BILTEN FEDERALNOG TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA 2023. GODINE

Sarajevo, 6.5.2023. godine

Federalno takmičenje iz matematike učenika osnovnih škola održano je u Richmond Park International Secondary School Sarajevo, 6.5.2023. godine. Na takmičenju je učestvovalo 148 učenika koji su odabrani na kantonalnim takmičenjima, kao i na kvalifikacionom takmičenju. Nakon 20 godina federalno takmičenje se održalo i za šeste razrede.

Prisutnima su se na otvaranju obratili direktor Richmond Park International Secondary School, Hermin Kapetanović, prof. dr. Zenan Šabanac ispored Udruženja matematičara Kantona Sarajevo, te Admir Beširević ispred takmičarske komisije.

Na zahtjevnim zadacima učenici su pokazali zavidno znanje, te je ukupno 20 učenika osvojilo najmanje 50% bodova. Na Juniorsku matematičku olimpijadu BiH (JMOBiH) se plasiralo 20 učenika. JMOBiH se održava 27. maja u Franjevačkoj klasičnoj gimnaziji u Visokom.

ZADACI

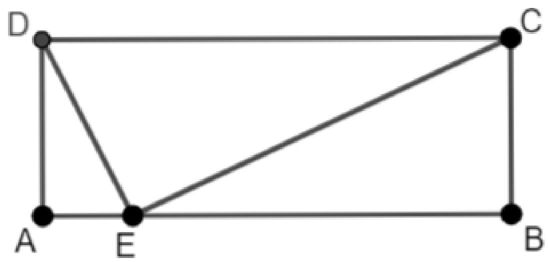
VI RAZRED

Zadatak 1. Odrediti sve parove (a, b) prirodnih brojeva takvih da vrijedi $\frac{a}{12} + \frac{b}{6} = 2$ i $\frac{1}{3} < \frac{a}{15} < \frac{3}{5}$. Odgovor obrazložiti.

Zadatak 2. Prirodni brojevi $1,2,3, \dots ,1999,2000$ su zapisani jedan za drugim (bez razmaka ili zareza), tako da se dobije broj $123456789101112 \dots 19992000$.

a) Koliko cifara ima taj broj? Odgovor obrazložiti.
b) Koja cifra se nalazi na 2023. mjestu u tom broju? Odgovor obrazložiti.
c) Koliko puta se cifra 1 pojavljuje u tom broju? Odgovor obrazložiti.

Zadatak 3. Obim pravougaonika $ABCD$ je $104\ cm$. Na stranici AB je data tačka E tako da je duž BE sedam puta duža od duži AE. Obim trougla AED iznosi $30\ cm$, obim trougla BEC iznosi 84 cm, a obim trougla CED iznosi $90\ cm$. Odrediti dužine duži DE i CE. Odgovor obrazložiti.



Zadatak 4. Dino je zamislio neki prirodan broj n. Pri dijeljenju broja 409 sa n dobio je ostatak 1, a pri dijeljenju broja 554 sa n dobio je ostatak 2. S druge strane, pri dijeljenju broja 827 sa $n + 1$ dobio je ostatak 8. Odrediti sve mogućnosti za broj n. Odgovor obrazložiti.

Zadatak 5.

a) Dati su razlomci $\frac{2023}{2019}$ i $\frac{2101}{2073}$. Ana želi oduzeti prirodan broj x od brojnika i nazivnika i jednog i drugog razlomka, tako da novodobijeni razlomci budu jednaki. Odrediti sve mogućnosti za broj x. Odgovor obrazložiti.
b) Dati su razlomci $\frac{2023}{2027}$ i $\frac{901}{449}$. Ana sada želi oduzeti prirodan broj y od brojnika oba razlomka, te dodati broj y na nazivnike oba razlomka, tako da novodobijeni razlomci budu jednaki. Odrediti sve mogućnosti za y. Odgovor obrazložiti.

VII RAZRED

Zadatak 1. Trougao ΔABC je oštrougli trougao u kojem je $\overline{AB} < \overline{AC}$. Neka su $\overline{AD}$ visina i $\overline{AE}$ simetrala ugla, pri čemu $D, E \in \overline{BC}$. U oštrouglom trouglu $\Delta A'B'C'$ u kojem je $\overline{A'B'} < \overline{A'C'}$ neka su $\overline{A'D'}$ visina i $\overline{A'E'}$ simetrala ugla, pri čemu $D', E' \in \overline{B'C'}$. Ako je $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AD} = \overline{A'D'}$ i $\overline{AE} = \overline{A'E'}$, dokazati da su trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ podudarni.

Zadatak 2. Tarik je na papiru počeo pisati listu prirodnih brojeva, redom, isključujući sve one koji su djeljivi sa 5. Početak njegove liste izgleda ovako
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17,… .

a) Na kojem mjestu na listi se nalazi broj 2023?
b) Koji broj na listi se nalazi na 2023. mjestu?
c) Odredite zbir prvih 2023 brojeva na Tarikovoj listi.

Zadatak 3. Djed ima četiri unuka (različite starosti). Proizvod njihovih godina je 7392. Ako je poznato da najmlađi unuk ima manje od 10 godina i da je tačno 20 godina mlađi od najstarijeg unuka, odrediti koliko godina može imati svaki od unuka.

Zadatak 4. Amarov cilj je da u tabelu 3×5 upiše brojeve $1, 2, \dots, 15$ (svaki po jednom) tako da je zbir brojeva u svakoj koloni (počevši od druge) za 3 veći od zbira brojeva u prethodnoj koloni. Međutim, primijetio je da je Adisa već upisala brojeve 14,6,5,2 u tabelu (slika). Na koliko načina Amar može upisati preostale brojeve tako da ostvari svoj cilj?

				2
14			**5**	
		6		

Zadatak 5. Neka su tačke E, F, G redom sredine stranica AB, BC, AD četverougla $ABCD$. Poznato je da je GE okomito na AB, GF okomito na BC, te $\angle DGC = 30°$.

a) Odrediti ugao $\angle GCD$;
b) Odrediti koliko je puta ugao $\angle ABD$ veći od ugla $\angle DBC$;
c) Ako se prave AB i CD sijeku u P, a prave EF i BD u Q, dokazati da je PQ okomito na DE.

