neka je ω primitivni korijen jedinice reda p. Kako je p prost broj, to su $\omega^2, \omega^3, \dots \omega^{p-1}$ također primitivni korijeni jedinice reda p. Imamo $1 + \omega^j + \omega^{2j} + \cdots + \omega^{(p-1)j} = \frac{\omega^{pj}-1}{\omega-1} = 0$ ako $p \nmid j$, a $1 + \omega^j + \omega^{2j} + \cdots + \omega^{(p-1)j} = p$ ako $p \mid j$. Zbog toga posmatrajmo sumu $A = f(1) + f(\omega) + f(\omega^2) + \cdots + f(\omega^{p-1})$ (jer će tako nestati svi c_i za koje $p \nmid i$). Imam

$$A = \sum_{i=j}^{\frac{p(p-1)}{2}} c_i(1 + \omega^j + \omega^{2j} + \cdots + \omega^{(p-1)j}) = p \cdot \left(c_0 + c_p + c_{2p} + \cdots + c_{\frac{p(p-1)}{2}}\right) = p \cdot (c_0 + N)$$
$$= p \cdot (1 + N),$$

To znači da je $N = \frac{A}{p} - 1$.
Posmatrajmo polinom $g(x) = (x - 1)^p - 1$. Pošto je p prost broj, za proizvoljno $j \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$ vrijedi da brojevi $\omega^0, \omega^j, \omega^{2j}, \dots, \omega^{(p-1)j}$ čine skup svih korijena jedinice reda p. Zato brojevi $1 + \omega^0, 1 + \omega^j, \dots, 1 + \omega^{(p-1)j}$ predstavljaju p različitih nula polinoma g. Kako je on stepena p, to su sve njegove nule. Uzimajući u obzir da je stepen polinoma g neparan, iz Vieteovih formula dobijamo da je proizvod njegovih nula jednak $-g(0)$ (jer je vodeći koeficijent jednak 1), odnosno vrijedi

$$(1 + \omega^0)(1 + \omega^j) \dots (1 + \omega^{(p-1)j}) = 2 \Leftrightarrow$$
$$(1 + \omega^j)(1 + \omega^{2j}) \dots (1 + \omega^{(p-1)j}) = 1 \Leftrightarrow$$
$$f(\omega^j) = 1.$$

Kako je $f(1) = 2^{p-1}$, to je $A = 2^{p-1} + p - 1$, pa je $N = \frac{1}{p}(2^{p-1} + p - 1) = \frac{2^{p-1}-1}{p} + 1$.

IV RAZRED

Zadatak 1. Neka je $a \neq 1$ pozitivan realan broj. Funkcije $f, g, h_1, h_2, h_3, \ldots$ definisane su sa

$$f(x) = a^{ax}, \qquad g(x) = \frac{\log_3 x - \log_9 a^2}{\log_3 a}, \qquad h_1(x) = g\big(f(x)\big), \qquad h_n(x) = h_1\big(h_{n-1}(x)\big)$$

pri čemu posljednja relacija vrijedi za sve prirodne brojeve $n \geq 2$.

c) Ako je $a = 10$, odrediti zbir cifara broja $h_{1000}(1)$.

d) Odrediti sve vrijednosti broja a za koje je $h_{2024}(2024) = 2024$.

Rješenje:

Imamo

$$g(x) = \frac{\log_3 x - \log_9 a^2}{\log_3 a} = \frac{\log_3 x - \log_{3^2} a^2}{\log_3 a} = \frac{\log_3 x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_3 a}{\log_3 a} = \frac{\log_3 x - \log_3 a}{\log_3 a} = \frac{\log_3 \left(\frac{x}{a}\right)}{\log_3 a} = \log_a \left(\frac{x}{a}\right),$$

pa je

$$h_1(x) = g\big(f(x)\big) = \log_a \left(\frac{a^{ax}}{a}\right) = \log_a a^{ax-1} = ax - 1.$$

Dokažimo matematičkom indukcijom po n da vrijedi $h_n(x) = a^n x - (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi, što predstavlja bazu indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n - 1$, tj. da je $h_{n-1}(x) = a^{n-1}x - (a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + a + 1)$. Imamo

$$\begin{aligned} h_n(x) = h_1\big(h_{n-1}(x)\big) &= a \cdot h_{n-1}(x) - 1 = a \cdot \big(a^{n-1}x - (a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + a + 1)\big) - 1 \\ &= a^n x - a \cdot (a^{n-2} + a^{n-3} + \cdots + a + 1) - 1 = a^n x - (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1), \end{aligned}$$

pa tvrdnja vrijedi i za n. Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Iz formule za zbir geometrijskog niza dobijamo

$$h_n(x) = a^n x - \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

a) Ako je $a = 10$, tada je

$$h_{1000}(1) = 10^{1000} - \frac{10^{1000} - 1}{10 - 1} = 100\ldots00 - 111\ldots11,$$

gdje prvi broj ima 1000 nula, a drugi 1000 jedinica. Posljednji broj je zato jednak $888\ldots889$, gdje ima 999 cifara 8. Zato je njegov zbir cifara jednak $999 \cdot 8 + 9 = 8001$.

b) Imamo

$$\begin{aligned} &h_{2024}(2024) = 2024 \Leftrightarrow \\ &a^{2024} \cdot 2024 - \frac{a^{2024} - 1}{a - 1} = 2024 \Leftrightarrow \\ &2024(a^{2024} - 1) - \frac{a^{2024} - 1}{a - 1} = 0 \Leftrightarrow \\ &(a^{2024} - 1)\left(2024 - \frac{1}{a - 1}\right) = 0. \end{aligned}$$

Kako je $a \neq 1$, to je $a^{2024} - 1 \neq 0$, pa mora biti $2024 - \frac{1}{a-1} = 0$, odakle dobijamo $a = \frac{2025}{2024}$.

Šema bodovanja:

- Zaključak $g(x) = \log_a\left(\frac{x}{a}\right)$: **1 bod**
- Zaključak $h_1(x) = ax - 1$: **1 bod**
- Dokaz da vrijedi $h_n(x) = a^n x - \frac{a^n - 1}{a-1}$ (ili njemu ekvivalentan): **3 boda**
    - 3 boda se dodjeljuju i ukoliko je dokaz izveden za konkretnu vrijednost broja a
- Dobijanje tačnog rezultata za dio a): **2 boda**
- Dobijanje tačnog rezultata za dio b): **3 boda**
    - Ukoliko učenik navede rješenje $a = \frac{2025}{2024}$, ali ne dokaže da je jedino, dobija 1 bod.

Zadatak 2. Neka je x realan broj. Za svaki prirodan broj n definišimo $t_n = x^n + x^{-n}$. Pretpostavimo da je t_1 cio broj strogo veći od 2.

c) Dokazati da je t_n cio broj za sve prirodne brojeve n.

d) Odrediti sve prirodne brojeve n takve da je t_n djeljiv s t_1.

Rješenje:

a) Po uslovu zadatka t_1 je cio broj. Imamo

$$t_2 = x^2 + x^{-2} = x^2 + 2 + x^{-2} - 2 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot x^{-1} + x^{-2}) - 2 = (x + x^{-1})^2 - 2 = t_1^2 - 2,$$

odakle zaključujemo da je i t_2 cio broj.

Dokažimo matematičkom indukcijom po n da je t_n cio broj. Tvrdnju smo dokazali za $n \in \{1, 2\}$, što predstavlja bazu indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-2$ i $n-1$, tj. da su t_{n-2} i t_{n-1} cijeli brojevi. Imamo

$$\begin{aligned} t_n = x^n + x^{-n} &= x^n + x^{n-2} + x^{-(n-2)} + x^{-n} - x^{n-2} - x^{-(n-2)} \\ &= x^{n-1} \cdot (x + x^{-1}) + x^{-(n-1)} \cdot (x + x^{-1}) - \left(x^{n-2} + x^{-(n-2)}\right) \\ &= (x + x^{-1})\left(x^{n-1} + x^{-(n-1)}\right) - \left(x^{n-2} + x^{-(n-2)}\right) = t_1 \cdot t_{n-1} - t_{n-2}. \end{aligned}$$

Kako su brojevi t_1, t_{n-2} i t_{n-1} cijeli, to je i t_n cio, čime je indukcija završena. Dakle, t_n je cio broj za sve prirodne brojeve n.

b) Kako je $t_2 = t_1^2 - 2$ i $t_1 > 2$, to t_2 nije djeljiv s t_1 (u suprotnom bi vrijedilo $t_1 \mid 2$). Dakle, t_1 dijeli t_1, a ne dijeli t_2. Iz $t_n = t_1 \cdot t_{n-1} - t_{n-2}$ vidimo da t_1 dijeli t_n ako i samo ako t_1 dijeli t_{n-2}. Kako t_1 dijeli t_1, to dijeli i t_3, pa dijeli i t_5, pa dijeli i t_7 itd. Slično, kako t_1 ne dijeli t_2, to ne dijeli ni t_4, pa ne dijeli ni t_6 itd. Dakle, t_1 dijeli t_n ako i samo ako je n paran broj.