VIII RAZRED

Zadatak 1. Dat je pravougli trougao ΔABC sa pravim uglom u vrhu C. Tačka M je sredina stranice BC, a tačke P i Q pripadaju stranicama BC i AB redom tako da vrijedi $PQ \parallel AM$. Ako je $BC = 8$, $AC = \sqrt{105}$ i $PQ = \frac{11}{3}$, odrediti obim četverougla $AMPQ$.

Zadatak 2. Roditelji imaju troje djece: Adnu, Belmu i Farisa. Roditelji su kupili pet različitih igračaka, i žele da ih podijele djeci tako da svako dijete dobije barem jednu igračku. Na koliko načina oni to mogu uraditi?
Napomena: bitno je koje dijete dobije koju igračku. Na primjer, ako igračke označimo sa I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, podjela u kojoj Adna dobije I_1 i I_2, Belma I_3, a Faris I_4 i I_5 je različita od podjele u kojoj Adna dobije I_1 i I_3, Belma I_5, a Faris I_2 i I_4 (iako je svako dijete dobilo isti broj igračaka u obje podjele).

Zadatak 3. Na rođendanskoj proslavi bilo je određen broj dječaka (barem tri) i određen broj djevojčica (barem dvije). Svaki dječak je svakoj djevojčici dao po jednu bombonu, a svaka djevojčica je svakom dječaku dala po jednu bombonu. Zatim je svaki dječak pojeo po dvije bombone i svaka djevojčica po tri bombone. Ispostavilo se da je tako pojedeno 25% svih bombona. Koja je najveća moguća vrijednost ukupnog broja djece na toj proslavi?

Zadatak 4. Na raspolaganju je 500 bijelih i 500 crnih kartica. Na svaku je napisan neki realan broj različit od 0. Ove kartice su raspoređene ukrug tako da su svake dvije susjedne kartice na krugu različite boje. Ispostavilo se da je svaki broj na crnoj kartici jednak sumi dva broja na susjednim bijelim karticama, te da je svaki broj na bijeloj kartici jednak proizvodu dva broja na susjednim crnim karticama.

a) Odrediti sumu svih brojeva na bijelim karticama.
b) Koje sve vrijednosti može uzeti suma brojeva na svim karticama?

Zadatak 5. U trouglu ΔABC vrijedi $BC > AC$. Tačke P i Q leže na duži BC tako da vrijedi $CP = \frac{BC+AC}{3}$ i $CQ = \frac{BC-AC}{3}$. Ako je tačka T težište trougla ΔABC, dokazati da je $\angle PTQ = 90°$.

IX RAZRED

Zadatak 1. Riješiti sljedeći sistem jednačina u skupu realnih brojeva:

$$\frac{xy}{3x+2y}=\frac{1}{8},$$
$$\frac{xy}{2x+3y}=\frac{1}{7}.$$

Zadatak 2. Neka su p, q, r, s prosti brojevi takvi da vrijedi

$$5 < p < q < r < s < p + 10.$$

Dokazati da je broj $p + q + r + s$ djeljiv sa 60.

Zadatak 3. U paralelogramu $ABCD$ ($AB||CD$, $BC||AD$) vrijedi $AD = BD$. Neka je E tačka na duži BD tako da vrijedi $AE = DE$. Prava AE siječe duž BC u tački F. Ispostavilo se da je prava DF simetrala ugla $\angle CDE$. Odrediti veličinu ugla $\angle ABD$.

Zadatak 4. Odrediti najveću moguću vrijednost izraza $x - y$, ako su x, y, z realni brojevi koji zadovoljavaju sljedeća dva uslova:

$$x + y + z = 2,$$
$$xy + yz + zx = 1.$$

Zadatak 5. Redovi i kolone ploče dimenzije 29×29 numerisani su redom brojevima $1,2, \dots, 29$ odozdo prema gore i s lijeva na desno. Neka polja ploče su obojana u crno. Za svako crno polje vrijedi da postoji najviše jedno drugo crno polje koje se nalazi u redu većem ili jednakom od reda tog polja i u koloni većoj ili jednakoj od kolone tog polja. Odrediti najveći mogući broj crnih polja na ploči.

Rješenja zadataka i šema bodovanja

VI RAZRED

Zadatak 1. Odrediti sve parove (a, b) prirodnih brojeva takvih da vrijedi $\frac{a}{12} + \frac{b}{6} = 2$ i $\frac{1}{3} < \frac{a}{15} < \frac{3}{5}$. Odgovor obrazložiti.

Rješenje:

Svođenjem na zajednički nastavnik, drugi uslov se svodi na $\frac{5}{15} < \frac{a}{15} < \frac{9}{15}$, odakle zaključujemo da $a \in \{6,7,8\}$.

Za $a = 6$ prvi uslov se svodi na $\frac{6}{12} + \frac{b}{6} = 2$, tj. $\frac{1}{2} + \frac{b}{6} = 2$, odakle je $\frac{b}{6} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, pa dobijamo $b = 9$.

Za $a = 7$ prvi uslov se svodi na $\frac{7}{12} + \frac{b}{6} = 2$, odakle je $\frac{b}{6} = \frac{17}{12}$, pa dobijamo $b = \frac{17}{2}$, što nije prirodan broj.

Za $a = 8$ prvi uslov se svodi na $\frac{8}{12} + \frac{b}{6} = 2$, tj. $\frac{2}{3} + \frac{b}{6} = 2$, odakle je $\frac{b}{6} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, pa dobijamo $b = 8$.

Dakle, rješenja su $(a, b) \in \{(6,9), (8,8)\}$.

Šema bodovanja:

- Svođenje drugog uslova na zajednički nazivnik – 2 boda
- Zaključak $a \in \{6,7,8\}$ – 2 boda
- Rješavanje slučajeva $a \in \{6,7,8\}$ – 6 bodova (svaki slučaj po 2 boda)

Zadatak 2. Prirodni brojevi $1,2,3,\dots,1999,2000$ su zapisani jedan za drugim (bez razmaka ili zareza), tako da se dobije broj $123456789101112 \dots 19992000$.

d) Koliko cifara ima taj broj? Odgovor obrazložiti.
e) Koja cifra se nalazi na $2023.$ mjestu u tom broju? Odgovor obrazložiti.
f) Koliko puta se cifra 1 pojavljuje u tom broju? Odgovor obrazložiti.