Šema bodovanja:

- Dokaz da $t_2 \in \mathbb{Z}$: **1 bod**
- Dokaz da $t_n \in \mathbb{Z}$ za sve $n \in \mathbb{N}$: **5 bodova**, od čega
  - 1 bod za ideju dokaza indukcijom
  - 3 boda za relaciju $t_n = t_1 \cdot t_{n-1} - t_{n-2}$ ili njoj ekvivalentnu
  - 1 bod za dovršavanje induktivnog dokaza
- Dokaz da t_1 ne dijeli t_2: **1 bod**
- Dokaz da t_1 dijeli t_n za neparne n, a ne dijeli za parne n: **3 boda**
  - Za dokaz jedne od ove dvije tvrdnje dodjeljuju se 2 boda

Zadatak 3. Mrav se nalazi u tački O. U svakom potezu on bira jedan od četiri smjera: sjever, jug, istok ili zapad, te se pomjera 1 metar u tom smjeru. Nakon 2024 poteza mrav se ponovo našao u tački O. Dokazati da je broj načina da to postigne jednak $\binom{2024}{1012}^2$.

Napomena: 2024. potez ne mora biti prvi put kada se mrav nađe u tački O, bitno je samo da se nakon 2024 poteza nađe u toj tački.

Rješenje 1:

Poteze na sjever i jug nazivamo *vertikalnim*, a poteze na istok i zapad *horizontalnim* potezima.

Da bi se mrav nakon 2024 poteza vratio u polaznu tačku, broj poteza na sjever mora biti isti kao broj poteza na jug, te broj poteza na istok mora biti isti kao broj poteza na zapad. Ovo je i dovoljan uslov, jer svaki ovakav niz poteza ima ukupni pomak 0.

Iz prethodnog slijedi da su brojevi vertikalnih i horizontalnih poteza parni. Pretpostavimo da je napravljeno $2i$ vertikalnih poteza. Tada je napravljeno $2024 - 2i$ horizontalnih poteza. Broj načina da odaberemo koji potezi su vertikalni je $\binom{2024}{2i}$, nakon čega je određeno da su preostali potezi horizontalni. Među $2i$ vertikalnih poteza mora biti tačno i sjevernih i i južnih. Dakle, poredak vertikalnih poteza možemo odabrati na $\binom{2i}{i}$ načina. Slično, poredak horizontalnih poteza možemo odabrati na $\binom{2024-2i}{1012-i}$ načina. Zaključujemo, ukoliko je napravljeno tačno $2i$ vertikalnih poteza, broj načina je

$$\binom{2024}{2i} \cdot \binom{2i}{i} \cdot \binom{2024-2i}{1012-i}.$$

Kako vertikalnih poteza može biti $0, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, \dots, 2 \cdot 1012$, ukupan broj načina je

$$\sum_{i=1}^{1012} \binom{2024}{2i} \cdot \binom{2i}{i} \cdot \binom{2024-2i}{1012-i}.$$

Označimo ovaj broj sa A. Imamo

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=0}^{1012} \frac{2024!}{(2i)! \cdot (2024-2i)!} \cdot \frac{(2i)!}{(i!)^2} \cdot \frac{(2024-2i)!}{\big((1012-i)!\big)^2} = \sum_{i=0}^{1012} \frac{2024!}{\big((1012-i)! \cdot i!\big)^2} \\
&= \sum_{i=0}^{1012} \frac{2024!}{(1012!)^2} \cdot \frac{(1012!)^2}{\big((1012-i)! \cdot i!\big)^2} = \frac{2024!}{(1012!)^2} \cdot \sum_{i=0}^{1012} \left(\frac{1012!}{i! \cdot (1012-i)!}\right)^2 \\
&= \binom{2024}{1012} \cdot \sum_{i=0}^{1012} \binom{1012}{i}^2 = \binom{2024}{1012} \cdot \sum_{i=0}^{1012} \binom{1012}{i} \cdot \binom{1012}{1012-i}.
\end{aligned}$$

Dokazat ćemo da je suma u posljednjem izrazu je jednaka $\binom{2024}{1012}$, odnosno da ona predstavlja broj načina da od 2024 elementa odaberemo njih 1012. Podijelimo 2024 elementa na dva skupa od po 1012 elementa. Ako je iz prvog odabrano i elemenata, iz drugog je odabrano $1012 - i$ elemenata. Odabir iz prvog skupa možemo izvršiti na $\binom{1012}{i}$ načina, a odabir iz drugog skupa na $\binom{1012}{1012-i}$ načina. Kako i može uzeti vrijednosti $0, 1, 2, \dots, 1012$, i za svaku od ovih vrijednosti dobijamo $\binom{1012}{i} \cdot \binom{1012}{1012-i}$ načina da odaberemo 1012 elemenata od ukupno 2024, to je tvrdnja dokazana.

Zaključujemo, $A = \binom{2024}{1012} \cdot \binom{2024}{1012} = \binom{2024}{1012}^2$ što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- Zaključak da mrav mora napraviti isti broj poteza na sjever i jug, te isti broj poteza na zapad i istok: **2 boda**

- Izražavanje rezultata u obliku $\sum_{i=1}^{1012}\binom{2024}{2i}\cdot\binom{2i}{i}\cdot\binom{2024-2i}{1012-i}$ (ili njemu ekvivalentnom): **3 boda**
- Svođenje rezultata na oblik $\binom{2024}{1012}\cdot\sum_{i=0}^{1012}\binom{1012}{i}^2$ (ili njemu ekvivalentan): **2 boda**
- Izračunavanje sume $\sum_{i=0}^{1012}\binom{1012}{i}^2$: **3 boda**

Rješenje 2
Ponudit ćemo dva u principu ekvivalentna rješenja, od kojih je prvo vjerovatno intuitivnije:
Rješenje 2.1.
Posmatrajmo dva binarna niza dužine 2024, od kojih oba imaju po 1012 jedinica i 1012 nula. Jasno je da je broj načina da odaberemo ova dva niza jednak $\binom{2024}{1012}^2$.
Ako je u prvom nizu na k. mjestu nula, a u drugom nizu na k. mjestu jedinica, to znači da u k. potezu idemo lijevo. Slično, $1+0$ znači da idemo desno, $0+0$ da idemo gore, a $1+1$ da idemo dole. Primijetimo da ako u prvom i drugom nizu postoji s mjesta na kojima su obje nule, to znači da je preostalih $1012-s$ nula drugog niza na mjestima gdje su u prvom nizu jedinice, što opet znači da na preostalih s mjesta na kojima su u prvom nizu jedinice su jedinice i u drugom nizu. Dakle, isti je broj poteza gore i dole. Slično, postoji po $1012-s$ poteza lijevo i desno. Kako je to potreban i dovoljan uslov da bi se na kraju završilo u koordinatnom početku, zaključujemo da postoji bijekcija između parova nizova i puteva u kojima će završiti u koordinatnom početku, pa je broj tih puteva jednak $\binom{2024}{1012}^2$.

Rješenje 2.2.
Uvedimo koordinatni sistem: mrav počinje u koordinatnom početku $(0,0)$, te u jednom potezu iz tačke (x,y) može doći u bilo koju od tačaka $(x+1,y),(x-1,y),(x,y+1),(x,y-1)$. Pridružimo svakoj tački (x,y) tačku (u,v) takvu da je $(u,v)=(x-y,x+y)$. Vrijedi $x=\frac{u+v}{2}$ i $y=\frac{u-v}{2}$, pa je svakoj tački (u,v) pridružena tačno jedna tačka (x,y) i obratno. Potez $(x,y)\rightarrow(x,y+1)$ (tj. potez na sjever) je ekvivalentan potezu $(u,v)\rightarrow(u-1,v+1)$; potez $(x,y)\rightarrow(x,y-1)$ je ekvivalentan $(u,v)\rightarrow(u+1,v-1)$; potez $(x,y)\rightarrow(x+1,y)$ je ekvivalentan $(u,v)\rightarrow(u+1,v+1)$; potez $(x,y)\rightarrow(x-1,y)$ je ekvivalentan $(u,v)\rightarrow(u-1,v-1)$.
Komentar: Ovo je kao da originalni koordinatni sistem zarotiramo za $45°$ (i dodatno “zumiramo” $\sqrt{2}$ puta).