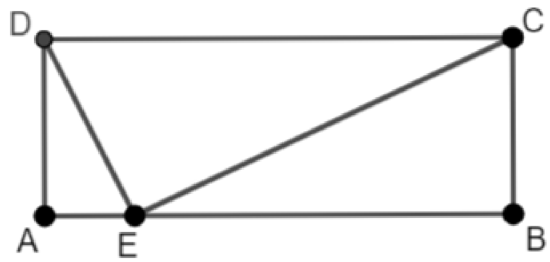
Rješenje:

a) Kako među brojevima $1,2,3,\dots,1999,2000$ imamo 9 jednocifrenih, 90 dvocifrenih, 900 trocifrenih i 1001 četverocifreni broj, to je ukupan broj cifara jednak $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1001 \cdot 4 = 6893$.
b) Primijetimo da nam jednocifreni i dvocifreni brojevi zajedno imaju $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 = 189$ cifara. Dakle, zanima nas $2023 - 189 = 1834$. cifra počevši od broja 100. Kako je $1833 : 3 = 611$, to brojevi $100,101,102,\dots,710$ zajedno imaju 1833 cifre, tako da je 1834. cifra jednaka 7.
c) Primijetimo da među brojevima $1,2,\dots,99$ postoji 20 jedinica (brojevi $1,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,21,31,41,51,61,71,81,91$). Također, primijetimo da među brojevima oblika $\overline{2bc}$ ima također 20 jedinica (jer ih ima isto kao u broejvima $1,2,\dots,99$). Slično vrijedi za brojeve oblika $\overline{3bc}, \overline{4bc}, \dots, \overline{9bc}$. S druge strane, među brojevima oblika $\overline{1bc}$ imamo $100 + 20 = 120$ jedinica (jer svaki od tih 100 brojeva počinje cifrom 1). Dakle, među brojevima $1,2,\dots,999$ ima $9 \cdot 20 + 120 = 300$ jedinica. Međutim, svaki od brojeva $1000, 1001, \dots, 1999$ ima tačno jednu jedinicu više u odnosu na brojeve $0,1,\dots,999$ (redom), pa među tim brojevima ima $1000 + 300 = 1300$ jedinica. Dakle, ukupno ima $300 + 1300 = 1600$ jedinica.

Šema bodovanja:

- dio pod a) nosi 3 boda
- dio pod b) nosi 3 boda
- dio pod c) nosi 4 boda

Zadatak 3. Obim pravougaonika $ABCD$ je $104\ cm$. Na stranici AB je data tačka E tako da je duž BE sedam puta duža od duži AE. Obim trougla AED iznosi $30\ cm$, obim trougla BEC iznosi 84 cm, a obim trougla CED iznosi $90\ cm$. Odrediti dužine duži DE i CE. Odgovor obrazložiti.



Rješenje:

Neka je $AE = x$, tada je $BE = 7x$. Dalje, neka je $AD = BC = a$, $AB = CD = b$. Iz uslova zadatka je $2a + 2b = 104\ cm$, pa je $a + b = 52\ cm$. S druge strane, kako je obim trougla ADE jednak $30\ cm$, to je $a + AE + DE = 30\ cm$, a kako je obim trougla BEC jednak $84\ cm$, to je $a + BE + EC = 84\ cm$, te kako je obim trougla CED jednak $90\ cm$, to je $CE + DE + b = 90\ cm$. Sabiranjem posljednje 3 relacije dobijamo $a + AE + DE + a + BE + EC + CE + DE + b = 30 + 84 + 90 = 204\ cm$. Kako je $AE + BE = b$, posljednja relacija se svodi na $2a + 2b + 2 \cdot CE + 2 \cdot DE = 204$, tj. $104 + 2 \cdot CE + 2 \cdot DE = 204$, odakle je $2 \cdot CE + 2 \cdot DE = 100$, odakle je $CE + DE = 50\ cm$. Kako je $CE + DE + b = 90\ cm$, to je $b = 40\ cm$, odakle je $x + 7x = 40\ cm$, tj. $8x = 40\ cm$, odakle je $x = 5\ cm$. Iz $a + b = 52\ cm$, to je $a = 12\ cm$. Kako je $a + x + DE = 30\ cm$, dobijamo $DE = 13\ cm$. Iz $CE + DE = 50\ cm$ dobijamo $CE = 37\ cm$.

Šema bodovanja:

- dobijanje relacije $CE + DE = 50\ cm$ – 3 boda
- izračunavanje b – 1 bod
- izračunavanje a – 1 bod
- određivanje dužina duži AE i BE – 3 boda
- određivanje dužina duži CE i DE – 2 boda (svaka duž po 1 bod)

Zadatak 4. Dino je zamislio neki prirodan broj n. Pri dijeljenju broja 409 sa n dobio je ostatak 1, a pri dijeljenju broja 554 sa n dobio je ostatak 2. S druge strane, pri dijeljenju broja 827 sa $n+1$ dobio je ostatak 8. Odrediti sve mogućnosti za broj n. Odgovor obrazložiti.

Rješenje:
Kako je pri dijeljenju broja 409 sa n dobijen ostatak 1, to je broj 408 djeljiv sa n. Slično zaključujemo da je broj 552 djeljiv sa n. Dakle, broj n dijeli brojeve $408 = 24 \cdot 17$ i $552 = 24 \cdot 23$, pa dijeli njihov najveći zajednički djelilac 24. S druge strane, kako je pri dijeljenju broja 827 sa $n+1$ dobijen ostatak 8, to vrijedi $n+1 > 8$ (jer je ostatak uvijek manji od djelioca), tj. $n > 7$. Dakle, $n \in \{8,12,24\}$. Međutim, broj $n+1$ mora dijeliti $827 - 8 = 819 = 9 \cdot 91 = 9 \cdot 7 \cdot 13$. Kako ovaj broj jeste djeljiv sa 9 i 13, a nije sa 25, to su jedina rješenja $n = 8$ i $n = 12$.

Šema bodovanja:

- zaključak da broj n dijeli 408 – 1 bod
- zaključak da broj n dijeli 552 – 1 bod
- zaključak da n dijeli 24 – 3 boda
- zaključak da $n+1$ dijeli 819 – 1 bod
- zaključak da je $n > 7$ – 1 bod
- završetak dokaza – 3 boda

Zadatak 5.

a) Dati su razlomci $\frac{2023}{2019}$ i $\frac{2101}{2073}$. Ana želi oduzeti prirodan broj x od brojnika i nazivnika i jednog i drugog razlomka, tako da novodobijeni razlomci budu jednaki. Odrediti sve mogućnosti za broj x. Odgovor obrazložiti.

b) Dati su razlomci $\frac{2023}{2027}$ i $\frac{901}{449}$. Ana sada želi oduzeti prirodan broj y od brojnika oba razlomka, te dodati broj y na nazivnike oba razlomka, tako da novodobijeni razlomci budu jednaki. Odrediti sve mogućnosti za y. Odgovor obrazložiti.

Rješenje:

a) Primijetimo da ako od brojnika i nazivnika oduzmemo isti broj, razlika između brojnika i nazivnika se ne mijenja. Kako je kod prvog razlomka ta razlika jednaka 4, a kod drugog 28, to će i nakon oduzimanja razlika kod prvog razlomka biti 4, a kod drugog 28, tj. razlika kod drugog razlomka će biti 7 puta veća. Kako će ovi razlomci biti jednaki, to će i brojnik drugog razlomka biti 7 puta veći od brojnika prvog razlomka, odakle je $7(2023 - x) = 2101 - x$, odakle se dobija $x = 2010$.

b) Primijetimo da ako od brojnika oduzmemo neki broj, a na nazivnik dodamo taj broj, zbir brojnika i nazivnika se ne mijenja. Kako je kod prvog razlomka zbir brojnika i nazivnika 4050, a kod drugog 1350, tj. zbir brojnika i nazivnika kod prvog razlomka je 3 puta veći od zbira brojnika i nazivnika drugog razlomka. Kako će ti razlomci biti jednaki, brojnik prvog razlomka mora biti također 3 puta veći od brojnika drugog razlomka (samim tim je i nazivnik 3 puta veći), pa dobijamo $2023 - y = 3 \cdot (901 - y)$, odakle je $y = 340$.

Šema bodovanja:

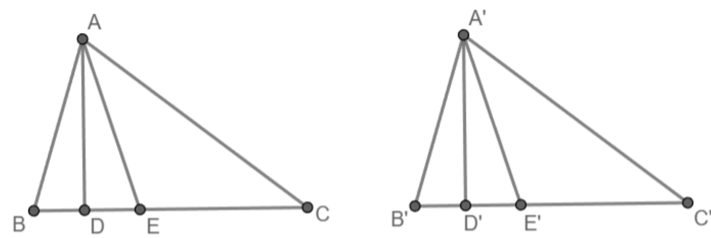
- dio pod a) nosi 5 bodova, i to:
  - 2 boda za zaključak da će razlika brojnika i nazivnika drugog razlomka biti 7 puta veća od razlika brojnika i nazivnika prvog razlomka
  - 2 boda za zaključak da to znači da će brojnik (ili nazivnik) biti 7 puta veći
  - 1 bod za dobijanje broja x
- dio pod b) nosi 5 bodova, i to:
  - 2 boda za zaključak da će zbir brojnika i nazivnika prvog razlomka biti 3 puta veći od zbira brojnika i nazivnika drugog razlomka
  - 2 boda za zaključak da to znači da će brojnik (ili nazivnik) biti 3 puta veći
  - 1 bod za dobijanje broja y

VII RAZRED

Zadatak 1. Trougao ΔABC je oštrougli trougao u kojem je $\overline{AB} < \overline{AC}$. Neka su $\overline{AD}$ visina i $\overline{AE}$ simetrala ugla, pri čemu $D, E \in \overline{BC}$. U oštrouglom trouglu $\Delta A'B'C'$ u kojem je $\overline{A'B'} < \overline{A'C'}$ neka su $\overline{A'D'}$ visina i $\overline{A'E'}$ simetrala ugla, pri čemu $D', E' \in \overline{B'C'}$. Ako je $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AD} = \overline{A'D'}$ i $\overline{AE} = \overline{A'E'}$, dokazati da su trouglovi ΔABC i $\Delta A'B'C'$ podudarni.

Rješenje:

Za trouglove ΔABD i $\Delta A'B'D'$ imamo da vrijedi $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$ i $\angle ADB \cong \angle A'D'B'$ (pravi uglovi), pa na osnovu stava SSU (stranica-stranica-ugao nasuprot veće stranice) o podudarnosti trouglova, zaključujemo da je $\Delta ABD \cong \Delta A'B'D'$. Odavde slijedi da je $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ i $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$.



Za trouglove ΔADE i $\Delta A'D'E'$ imamo da vrijedi $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$, $\overline{AE} \cong \overline{A'E'}$ i $\angle ADE \cong \angle A'D'E'$ (pravi uglovi), pa na osnovu stava SSU (stranica-stranica-ugao nasuprot veće stranice) o podudarnosti trouglova, zaključujemo da je $\Delta ADE \cong \Delta A'D'E'$. Odavde slijedi da je $\angle DAE \cong \angle D'A'E'$.

Iz $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ i $\angle DAE \cong \angle D'A'E'$, zaključujemo da je

$$\angle BAE = \angle BAD + \angle DAE \cong \angle B'A'D' + \angle D'A'E' = \angle B'A'E'.$$

Kako su $\overline{AE}$ i $\overline{A'E'}$ simetrale uglova $\angle BAC$ i $\angle B'A'C'$ i $\angle BAE \cong \angle B'A'E'$, to vrijedi $\angle EAC \cong \angle E'A'C'$ i $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.

Napokon, iz $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ i $\angle ABC = \angle ABD \cong \angle A'B'D' = \angle A'B'C'$, na osnovu stava USU (ugao-stranica-ugao) o podudarnosti trouglova slijedi da je $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

- dokaz da je $\angle BAD \cong \angle B'A'D'$ i $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$ 3 boda
- dokaz da je $\angle DAE \cong \angle D'A'E'$ 2 boda
- dokaz da je $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ 3 boda
- dokaz da je $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ 2 boda

Napomena: Uslov $\overline{AB} < \overline{AC}$ nam garantira da je raspored tačaka $B - D - E - C$.

Zadatak 2. Tarik je na papiru počeo pisati listu prirodnih brojeva, redom, isključujući sve one koji su djeljivi sa 5. Početak njegove liste izgleda ovako

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17,… .

d) Na kojem mjestu na listi se nalazi broj 2023? Odgovor obrazložiti!
e) Koji broj na listi se nalazi na 2023. mjestu? Odgovor obrazložiti!
f) Odredite zbir prvih 2023 brojeva na Tarikovoj listi.