Dakle, u (u,v)- koordinatama svaki potez podrazumijeva promjenu obje koordinate za 1. Također, promjene u-koordinate su neovisne od promjena v-koordinate, što znači da svaki niz od 2024 promjene u-koordinate i niz od 2024 promjene v-koordinate zajedno daju validan niz od 2024 poteza. Da bi se mrav vratio u $(0,0)$, potreban i dovoljan uslov je da se i u- i v-koordinata poveća tačno 1012 puta i smanji tačno 1012 puta. Ovo možemo postići na $\binom{2024}{1012}$ načina za u-koordinatu i isto toliko za v-koordinatu, što znači da je ukupan broj načina jednak $\binom{2024}{1012}^2$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4. Na pravoj p su date dvije različite tačke M i N. Kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 sa centrima O_1, O_2, O_3, O_4 redom, dodiruju pravu p tako da se k_1 i k_2 dodiruju izvana u M, a k_3 i k_4 se dodiruju izvana u N, te su k_1 i k_3 sa iste strane prave p (a k_2 i k_4 sa druge strane prave p). Ako postoji kružnica k takva da sve kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 dodiruju kružnicu k iznutra, dokazati da se prave O_1O_3, O_2O_4 i p sijeku u jednoj tački ili su paralelne.

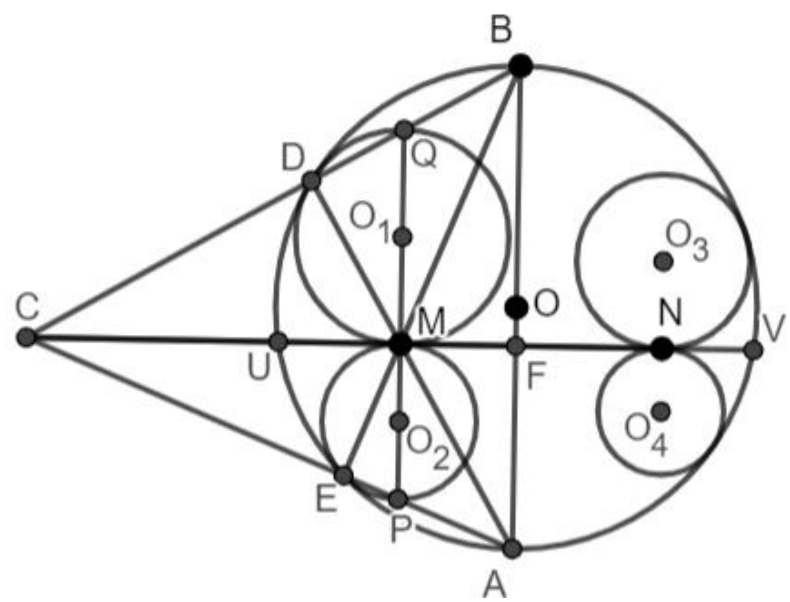
Rješenje 1:

Primijetimo najprije da je dovoljno dokazati $\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4}$. Naime, ako su prethodni odnosi jednaki 1, prave O_1O_3 i O_2O_4 su paralelne sa p. Ako su ovi odnosi manji od 1, te ako O_1O_3 siječe p u G, a O_2O_4 siječe p u G', tada su i G i G' sa iste strane tačke M u odnosu na N te iz Talesove teoreme vrijedi $\frac{GM}{GN} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4} = \frac{G'M}{G'N}$, odnosno $\frac{MN}{GN} = 1 - \frac{GM}{GN} = 1 - \frac{G'M}{G'N} = \frac{MN}{G'N}$, odakle je $GN = G'N$, tj. $G \equiv G'$. Slično vrijedi i ako je gornji odnos veći od 1.

Dakle, dovoljno je dokazati da je $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}$. Dokazat ćemo da je ovaj odnos fiksan pod uslovom da je kružnica k fiksna i da je prava p fiksna (ako fiksiramo k i p, onda su za svaku tačku M koja je na pravoj p, a unutar kružnice k jedinstveno određeni k_1 i k_2).

Neka k_1 i k_2 dodiruju k u D i E, redom. Primijetimo da homotetija sa centrom u D koja slika k_1 u k slika pravu p u njoj paralelnu pravu koja je tangenta kružnice k. Ta tangenta prolazi kroz sredinu A luka UV (onu sredinu luka koja je sa iste strane p kao i k_2). Dakle, tačke D, M, A su kolinearne. Slično, ako je B sredina drugog luka UV (onog koji je sa suprotne strane p u odnosu na k_2), tačke E, M, B su kolinearne. Jasno je da je AB prečnik kružnice k te da je AB okomito na p. Neka se AE i BD sijeku u C. Kako je $\angle ADB = \angle AEB = 90°$, to je $M = AD \cap BE$ ortocentar trougla ABC. Dakle, CM je okomito na AB, pa $C \in p$.

Sada ćemo na dva načina dokazati da je $\frac{r_1}{r_2} = \frac{BF}{AF}$, gdje je $F = p \cap AB$. Potpuno analogno se dokaže da je i $\frac{r_3}{r_4} = \frac{BF}{AF}$, odakle slijedi tvrdnja zadatka.



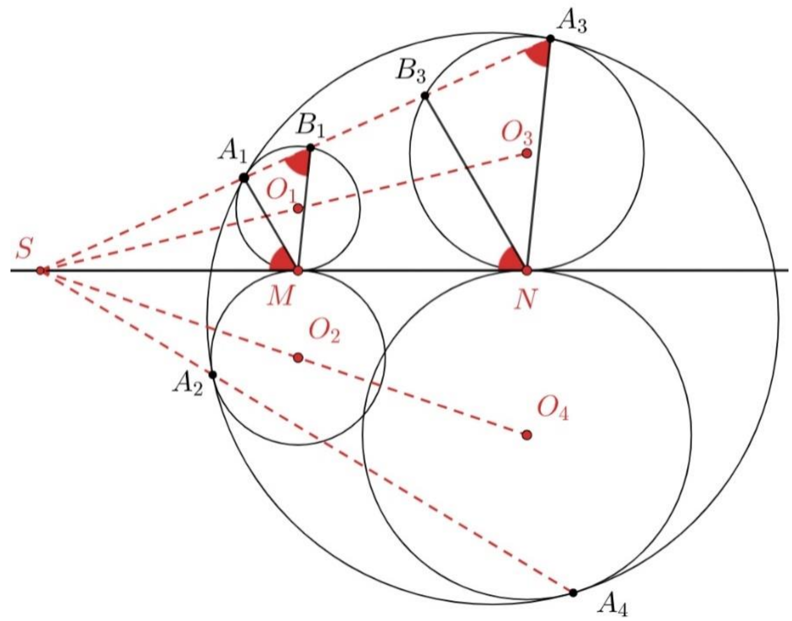
I način:
Neka prava O_1O_2 siječe AC i BC u tačkama P i Q, redom. Kako je $\angle MDQ = \angle ADB = 90°$, to $Q \in k_1$ i MQ je prečnik k_1 (do istog zaključka smo mogli doći zaključuući da je zbog $MQ||AB$ tačka Q ustvari slika od B pri homotetiji sa centrom u D koja slika k u k_1). Analogno, $P \in k_2$. Sada je $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2r_1}{2r_2} = \frac{QM}{MP} = \frac{\frac{QM}{MC}}{\frac{MP}{MC}} = \frac{\frac{BF}{CF}}{\frac{AF}{CF}} = \frac{BF}{AF}$.
Napomena: Vrlo slično ovom načinu, može se zaključiti da se simetrale duži MD i ME sijeku na p (to je ustvari sredina MC). Ove simetrale prolaze kroz O_1 i O_2 te polove BM i AM, pa se slično kao ranije dokaže $\frac{r_1}{r_2} = \frac{BF}{AF}$ (ovaj način je ustvari isti kao i gornji nakon što se primijeni homotetija sa centrom u M i koeficijentom $\frac{1}{2}$).