Rješenje:

Primijetimo da je među svakih 5 uzastopnih prirodnih brojeva tačno jedan djeljiv sa 5.

a) Među prvih 2020 prirodnih brojeva, tačno $\frac{1}{5}$ njih je djeljivih sa 5. To znači da će broj 2023 biti na $2020 \cdot \frac{4}{5} + 3 = 1616 + 3 = 1619$. mjestu na Tarikovoj listi (naime, broj 2019 će biti na 1616. Mjestu, pa nakon njega slijede brojevi 2021, 2022 i 2023).
b) Posmatrajmo prirodne brojeve od 1 do n, pri čemu je n višekratnik broja 5 (djeljiv brojem 5). Od ovih n prirodnih brojeva, Tarikov popis sadrži $\frac{4}{5}n$ prirodnih brojeva. Dakle, do $n = \frac{5}{4} \cdot 2020 = 2525$ na Tarikovoj listi se nalazi tačno 2020 brojeva. Budući da broj 2525 nije na Tarikovoj listi, sljedeća tri broja su redom 2526, 2527 i 2528. Odavde zaključujemo da je broj koji se nalazi na 2023. mjestu broj 2528.
c) Da bismo odredili zbir prvih 2023 brojeva na Tarikovoj listi, saberimo sve prirodne brojeve od 1 do 2528, I od njih oduzmimo zbir brojeva koji su manji od 2528 i djelijivi sa 5. Naime, tražena suma je jednaka

$$\begin{aligned} S &= (1 + 2 + 3 + \cdots + 2528) - (5 + 10 + 15 + \cdots + 2525) \\ &= \frac{2528 \cdot 2529}{2} - 5 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 505) = \frac{2528 \cdot 2529}{2} - 5 \cdot \frac{505 \cdot 506}{2} \\ &= 3196656 - 638825 = 2557831. \end{aligned}$$

Napomena: Pod c) smo koristili formulu za zbir prvih n prirodnih brojeva (tzv. Gaussova dosjetka)

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Šema bodovanja:

- dio pod a) 3 boda
- dio pod b) 4 boda
- dio pod c) 3 boda

Zadatak 3. Djed ima četiri unuka (različite starosti). Proizvod njihovih godina je 7392. Ako je poznato da najmlađi unuk ima manje od 10 godina i da je tačno 20 godina mlađi od najstarijeg unuka, odrediti koliko godina može imati svaki od unuka.

Rješenje:

Rastavimo broj 7392 na proste faktore, imamo $7392 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$.

Iz uslova zadatka najmlađi unuk bi mogao imati 1, 2, 3, 4, 6, 7 ili 8 godina.

Ako pretpostavimo da najmlađi unuk ima 1 godinu, najstariji mora imati 21 godinu (što možemo dobiti kao $3 \cdot 7$). Jedan od unuka tada mora imati 11 godina, pa preostaje da četvrti unuk ima $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ godine, što je kontradikcija sa činjenicom da najstariji unuk ima 21 godinu. Dakle, najmlađi unuk ne može imati 1 godinu.

Ako preptostavimo da najmlađi unuk ima 2 godine, najstariji mora imati 22 godine (što možemo dobiti kao $2 \cdot 11$). Tada je proizvod godina preostala dva unuka jednak $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$. To je moguće ako jedan ima 8, a drugi 21 godinu, ili jedan ima 12 a drugi 14 godina. Dakle, u ovom slučaju moguće godine unuka su 2, 8, 21, 22 ili 2, 12, 14, 22.

Ako preptostavimo da najmlađi unuk ima 3 godine, najstariji mora imati 23 godine, što ne možemo dobiti pomoću preostalih faktora broja 7392. Dakle, najmlađi unuk ne može imati 3 godine.

Ako preptostavimo da najmlađi unuk ima 4 godine, najstariji mora imati 24 godine (što možemo dobiti kao $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$). Tada je proizvod godina preostala dva unuka jednak $7 \cdot 11$, a to je jedino moguće ako jedan ima 7, a drugi 11 godina. Dakle, u ovom slučaju moguće godine unuka su 4, 7, 11, 24.

Ako preptostavimo da najmlađi unuk ima 6 godina, najstariji mora imati 26 godina, što ne možemo dobiti pomoću preostalih faktora broja 7392. Dakle, najmlađi unuk ne može imati 6 godina.

Ako preptostavimo da najmlađi unuk ima 7 godina, najstariji mora imati 27 godina, što ne možemo dobiti pomoću preostalih faktora broja 7392. Dakle, najmlađi unuk ne može imati 7 godina.

Ako preptostavimo da najmlađi unuk ima 8 godina, najstariji mora imati 28 godina, što možemo dobiti kao $2 \cdot 2 \cdot 7$. Tada nam za preostala dva unuka ostanu faktori 3 i 11, a to nije moguće jer najmlađi unuk treba da ima 8 godina. Dakle, najmlađi unuk ne može imati 8 godina.

Dakle, tri su moguća slučaja za godine unuka koje zadovoljavaju uslove zadatka su: 2, 8, 21, 22 ili 2, 12, 14, 22 ili 4, 7, 11, 24.

Šema bodovanja:

- razmatranje slučaja kada najmlađi unuk ima 1 godinu 1 bod
- razmatranje slučaja kada najmlađi unuk ima 2 godine 3 boda
- razmatranje slučaja kada najmlađi unuk ima 3 godine 1 bod
- razmatranje slučaja kada najmlađi unuk ima 4 godine 2 boda
- razmatranje slučaja kada najmlađi unuk ima 6 godina 1 bod
- razmatranje slučaja kada najmlađi unuk ima 7 godina 1 bod
- razmatranje slučaja kada najmlađi unuk ima 8 godina 1 bod

Napomena: U slučaju da je učenik ispravno rastavio broj 7392 na proste faktore, a nije ispravno uradio niti jedan slučaj može dobiti 1 bod. Taj bod nije aditivan sa drugim bodovima na zadatku ako ih ima.

Zadatak 4. Amarov cilj je da u tabelu 3×5 upiše brojeve $1, 2, \ldots, 15$ (svaki po jednom) tako da je zbir brojeva u svakoj koloni (počevši od druge) za 3 veći od zbira brojeva u prethodnoj koloni. Međutim, primijetio je da je Adisa već upisala brojeve $14, 6, 5, 2$ u tabelu (vidi sliku ispod). Na koliko načina Amar može upisati preostale brojeve tako da ostvari svoj cilj? Odgovor obrazložiti!

				2
14			**5**	
		6		

Rješenje:
Zbir brojeva koje Amar mora upisati u tabelu jednak je

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 15 = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120.$$

Označimo sa x zbir brojeva koje treba upisati u treću kolonu (srednju kolonu). Tada je zbir brojeva u prvoj koloni jednak $x - 6$, u drugoj jednak $x - 3$, četvrtoj $x + 3$ i u petoj $x + 6$. To znači da je

$$(x - 6) + (x - 3) + x + (x + 3) + (x + 6) = 120,$$

tj.

$$5x = 120.$$

Odavde je $x = 24$. Dakle, zbir brojeva u prvoj koloni je jednak 18, u drugoj 21, u trećoj 24, u četvrtoj 27 i u petoj 30.
Kako je u petoj koloni već upisan broj 2, to na preostala dva mjesta moraju biti upisani brojevi čiji je zbir jednak $30 - 2 = 28$. To znači da u petoj koloni moraju biti upisani brojevi 13 i 15 (jer je broj 14 već upisan u prvoj koloni).
U četvrtoj koloni je već upisan broj 5, pa dva preostala broje moraju dati zbir jednak $27 - 5 = 22$. To je jedino moguće ako su u toj koloni upisani brojevi 10 i 12.
U trećoj koloni je već upisan broj 6, pa dva preostala broja moraju dati zbir jednak $24 - 6 = 18$. S obzirom na već prethodno iskorištene brojeve, to je jedino moguće ako su u toj koloni upisani još brojevi 7 i 11.
U prvoj koloni je upisan broj 14, pa zbir preostala dva broja mora biti jednak $18 - 14 = 4$. To nam daje da u prvoj koloni moraju biti upisani brojevi 1 i 3.
Sada nam preostaju brojevi 4, 8 i 9 koje treba upisati u drugu kolonu.
Dakle, prvu, treću, četvrtu i petu kolonu možemo popuniti na po dva načina (jer upisujemo po dva broja kojima možemo zamijeniti mjesta), dok drugu kolonu možemo popuniti na $3 \cdot 2 = 6$ načina (prvo mjesto možemo popuniti na 3 načina, drugo na 2 načina i na treće mjesto upišemo preostali broj).
Dakle, ukupan broj načina na koji Amar može popuniti tabelu iznosi $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 96$ načina.

Šema bodovanja:

- određivanje koliko mora biti zbir brojeva po kolonama 2 boda
- određivanje koji brojevi moraju biti upisani u koju kolonu sa detaljnim obrazloženjem 5 bodova
- određivanje tačnog broja načina 3 boda

Zadatak 5. Neka su tačke E, F, G redom sredine stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AD}$ četverougla $ABCD$. Poznato je da je $\overline{GE}$ okomito na $\overline{AB}$, $\overline{GF}$ okomito na $\overline{BC}$, te $\angle DGC = 30°$.

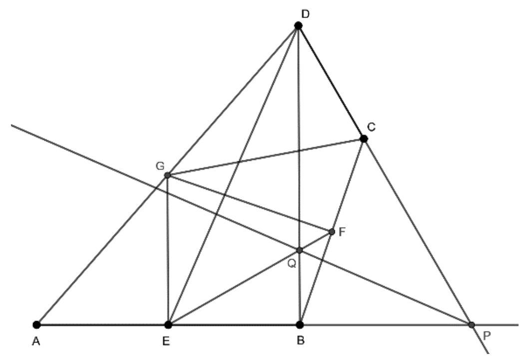
d) Odrediti ugao $\angle GCD$.

e) Odrediti koliko je puta ugao $\angle ABD$ veći od ugla $\angle DBC$.

f) Ako se prave AB i CD sijeku u tački P, a prave EF i BD u tački Q, dokazati da je PQ okomito na DE.

Rješenje:

a) Kako je GE okomito na AB, to je EG u trouglu ABG i visina i težišnica, te je taj trougao jednakokraki, tj. $GA = GB$. Analogno je $GB = GC$. Sada je $GD = GA = GB = GC$. Kako je trougao GCD jednakokraki, to je $\angle GDC = \angle GCD = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$.



b) Primijetimo da je GE srednja linija trougla ABD, te je $GE || BD$. Kako je GE okomito na AB, to je i BD okomito na AB, tj. vrijedi $\angle ABD = 90°$. S druge strane, kako je $GD = GA = GB = GC$, to je G centar kružnice opisane oko četverougla $ABCD$. Zbog toga je $\angle DBC = \frac{\angle DGC}{2} = \frac{30°}{2} = 15°$ (odnos centralnog i periferijskog ugla). Dakle, $\angle ABD = 90° = 6 \cdot 15° = 6 \cdot \angle DBC$.

c) Kako je $GA = GB = GC = GD$, to je AD prečnik kružnice opisane oko trougla $ABCD$, pa je $\angle DCA = 90°$. Kako je EF srednja linija trougla ABC, to je i EF okomito na CD. Kako je $\angle ABD = 90°$, to je BD okomito na AB. Sada primjećujemo da je Q ustvari ortocentar trougla EPD, pa je PQ okomito na ED.

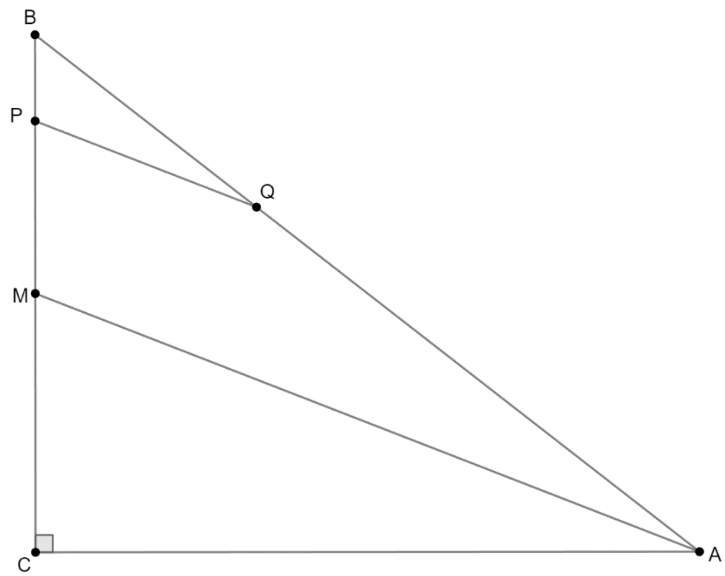
Šema bodovanja:

- Zaključak $GA = GD = GB = GC$ – 1 bod
- Izračunavanje ugla $\angle GDC$ – 1 bod
- zaključak da je $\angle ABD = 90°$ - 2 boda
- zaključak da je $\angle DBC = 15°$ - 2 boda
- Zaključak da je EF okomito na CD – 1 bod
- Zaključak da je BD okomito na AB – 1 bod
- Završetak dokaza – 2 boda

VIII RAZRED

Zadatak 1. Dat je pravougli trougao ΔABC sa pravim uglom u vrhu C. Tačka M je sredina stranice BC, a tačke P i Q pripadaju stranicama BC i AB redom tako da vrijedi $PQ \parallel AM$. Ako je $BC = 8$, $AC = \sqrt{105}$ i $PQ = \frac{11}{3}$, odrediti obim četverougla $AMPQ$.