II način:
Primijetimo da je $\frac{r_1}{R} = \frac{DM}{DA}$ (R je poluprečnik kružnice k), jer je to ustvari koeficijent homotetije u D koja slika k_1 u k. Slično je $\frac{r_2}{R} = \frac{EM}{EB}$, pa koristeći $AD \cdot BC = 2P_{ABC} = BE \cdot AC$ dobijamo $\frac{r_1}{r_2} = \frac{DM \cdot EB}{EM \cdot DA} = \frac{DM \cdot BC}{EM \cdot AC} = \frac{P_{CMB}}{P_{CAM}} = \frac{CM \cdot BF}{CM \cdot AF} = \frac{BF}{AF}$.

Šema bodovanja:

- Zaključak da je dovoljno dokazati $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}$ – **1 bod**
- Uvođenje tačaka A i B te dokaz kolinearnosti $A - M - D$ i $B - M - E$ – **2 boda**
- Zaključak da se BD i AE sijeku na p – **2 boda**
- Dokaz da je $\frac{r_1}{r_2} = \frac{BF}{AF}$ – **4 boda**
- Zaključak da analogno vrijedi $\frac{r_3}{r_4} = \frac{BF}{AF}$ i da je zbog toga dokaz gotov – **1 bod** (ovaj bod učenik može i ranije osvojiti ako kaže da je dovoljno dokazati da odnos $\frac{r_1}{r_2}$ zavisi samo od prave p i kružnice k, ali ne i od odabira tačke M)

Rješenje 2 (Ervin Macić, član komisije, rješenje koristi Monge teoremu)



Neka kružnica k_i dodiruje kružnicu k u tački $A_i, i = 1,2,3,4.$ Dokažimo da se prave A_1A_3, O_1O_3, MN sijeku u jednoj tački (analogno je i za prave A_2A_4, O_2O_4, MN). Zatim ćemo dokazati da se A_1A_3, MN, A_2A_4 također sijeku, odakle jasno slijedi da se i O_1O_3, MN, O_2O_4 također sijeku u jednoj tački, što je trebalo dokazati.

Posmatrajmo kružnice k_1, k_3, k koje su kružnice sa centrima O_1, O_3, O redom gdje je O centar kružnice k. Prema Monge teoremu, vrijedi da vanjski centri homotetije (eksimilicentri) kružnica po parovima $(k_1, k_3), (k_1, k), (k_3, k)$, odnosno tačke $S = O_1O_3 \cap MN, A_1, A_3$ redom leže na istoj pravoj. Ovim smo dokazali da da se prave A_1A_3, O_1O_3, MN sijeku u jednoj tački.

Posmatrajmo četverougao A_1A_3NM. Jasno je da zbog homotetije koja slika k_1 u k_3 iz tačke S vrijedi $\angle SMA_1 = \angle SNB_3$ gdje je B_3 presjek prave SA_3 sa k_3. Iz teoreme o uglu između tangente i tetive (TT) vrijedi $\angle SNB_3 = \angle SA_3N$, odakle slijedi da je ovaj četverougao tetivan. Analogno dobijamo da je A_2A_4NM tetivan. Primijetimo da su sada pravci A_1A_3, MN, A_2A_4 radikalne osi kružnica $A_1A_3NM, A_2A_4NM, A_1A_2A_3A_4$ odakle slijedi da se sijeku u jednoj tački.

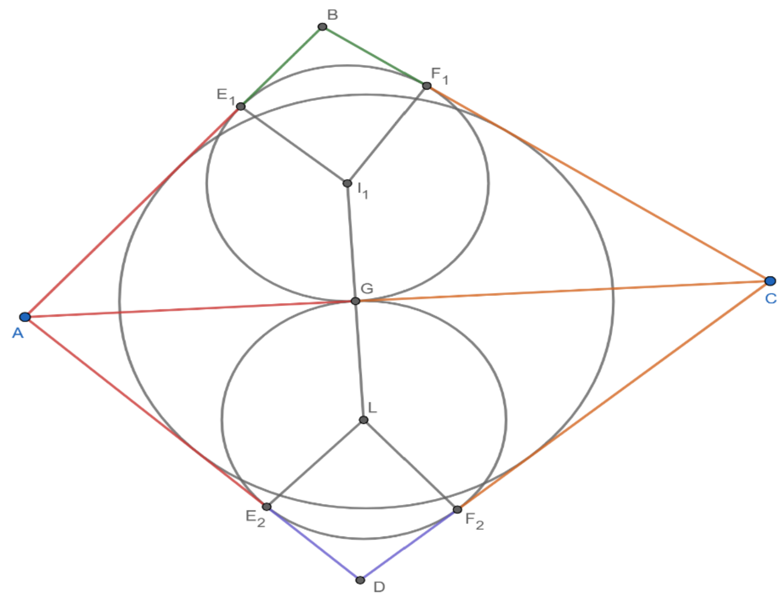
Kombiniranjem prvog i drugog tvrđenja jasno je da se i O_1O_3, MN, O_2O_4 sijeku u jednoj tački.

Rješenje 3 (dovršeno rješenje učenice Naide Gavranović)

I u ovom rješenju ćemo dokazati da vrijedi $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4}$. Prvo ćemo dokazati lemu koju ćemo koristiti u dokazu (ova lema je prilično poznata):

Lema: U tangentnom četverouglu $ABCD$, upisane kružnice trouglova ΔABC i ΔACD se dodiruju.

Dokaz:



Neka su G_1, F_1 i E_1 tačke dodira upisane kružnice ΔABC sa stranicama AC, BC i AB, redom. Slično, neka su G_2, F_2 i E_2 tačke dodira upisane kružnice ΔACD sa stranicama AC, CD i AD, redom.

Neka je $DE_2 = DF_2 = t_2,\ CF_2 = CG_2 = l_2, AG_2 = AE_2 = h_2, AE_1 = AG_1 = h_1, BE_1 = BF_1 = t_1, CG_1 = CF_1 = l_1$.

Zbog činjenice da je četverougao $ABCD$ tangentan vrijedi da su mu sume naspramnih stranica jednake, tj. $AD + BC = AB + CD$ iz čega zaključujemo da je $t_1 + h_1 + t_2 + l_2 = t_1 + h_2 + t_2 + l_1$

$\Rightarrow h_1 + l_2 = h_2 + l_1 \ \ \Rightarrow h_1 - h_2 = l_1 - l_2$.

Međutim, kako je $l_1 + h_1 = AC = l_2 + h_2$, zaključujemo (sabiranjem npr.) da vrijedi $l_1 = l_2$ i $h_1 = h_2$, pa smo time dokazali da je $AG_1 = AG_2\ i\ CG_1 = CG_2$ što je ekvivalentno s tvrdnjom da upisne kružnice trouglova $\Delta ABC\ i\ \Delta ACD$ dodiruju duž AC u istoj tački, pa se i same dodiruju.

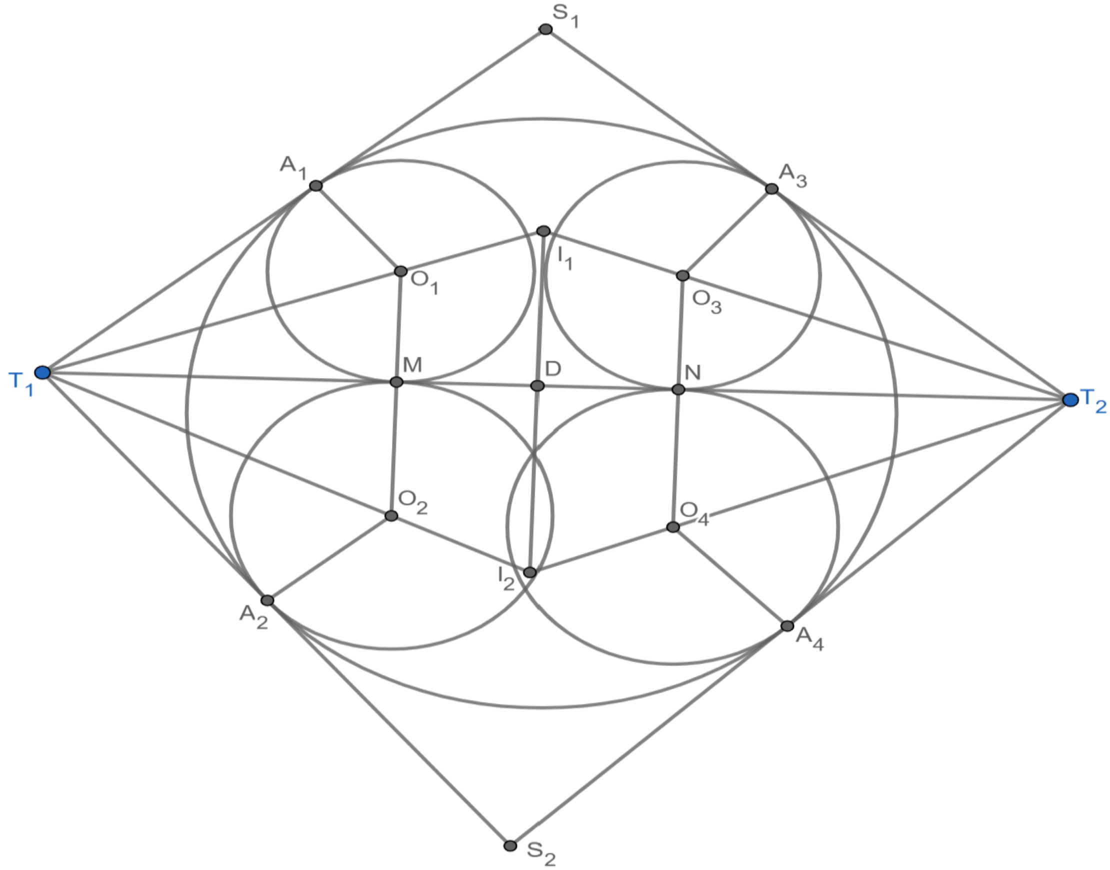
Komentar: Poznato je da je $AG_1 = \frac{AB+AC-BC}{2}, AG_2 = \frac{AD+AC-CD}{2}$, pa se korištenjem $AD + BC = AB + CD$ dobija $AG_1 = AG_2$, odakle slijedi tvrdnja.