Rješenje



Kako je M sredina stranice BC, to je $BM = CM = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao ΔABC dobijamo

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\sqrt{105}\right)^2 + 8^2} = \sqrt{105 + 64} = \sqrt{169} = 13,$$

a primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao ΔAMC dobijamo

$$AM = \sqrt{AC^2 + MC^2} = \sqrt{\left(\sqrt{105}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{105 + 16} = \sqrt{121} = 11.$$

Kako je $PQ \parallel AM$, iz Talesove teoreme imamo

$$\frac{BQ}{BA} = \frac{BP}{BM} = \frac{PQ}{AM} = \frac{\frac{11}{3}}{11} = 1/3,$$

odakle dobijamo $BQ = \frac{BA}{3} = \frac{13}{3}$ i $BP = \frac{BM}{3} = \frac{4}{3}$. Sada je $MP = BM - BP = \frac{8}{3}$ i $AQ = AB - BQ = \frac{26}{3}$.
Zaključujemo, obim četverougla $AMPQ$ je $AM + MP + PQ + AQ = 11 + \frac{8}{3} + \frac{11}{3} + \frac{13}{3} = \frac{65}{3}$.

Šema bodovanja

- Izračunavanje dužine duži AB: **1 bod**
- Izračunavanje dužine duži AM: **2 boda**
- Primjena Talesove teoreme na prave PQ i AM: **2 boda**
- Izračunavanje dužina duži MP i AQ: **4 boda**
    - Izračunavanje dužine jedne od ovih duži vrijedi **2** od ova 4 boda
- Dobivanje tačnog rezultata: **1 bod**

Zadatak 2. Roditelji imaju troje djece: Adnu, Belmu i Farisa. Roditelji su kupili pet različitih igračaka, i žele da ih podijele djeci tako da svako dijete dobije barem jednu igračku. Na koliko načina oni to mogu uraditi?
Napomena: bitno je koje dijete dobije koju igračku. Na primjer, ako igračke označimo sa I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, podjela u kojoj Adna dobije I_1 i I_2, Belma I_3, a Faris I_4 i I_5 je različita od podjele u kojoj Adna dobije I_1 i I_3, Belma I_5, a Faris I_2 i I_4 (iako je svako dijete dobilo isti broj igračaka u obje podjele).

Rješenje 1
Dvije su mogućnosti za podjelu igračaka:
1° Jedno dijete dobija jednu igračku, a dvoje djece po dvije igračke.
Igračku za prvo dijete možemo odabrati na 5 načina, dvije igračke za drugo dijete na $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ načina (prvu igračku biramo od preostale 4, a drugu od preostale 3, te dijelimo sa 2 jer poredak igračaka nije bitan), te dvije igračke za treće dijete na 1 način (to su dvije preostale igračke). Dalje, na 3 načina možemo odabrati koje dijete dobija jednu igračku. Zaključujemo, ukupan broj načina podjele u ovom slučaju je $5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 3 = 90$.
2° Jedno dijete dobija tri igračke, a dvoje djece po jednu igračku.
Igračke za prvo dijete možemo odabrati na $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{6} = 10$ načina (prvu biramo od svih 5, drugu od preostale 4, treću od preostale 3, te dijelimo sa $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ jer poredatk igračaka nije bitan), igračku za drugo dijete na 2 načina (jednu od preostale dvije), a igračku za treće dijete na 1 način. Dalje, na 3 načina možemo odabrati koje dijete dobija tri igračke. Dakle, ukupan broj načina podjele u ovom slučaju je $10 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 30$.
Ukupan broj načina na koji roditelji mogu podijeliti igračke je $90 + 60 = 150$.

Šema bodovanja
- Navođenje dvije mogućnosti podjele igračaka iz rješenja: **1 bod**
- Prebrojavanje broja načina u prvom slučaju: **4 boda,** od čega:
  - Određivanje broja načina za svako dijete pojedinačno: **2 boda**
  - Dobivanje tačnog broja načina u ovom slučaju: **2 boda**
- Prebrojavanje broja načina u drugom slučaju: **4 boda,** od čega:
  - Određivanje broja načina za svako dijete pojedinačno: **2 boda**
  - Dobivanje tačnog broja načina u ovom slučaju: **2 boda**
- Dobivanje konačnog rezultata: **1 bod**

Rješenje 2
Ukoliko zanemarimo uslov da svako dijete mora dobiti barem jednu igračku, ukupan broj načina podjele je $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Naime, za svaku od 5 igračaka biramo jedno od troje djece koje će dobiti tu igračku. Od ovog broja potrebno je oduzeti broj podjela u kojima barem jedno dijete nije dobilo nijednu igračku. Ukoliko npr. Adna ne dobija nijednu igračku, tada za svaku igračku imamo dvije mogućnosti (dati je ili Belmi ili Farisu), pa je ukupan broj takvih podjela $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. Analogno dobijamo isti broj podjela ukoliko Belma, odnosno Faris ne dobija nijednu igračku. Dakle, broj podjela u kojima barem jedno dijete ne dobija nijednu igračku je $3 \cdot 32 = 96$. Međutim, u ovakvom brojanju smo podjele u kojima jedno dijete dobija sve igračke brojali po dva puta. Na primjer, podjelu u kojoj Adna dobija sve igračke smo brojali i kao podjelu u kojoj Belma ne dobija nijednu igračku, i kao podjelu u kojoj Faris ne

dobija ni jednu igračku. Broj podjela u kojima jedno dijete dobija sve igračke je 3 (a svaku od njih smo brojali dva puta), pa je stvarni broj podjela u kojima barem jedno dijete ne dobija nijednu igračku jednak $96 - 3 = 93$. Sada je broj podjela u kojima svako dijete dobija barem jednu igračku jednak $243 - 93 = 150$.