Neka su tačke dodira kružnice k sa kružnicama $k_1, k_2, k_3\ i\ k_4$ redom tačke $A_1, A_2, A_3\ i\ A_4$. Za dvije kružnice koje se dodiruju, njihova radikalna osa jeste njihova zajednička tangenta u tački dodira. Iz ovoga znamo da je MN radikalna os za kružnice $k_1\ i\ k_2$, te za kružnice $k_3\ i\ k_4$. Sada ćemo uvesti tangente na kružnicu k u tačkama $A_1, A_2, A_3\ i\ A_4$. Ove tangente će biti radikalne osi kružnice k sa kružnicama $k_1, k_2, k_3\ i\ k_4$ redom. Kako se za svake tri kružnice njihove radikalne osi sijeku u jednoj tački koja je radikalni centar za te tri kružnice, to se tangente na kružnicu k u tačkama $A_1\ i\ A_2$ sijeku na MN i ovu tačku možemo označiti sa T_1. Analogno označimo T_2 za tangente na kružnicu k u tačkama $A_3\ i\ A_4$. Ako uvedemo i $T_1A_1 \cap T_2A_3 = S_1$ i $T_1A_2 \cap T_2A_4 = S_2$ dobijemo tangentni četverougao $T_1S_1T_2S_2$ kojem je upisana kružnica k.

Pošto su $T_1M\ i\ T_1A_1$ tangente na kružnicu k_1, pa onda vrijedi da je T_1O_1 simetrala ugla $\angle MT_1A_1$. Analogno dobijemo da je T_2O_3 simetrala ugla $\angle NT_2A_3$, T_1O_2 simetrala ugla $\angle MT_2A_2$ i T_2O_4 simetrala ugla $\angle NT_2A_4$. Ako uvedemo presjek $T_1O_1 \cap T_2O_3 = I_1$ dobijemo centar upisane kružnice za trougao $\Delta T_1S_1T_2$, te ako uvedemo presjek $T_1O_2 \cap T_2O_4 = I_2$ dobijemo centar upisane kružnice za trougao $\Delta T_1S_2T_2$.

Zbog dokazane leme upisane kružnice $\Delta T_1S_1T_2$ i $\Delta T_1S_2T_2$ dodiruju MN u istoj tački koju ćemo označiti sa D.

Sada sa $r_1, r_2, r_3,\ r_4, R_1\, i\ R_2$ redom označimo poluprečnike kružnica $k_1, k_2, k_3\ i\ k_4$, te poluprečnike upisanih kružnica za trouglove $\Delta T_1S_1T_2$ i $\Delta T_1S_2T_2$.



Iz činjenice da O_1 leži na I_1T_1, te da su $D\ i\ M$ dodiri tangente iz T_1 na k_1, zaključujemo da su trouglovi ΔT_1I_1D i ΔT_1O_1M homotetični. Zbog homotetije vrijedit će odnos $\frac{r_1}{R_1} = \frac{T_1M}{T_1D}$. $(\star)$

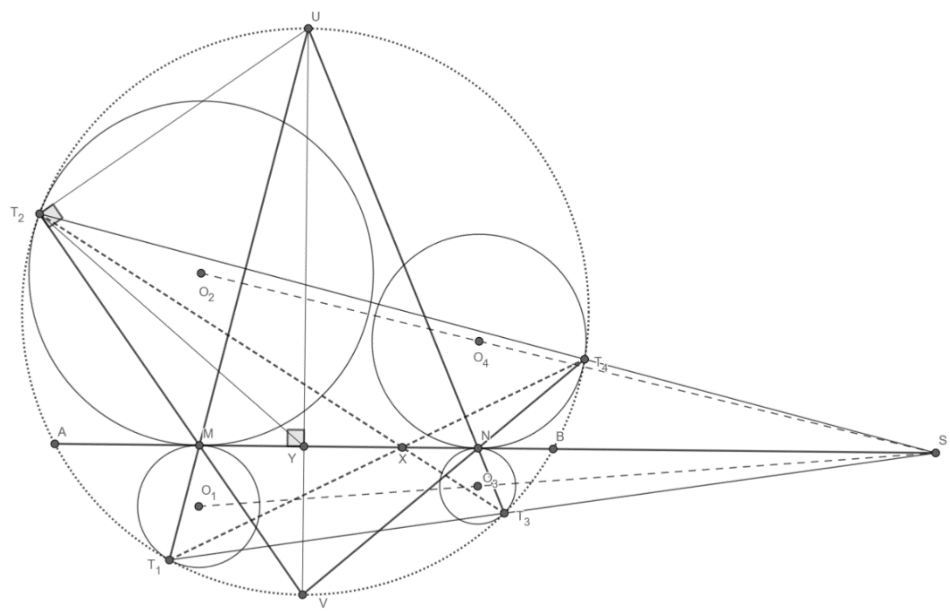
Na sličan način zaključit ćemo da su homotetni sljedeći parovi trouglova: ΔT_2I_1D i ΔT_2O_3N, ΔT_1I_2D i ΔT_1O_2M, te ΔT_2I_2D i ΔT_2O_4N. Iz ovih homotetija vrijedit će sljedeći odnosi: $\frac{r_3}{R_1} = \frac{T_2N}{T_2D}$ $(\star\star)$, $\frac{r_2}{R_2} = \frac{T_1M}{T_1D}$ $(\star\star\star)$ i $\frac{r_4}{R_2} = \frac{T_2N}{T_2D}$ $(\star\star\star\star)$.

Dijeljenjem $(\star)$ i $(\star\star)$ dobijamo da vrijedi $\frac{r_1}{r_3} = \frac{T_1M \cdot T_2D}{T_1D \cdot T_2N}$.

Dijeljenjem $(\star\star\star)$ i $(\star\star\star\star)$ dobijamo da vrijedi $\frac{r_2}{r_4} = \frac{T_1M \cdot T_2D}{T_1D \cdot T_2N}$.

Iz prethodne dvije relacije zaključujemo da je $\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4}$, pa možemo završiti kao u prethodnim rješenjima.

Rješenje 4 (rješenje učenika Haruna Alibegovića, rješenje koristi inverziju i Paskalovu teoremu):
Neka je T_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ presjek kružnice k_i sa k. Sa A, B označavamo presjeke p i k, a V je sredina luka AT_1B, dok je U sredina luka AT_2B. Sa Y označimo presjek pravih AB i UV.
Homotetijom sa centrom u T_1 koja šalje k_1 u k, M se slika u dodir tangente na k paralelne s AB i kružnice k, što je zapravo tačka U. Zbog toga su U, M, T_1 kolinearne. Analogno dobijamo da su U, N, T_3; V, M, T_2 i V, N, T_4 kolinearne.
Primjenom Paskalove teoreme na tetivni šestougao $T_1T_4VT_2T_3U$ dobijamo da se prave T_1T_4 i T_2T_3 sijeku na pravoj MN. Nazovimo tu tačku X.



Kako je UV prečnik k, i UV ⊥ AB to je $\angle MT_2U = \angle MYU = 90°$ pa je četverougao MT_2YU tetivan.
Primjetimo $\angle XT_4T_2 = \angle T_1T_4T_2 = \angle T_1UT_2 = \angle T_2UM = \angle T_2YM = 180 - \angle XYT_2$(pri čemu jednakosti dobijamo iz tetivnog MT_2YU i $T_2UT_4T_1$) pa je četverougao T_2T_4XY tetivan. Analogno je i T_1T_3XY tetivan.
No, primjenjujući obrnutu inverziju s centrom u X i prečnikom $\sqrt{XA * XB}$ znamo da se T_2 slika u T_3, a T_4 u T_1, zbog potencije tačke X na k. Samim tim se kružnica T_2T_4XY slika u pravu T_1T_3, a analogno kružnica T_1T_3XY u pravu T_2T_4. Slika Y je presjek ove dvije prave, ali on mora ležati na slici MN, što je sama prava MN.
Neka je to tačka S. Sada primjenjujući inverziju u S s prečnikom $\sqrt{SA * SB}$, T_1 se slika u T_3 zbog potencije S na K. Pošto se A slika u B, M se slika u tačku između A i B, pa se k_1 slika u kružnicu koja dodiruje pravu AB i iznutra dodiruje k u tački T_3 što mora biti kružnica k_3.
No poznato je da su centri inverznih kružnica kolinearni s centrom inverzije, pa O_1O_2 prolazi kroz S.
Analogno O_2O_4 prolazi kroz S, pa je tvrdnja zadatka dokazana.

Zadatak 5. Neka je p prost broj i neka je $S = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$. Odrediti broj podskupova skupa S čiji je zbir elemenata djeljiv sa p.

Rješenje 1:
Skup nazivamo *dobrim* ukoliko je suma njegovih elemenata djeljiva s p. Također, sa $s(X)$ označavamo sumu elemenata skupa X.
Definišimo skup $T = S \cup \{p\}$. Primijetimo da za svaki dobar podskup A skupa S imamo dva dobra podskupa skupa T – to su A i $A \cup \{p\}$. Izbrojat ćemo broj dobrih podskupova skupa T, a broj dobrih podskupova skupa S će biti jednak njegovoj polovini.
Za dva podskupa A i B skupa T kažemo da su *prijatelji* ako imaju istu kardinalnost, te ako njihove elemente možemo označiti sa $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ i $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ tako da postoji broj $m \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ takav da za sve $i = 1, 2, \dots, k$ vrijedi $b_i = a_i + m \ (mod\ p)$.
Neka je $A_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ proizvoljan podskup skupa T. Svi njegovi prijatelji su $A_t = \{a + t | a \in A\}$ za $t = 1, 2, \dots, p-1$, pri čemu podrazumijevamo da se sabiranje vrši po modulu p. Dakle, svaki podskup ima tačno $p-1$ prijatelja. Također, iz definicije prijateljstva slijedi da, ako dva skupa $A, B \subseteq T$ imaju zajedničkog prijatelja C, tada su i A i B prijatelji. To znači da podskupove skupa T, ne računajući $\emptyset$ i T, možemo podijeliti na disjunktne klase od po p podskupova koji su međusobno prijatelji.
Ako $k \notin \{0, p\}$, skupovi $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$ su po parovima različiti, te vrijedi $s(A_t) = s(A_0) + t \cdot k \ (mod\ p)$. Imamo

$$\begin{aligned} &s(A_i) \equiv s(A_j) \ (mod\ p) \Leftrightarrow \\ &s(A_0) + i \cdot k \equiv s(A_0) + j \cdot k \ (mod\ p) \Leftrightarrow \\ &(i-j) \cdot k \equiv 0 \ (mod\ p), \end{aligned}$$

a kako je $0 \leq i, j \leq p-1$, posljednja relacija može vrijediti ako i samo ako je $i = j$. Dakle, brojevi $s(A_0), s(A_1), \dots s(A_{p-1})$ čine potpun sistem ostataka po modulu p. To znači da je tačno jedan od skupova $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ dobar.
Iz predhodnog zaključujemo da sve podskupove skupa T, osim $\emptyset$ i T, možemo podijeliti na disjunktne klase od po p podskupova tako da je u svakoj klasi tačno jedan podskup dobar. Zato je broj nepraznih dobrih podskupova osim T jednak $\frac{2^p - 2}{p}$, pa je broj nepraznih dobrih podskupova skupa S (osim S) jednak polovini ovog broja, tj. $\frac{2^{p-1}-1}{p}$. Kako je i skup S dobar, traženi broj podskupova skupa S je $\frac{2^{p-1}-1}{p} + 1$.

Šema bodovanja:
- Svođenje problema na prebrojavanje dobrih podskupova skupa $T = S \cup \{p\}$: **1 bod**
- Posmatranje relacije prijateljstva iz rješenja: **2 boda**
- Dokaz da podskupove od T možemo podijeliti na klase od p elemenata, pri čemu je u svakoj klasi tačno jedan element dobar: **6 bodova**
- Privođenje dokaza kraju: **1 bod**

Rješenje 2 (metod generatorskih funkcija):
Dobar skup definišemo kao u rješenju I.
Posmatrajmo polinom $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^{p-1})$. Neka je on u izmnoženom obliku jednak

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{\frac{p(p-1)}{2}} x^{\frac{p(p-1)}{2}}.$$

Prilikom množenja njegovih faktora član x^k dobijamo kad god odaberemo članove $x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^{j_t}$ takve da je $j_1 + j_2 + \dots + j_t = k$, a iz ostalih zagrada odaberemo 1. To znači da je koeficijent c_k jednak broju načina da odaberemo različite brojeve $j_1, j_2, \dots, j_t \in S$ takve da im je suma jednaka k, tj. to je broj podskupova skupa S čija je suma jednaka k. Zaključujemo, broj dobrih podskupova skupa S je jednak $N = c_p + c_{2p} + \dots + c_{\frac{p(p-1)}{2}}$.
Neka je ω primitivni korijen jedinice reda p. Kako je p prost broj, to su $\omega^2, \omega^3, \dots \omega^{p-1}$ također primitivni korijeni jedinice reda p. Imamo $1 + \omega^j + \omega^{2j} + \dots + \omega^{(p-1)j} = \frac{\omega^{pj}-1}{\omega - 1} = 0$ ako $p \nmid j$, a $1 + \omega^j + \omega^{2j} + \dots + \omega^{(p-1)j} = p$ ako $p \mid j$. Zbog toga posmatrajmo sumu $A = f(1) + f(\omega) + f(\omega^2) + \dots + f(\omega^{p-1})$ (jer će tako nestati svi c_i za koje $p \nmid i$). Imam

$$A = \sum_{i=j}^{\frac{p(p-1)}{2}} c_i(1 + \omega^j + \omega^{2j} + \dots + \omega^{(p-1)j}) = p \cdot \left(c_0 + c_p + c_{2p} + \dots + c_{\frac{p(p-1)}{2}}\right) = p \cdot (c_0 + N)$$
$$= p \cdot (1 + N),$$

To znači da je $N = \frac{A}{p} - 1$.
Posmatrajmo polinom $g(x) = (x-1)^p - 1$. Pošto je p prost broj, za proizvoljno $j \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ vrijedi da brojevi $\omega^0, \omega^j, \omega^{2j}, \dots, \omega^{(p-1)j}$ čine skup svih korijena jedinice reda p. Zato brojevi $1 + \omega^0, 1 + \omega^j, \dots, 1 + \omega^{(p-1)j}$ predstavljaju p različitih nula polinoma g. Kako je on stepena p, to su sve njegove nule. Uzimajući u obzir da je stepen polinoma g neparan, iz Vieteovih formula dobijamo da je proizvod njegovih nula jednak $-g(0)$ (jer je vodeći koeficijent jednak 1), odnosno vrijedi

$$(1 + \omega^0)(1 + \omega^j)\dots(1 + \omega^{(p-1)j}) = 2 \Leftrightarrow$$
$$(1 + \omega^j)(1 + \omega^{2j})\dots(1 + \omega^{(p-1)j}) = 1 \Leftrightarrow$$
$$f(\omega^j) = 1.$$

Kako je $f(1) = 2^{p-1}$, to je $A = 2^{p-1} + p - 1$, pa je $N = \frac{1}{p}(2^{p-1} + p - 1) = \frac{2^{p-1}-1}{p} + 1$.

Rezultati učenika I razreda

Rang	Ime i prezime	Škola	Mjesto	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Ukupno
1	Adnan Osmić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	10	10	10	50
2	Tarik Dacić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	10	0	10	40
3	Ajla Ćuprija	JU Treća gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	10	4	2	36
4	Iman Kurtović	JU Mješovita srednja elektrotehnička škola Tuzla	Tuzla	10	10	10	2	2	34
4	Uma Senta	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	10	2	2	34
6	Nermin Malićević	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	9	9	10	2	1	31
7	Amer Moštro	JU Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj	Kakanj	6	10	10	0	1	27
8	Emir Tuzlak	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	8	6	0	2	26
9	Lana Žepić	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Tuzla	5	8	10	0	1	24
10	Anel Salibašić	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Tuzla	9	10	3	0	1	23
11	Nermin Kadić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	0	9	10	0	1	20
11	Ismar Aljukić	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Tuzla	10	10	0	0	0	20
13	Abdullah Muslić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	9	9	0	0	0	18
14	Hanan Šarić	Richmond Park International Secondary School Sarajevo	Sarajevo	7	10	0	0	0	17
15	Ahmed Čengić	JU Gimnazija "Muhsin Rizvić" Breza	Breza	0	10	6	0	0	16
15	Hana Kozica	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	2	10	4	0	0	16
17	Delila Bošnjaković	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Tuzla	4	10	0	0	0	14
18	Emin Tulumović	JU Mješovita srednja elektrotehnička škola Tuzla	Tuzla	10	3	0	0	0	13
19	Nedžla Demirović	JU Treća gimnazija Sarajevo	Sarajevo	2	8	2	0	0	12
19	Emir Korda	Gimnazija "Richmond Park College" Sarajevo	Novi Travnik	10	0	2	0	0	12
19	Damir Konjic	Richmond Park International Secondary School Tuzla	Tuzla	9	1	0	0	2	12
22	Abdulkerim Kurgaš	Gimnazija "Visoko" u Visokom	Visoko	2	8	1	0	0	11
23	Jovana Banjac	JU MSŠ "Bosanski Petrovac"	Bosanski Petrovac	10	0	0	0	0	10
23	Selma Mujačić	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Tuzla	2	8	0	0	0	10
25	Dino Šabanović	Gimnazija "Visoko" u Visokom	Visoko	2	3	1	0	0	6
26	Faris Valjevac	JU MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko	Visoko	2	3	0	0	0	5
27	Samedina Škrebo	JU Gimnazija "dr. Mustafa Kamarić" Gračanica	Gračanica	0	3	1	0	0	4
28	Samina Borić	JU Srednja škola Konjic	Konjic	2	1	0	0	0	3
29	Kenan Nuhić	JU Druga gimnazija Mostar	Mostar	2	0	0	0	0	2
29	Hanan Hrnjić	JU Mješovita srednja škola "Travnik"	Travnik	2	0	0	0	0	2
29	Ishak Klopić	Richmond Park International Secondary School Tuzla	Tuzla	2	0	0	0	0	2
32	Bakir Širbegović	JU Gimnazija "Musa Ćazim Ćatić" Tešanj	Tešanj	1	0	0	0	0	1
32	Faris Sejmenović	JU Tehnička škola Zenica	Zenica	0	1	0	0	0	1
32	Ajdin Muflizović	JU Srednja tehnička škola "Kemal Kapetanović" Kakanj	Kakanj	1	0	0	0	0	1
35	Anel Adilović	JU Srednja tehnička škola "Hasib Hadžović" Goražde	Goražde	0	0	0	0	0	0
35	Faruk Šošo	JU Srednja tehnička škola "Hasib Hadžović" Goražde	Goražde	0	0	0	0	0	0
35	Emina Šabić	JU Srednja tehnička škola Bugojno	Bugojno	0	0	0	0	0	0
35	Lamija Vojić	JU Gimnazija "Bihać"	Bihać	0	0	0	0	0	0

Učenik Adnan Osmić se plasirao i na Matematičku olimpijadu BiH i na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olimpijadu, a učenici Tarik Dacić i Ajla Ćuprija su se plasirali na Matematičku olimpijadu BiH.

Rezultati učenika II razreda

Rang	Ime i prezime	Škola	Mjesto	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Ukupno
1	Nedžma Durović	JU Gazi Husrev-begova medresa	Sarajevo	10	10	7	0	10	37
2	Farah Demirović	Richmond Park International Secondary School Sarajevo	Sarajevo	10	10	10	0	0	30
3	Faruk Demirović	Richmond Park International Secondary School Sarajevo	Sarajevo	10	10	6	0	0	26
4	Nedim Beganović	JU "Gimnazija" Cazin	Cazin	10	10	0	0	0	20
5	Danis Begović	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	3	6	0	0	19
6	Amila Pašić	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Tuzla	10	0	5	1	0	16
7	Lamija Hadžić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	0	1	0	0	11
7	Danis Džaferagić	JU Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla	Tuzla	10	0	0	0	1	11
7	Elmir Junuzović	JU Mješovita srednja elektro-mašinska škola Lukavac	Lukavac	10	0	0	0	1	11
10	Emir Salčinović	JU Treća gimnazija Sarajevo	Sarajevo	7	1	0	0	2	10
11	Adnan Hajdić	JU Gimnazija "dr. Mustafa Kamarić" Gračanica	Gračanica	7	0	2	0	0	9
12	Vedad Čišija	Gimnazija "Visoko" u Visokom	Visoko	7	0	0	0	0	7
13	Ali Kulaglić	JU Gimnazija "Muhsin Rizvić" Breza	Breza	6	0	0	0	0	6
13	Faris Čilaš	SMŠ "Zijah Dizdarević" Fojnica	Fojnica	5	0	0	0	1	6
15	Mustafa Parić	JU "Srednja tehnička škola" Zavidovići	Zavidovići	5	0	0	0	0	5
15	Adi Sudžuka	Gimnazija "Visoko" u Visokom	Visoko	5	0	0	0	0	5
15	Majda Pilav	JU Prva gimnazija Sarajevo	Sarajevo	5	0	0	0	0	5
15	Nađa Trešnjo	JU Srednja škola Konjic	Konjic	5	0	0	0	0	5
19	Malik Kovač	JU Medresa "Osman-ef. Redžović" u Velikom Čajnu, Visoko	Breza	3	0	0	0	1	4
20	Emina Hodžić	Richmond Park International Secondary School Sarajevo	Sarajevo	2	1	0	0	0	3
20	Rijad Grabus	Srednja mješovita škola "Žepče" Žepče	Žepče	3	0	0	0	0	3
22	Ajla Rahić	JU Srednja elektrotehnička škola "Salih - Salko Ćurić" Mostar	Bivolje Brdo	2	0	0	0	0	2
22	Harun Lapo	JU Srednja škola Konjic	Konjic	2	0	0	0	0	2
22	Emina Gabeljić	JU Mješovita srednja škola Banovići	Banovići	1	0	0	0	1	2
22	Tarik Ramić	JU "Gimnazija" Cazin	Cazin	2	0	0	0	0	2
22	Amani Bezdrob	JU Gimnazija Dobrinja Sarajevo	Sarajevo	2	0	0	0	0	2
22	Ahmed Krdžić	JU Gazi Husrev-begova medresa	Podlugovi - Ilijaš	0	2	0	0	0	2
22	Amina Hodžić	JU Mješovita srednja škola Živinice	Živinice	2	0	0	0	0	2
22	Hadžera Karahodža	JU Mješovita srednja škola "Travnik"	Travnik	2	0	0	0	0	2
22	Talha Veladžić	JU Medresa "Reis Džemaludin - ef. Čaušević" Cazin	Cazin	2	0	0	0	0	2
22	Faruk Džinić	JU MSŠ "Musa Ćazim Ćatić" Olovo	Olovo	2	0	0	0	0	2
32	Anes Kovač	Gimnazija "Visoko" u Visokom	Visoko	1	0	0	0	0	1
32	Faris Ajskunić	JU MSŠ "Gimnazija Bugojno"	Bugojno	1	0	0	0	0	1
32	Ensar Gutlić	JU MSŠ "Bosanski Petrovac"	Bosanski Petrovac	1	0	0	0	0	1
32	Naima Čatrnja	JU Srednja elektrotehnička škola "Salih - Salko Ćurić" Mostar	Mostar	1	0	0	0	0	1
32	Nejra Aščalić	JU MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko	Visoko	1	0	0	0	0	1
37	Iman Škrebo	Richmond Park International Secondary School Tuzla	Tuzla	0	0	0	0	0	0

Učenica Nedžma Durović se plasirala i na Matematičku olimpijadu BiH i na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olimpijadu, a učenici Farah Demirović i Faruk Demorivić su se plasirali na Matematičku olimpijadu BiH.

Rezultati učenika III razreda

Rang	Ime i prezime	Škola	Mjesto	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Ukupno
1	Sara Smajić	Richmond Park International Secondary School Sarajevo	Sarajevo	10	10	10	1	0	31
2	Abdullah Ferhatbegović	Richmond Park International Secondary School Sarajevo	Sarajevo	8	10	10	0	0	28
3	Ines Jozić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	6	5	1	0	22
3	Filip Krištić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	6	6	0	0	22
5	Fatih Efe Memišević	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	1	10	0	0	21
6	Isa Švrakić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	9	6	2	1	0	18
6	Tarik Hasanbegović	JU "Gimnazija" Sanski Most	Sanski Most	10	6	2	0	0	18
8	Afan Isaković	JU Treća gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	0	7	0	0	17
9	Kerim Fetić	JU Prva gimnazija u Zenici	Zenica	10	5	0	0	0	15
10	Adem Kunovac	JU Srednja tehnička škola "Hasib Hadžović"	Goražde	6	6	0	0	0	12
10	Lejla Baturić	JU Behram – begova medresa Tuzla	Tuzla	6	6	0	0	0	12
10	Alma Harbaš	JU Gimnazija "Bihać"	Bihać	6	6	0	0	0	12
13	Ena Maksumić	JU Druga gimnazija Mostar	Mostar	10	1	0	0	0	11
14	Mirza Duranović	JU Tehnička škola Zenica	Zenica	9	0	0	0	0	9
15	Senada Zaketović	Richmond Park International Secondary School	Tuzla	6	1	0	0	0	7
16	Sara Omerbašić	JU MSŠ "Enver Pozderović" Goražde	Goražde	6	0	0	0	0	6
16	Emina Bjelić	JU Gimnazija "Rizah Odžečkić" Zavidovići	Zavidovići	6	0	0	0	0	6
16	Iman Omić	JU "Gimnazija" Sanski Most	Sanski Most	6	0	0	0	0	6
16	Elmas Ekinović	JU Prva gimnazija u Zenici	Zenica	6	0	0	0	0	6
16	Amar Čengić	JU MSŠ "Enver Pozderović" Goražde	Goražde	6	0	0	0	0	6
16	Merjem Mešan	JU Srednja tehnička škola Bugojno	Bugojno	6	0	0	0	0	6
22	Ilhana Kvakić	Gimnazija "Visoko" u Visokom	Visoko	5	0	0	0	0	5
22	Amela Smolo	Gimnazija "Visoko" u Visokom	Visoko	4	0	1	0	0	5
24	Adin Alibegović	JU Mješovita srednja elektro-mašinska škola Lukavac	Lukavac	4	0	0	0	0	4
24	Lamija Sabitović	JU Srednja škola Jablanica	Jablanica	4	0	0	0	0	4
26	Faris Dinarević	Richmond Park International Secondary School Tuzla	Tuzla	2	0	1	0	0	3
26	Faris Softić	JU Gimnazija "dr. Mustafa Kamarić" Gračanica	Gračanica	3	0	0	0	0	3
28	Ajdina Herceglija	Gimnazija "Visoko" u Visokom	Visoko	2	0	0	0	0	2
28	Amina Devedžija	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	1	1	0	0	0	2
28	Danis Sijamija	JU Srednja tehnička škola Bugojno	Bugojno	2	0	0	0	0	2
28	Muhamed Numanović	Richmond Park International Secondary School Tuzla	Tuzla	2	0	0	0	0	2
32	Amila Alibašić	JU Gimnazija Velika Kladuša	Velika Kladuša	1	0	0	0	0	1

Učenici Sara Smajić, Abdullah Fehratbegović, Ines Jozić i Filip Krištić su se plasirali i na Matematičku olimpijadu BiH i na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olimpijadu, a učenici Fatih Efe Memišević, Isa Švrakić i Tarik Hasanbegović su se plasirali na Matematičku olimpijadu BiH.

Rezultati učenika IV razreda

Rang	Ime i prezime	Škola	Mjesto	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Ukupno
1	Harun Alibegović	Richmond Park International Secondary School Sarajevo	Sarajevo	10	10	10	10	0	40
2	Ilma Čeljo	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	8	10	10	10	0	38
3	Naida Gavranović	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	8	7	0	35
4	Ahmed Spahić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	9	10	10	4	0	33
5	Asja Ćatić	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	7	0	0	27
6	Emina Hasanbegović	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	10	5	1	0	26
6	Rastko Stankovic	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	10	6	10	0	0	26
8	Husein Jašić	JU Behram – begova medresa Tuzla	Tuzla	10	10	0	0	0	20
8	Ammar Turbić	JU Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	Gradačac	10	8	2	0	0	20
10	Davud Ćuprija	JU Druga gimnazija Sarajevo	Sarajevo	9	10	0	0	0	19
11	Mia Hodžić	JU KŠC "Sv. Franjo" – Opća gimnazija Tuzla	Tuzla	6	5	0	0	0	11
12	Mustafa Mustafić	JU Gimnazija "dr. Mustafa Kamarić" Gračanica	Gračanica	6	1	2	0	0	9
12	Affan Kaknjo	JU Prva gimnazija u Zenici	Zenica	6	1	2	0	0	9
14	Adna Husić	JU Gimnazija Velika Kladuša	Velika Kladuša	7	0	0	0	0	7
14	Hamza Bubalo	JU Srednja škola Konjic	Konjic	7	0	0	0	0	7
16	Nina Lazić	JU Gimnazija "Mustafa Novalić" Gradačac	Gradačac	5	1	0	0	0	6
16	Kerim Mujkanović	JU Gimnazija "Musa Ćazim Ćatić" Tešanj	Tešanj	0	6	0	0	0	6
18	Amir Džafić	JU MSŠ "Enver Pozderović" Goražde	Goražde	5	0	0	0	0	5
18	Emina Džajić	JU Srednja škola Konjic	Konjic	5	0	0	0	0	5
18	Elmas Hamidović	JU "Srednja tehnička škola" Zavidovići	Zavidovići	5	0	0	0	0	5
21	Sadi Qfani	JU MSŠ "Bosanski Petrovac"	Bosanski Petrovac	3	1	0	0	0	4
22	Tarik Gutlić	JU MSŠ "Bosanski Petrovac"	Bosanski Petrovac	2	0	0	0	0	2
23	Damir Muharem	JU Srednja tehnička škola "Hasib Hadžović" Goražde	Goražde	0	0	0	0	0	0
23	Ajša Brka	JU Gimnazija "Mushin Rizvić" Kakanj	Kakanj	0	0	0	0	0	0
23	Ilma Imširović	JU Srednja tehnička škola Bugojno	Bugojno	0	0	0	0	0	0
23	Nađa Masleša	JU Srednja škola Konjic	Konjic	0	0	0	0	0	0
23	Edis Gutlić	JU MSŠ "Bosanski Petrovac"	Bosanski Petrovac	0	0	0	0	0	0

Učenici Harun Alibegović, Ilma Čeljo, Naida Gavranović, Ahmed Spahić, Asja Ćatić, Emina Hasanbegović i Rastko Stanković su se plasirali i na Matematičku olimpijadu BiH i na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olimpijadu.

Matematička olimpijada Bosne i Hercegovine se održava 18. i 19. maja u Visokom (Franjevačka klasična gimnazija Visoko). Učenici koji se pozivaju na Matematičku olimpijadu BiH su:

1. Adnan Osmić
2. Tarik Dacić
3. Ajla Ćuprija
4. Nedžma Durović
5. Farah Demirović
6. Faruk Demirović
7. Sara Smajić
8. Abdullah Fehratbegović
9. Ines Jozić
10. Filip Krištić
11. Fatih Efe Memišević
12. Isa Švrakić
13. Tarik Hasanbegović
14. Harun Alibegović
15. Ilma Čeljo
16. Naida Gavranović
17. Ahmed Spahić
18. Asja Ćatić
19. Emina Hasanbegović
20. Rastko Stanković
21. Benjamin Mujkić