Šema bodovanja

- Određivanje broja podjela bez uslova da svako dijete dobija barem jednu igračku: **3 boda**
- Određivanje broja podjela takvih da jedno odabrano dijete ne dobije nijednu igračku: **2 boda**
- Određivanje broja podjela u kojima postoji dijete koje ne dobija nijednu igračku: **3 boda**
- Dobivanje konačnog rezultata: **2 boda**

Zadatak 3. Na rođendanskoj proslavi bilo je određen broj dječaka (barem tri) i određen broj djevojčica (barem dvije). Svaki dječak je svakoj djevojčici dao po jednu bombonu, a svaka djevojčica je svakom dječaku dala po jednu bombonu. Zatim je svaki dječak pojeo po dvije bombone i svaka djevojčica po tri bombone. Ispostavilo se da je tako pojedeno 25% svih bombona. Koja je najveća moguća vrijednost ukupnog broja djece na toj proslavi?

Rješenje 1

Označimo sa x i y redom broj dječaka i djevojčica na proslavi. Svaki dječak je dao po y bombona (po jednu svakoj djevojčici), pa su dječaci ukupno dali $x \cdot y$ bombona. Slično, svaka djevojčica je dala po x bombona, pa su djevojčice ukupno dale $y \cdot x$ bombona. Dakle, ukupni broj bombona na proslavi je $x \cdot y + y \cdot x = 2xy$

Dječaci su pojeli ukupno $x \cdot 2$ bombona, a djevojčice $y \cdot 3$, pa je pojedeno ukupno $2x + 3y$ bombona. Po uslovu zadatka to je $25\% = \frac{1}{4}$ ukupnog broja bombona, odakle dobijamo jednačinu

$$\frac{1}{4} \cdot 2xy = 2x + 3y \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2} \cdot xy = 2x + 3y \Leftrightarrow$$
$$xy = 4x + 6y \Leftrightarrow$$
$$xy - 6y = 4x \Leftrightarrow$$
$$y(x - 6) = 4x \Leftrightarrow$$
$$y = \frac{4x}{x - 6}.$$

Kako je y prirodan broj, to je i $\frac{4x}{x-6}$ prirodan broj. Imamo

$$\frac{4x}{x-6} = \frac{(4x - 24) + 24}{x - 6} = \frac{4x - 24}{x - 6} + \frac{24}{x - 6} = 4 + \frac{24}{x - 6}.$$

Da bi ovo bio prirodan broj, mora $\frac{24}{x-6}$ biti cio broj, što znači da $x - 6$ mora biti djelioc broja 24. Kako je $y = \frac{4x}{x-6}$ prirodan broj i kako je $4x > 0$, mora biti i $x - 6 > 0$. Imamo $x - 6 \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$, odnosno $x \in \{7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 18,\ 30\}$. Uvrštavajući u $y = \frac{4x}{x-6}$ dobijamo uređene parove $(x, y) \in \{(7, 28),\ (8, 16),\ (9, 12),\ (10, 10),\ (12, 8),\ (14, 7),\ (18, 6),\ (30, 5)\}$. Vidimo da se maksimalan broj djece dostiže kada je $(x, y) = (7, 28)$ i $(x, y) = (30, 5)$ i on iznosi 35.

Šema bodovanja

- Zaključak da je ukupan broj bombona na proslavi jednak $2xy$: **2 boda**
- Dobivanje jednačine $xy = 4x + 6y$: **2 boda**
- Zaključak da $x - 6 \mid 24$ (ili $y - 4 \mid 24$): **3 boda**
- Dobivanje svih mogućnosti za vrijednosti x i y: **2 boda**
- Dobivanje konačnog rezultata: **1 bod**

Rješenje 2

Na isti način kao u rješenju 1 dobijamo jednačinu $xy = 4x + 6y$. Imamo

$$xy = 4x + 6y \Leftrightarrow$$
$$xy - 4x - 6y = 0 \Leftrightarrow$$
$$xy - 4x - 6y + 24 = 24 \Leftrightarrow$$
$$x(y-4) - 6(y-4) = 24 \Leftrightarrow$$
$$(x-6)(y-4) = 24.$$

Kako je $x - 6 \geq -5$ i $y - 4 \geq -3$, to brojevi $x - 6$ i $y - 4$ ne mogu biti oba negativna, pa moraju biti oba pozitivna. Zato imamo slučajeve:

1° $x - 6 = 1,\ y - 4 = 24 \Rightarrow (x, y) = (7, 28)$
2° $x - 6 = 2,\ y - 4 = 12 \Rightarrow (x, y) = (8, 16)$
3° $x - 6 = 3,\ y - 4 = 8 \Rightarrow (x, y) = (9, 12)$
4° $x - 6 = 4,\ y - 4 = 6 \Rightarrow (x, y) = (10, 10)$
5° $x - 6 = 6,\ y - 4 = 4 \Rightarrow (x, y) = (12, 8)$
6° $x - 6 = 8,\ y - 4 = 3 \Rightarrow (x, y) = (14, 7)$
7° $x - 6 = 12,\ y - 4 = 2 \Rightarrow (x, y) = (18, 6)$
8° $x - 6 = 24,\ y - 4 = 1 \Rightarrow (x, y) = (30, 5)$

Vidimo da se najveća vrijednost ukupnog broja djece dostiže kada je $(x, y) = (7, 28)$ ili $(x, y) = (30, 5)$ i iznosi 35.

Šema bodovanja

- Zaključak da je ukupan broj bombona na proslavi jednak $2xy$: **2 boda**
- Dobivanje jednačine $xy = 4x + 6y$: **2 boda**
- Dobivanje jednačine $(x-6)(y-4) = 24$: **3 boda**
- Dobivanje svih mogućnosti za vrijednosti x i y: **2 boda**
- Dobivanje konačnog rezultata: **1 bod**

Zadatak 4. Na raspolaganju je 500 bijelih i 500 crnih kartica. Na svaku je napisan neki realan broj različit od 0. Ove kartice su raspoređene ukrug tako da su svake dvije susjedne kartice na krugu različite boje. Ispostavilo se da je svaki broj na crnoj kartici jednak sumi dva broja na susjednim bijelim karticama, te da je svaki broj na bijeloj kartici jednak proizvodu dva broja na susjednim crnim karticama.

c) Odrediti sumu svih brojeva na bijelim karticama.

d) Koje sve vrijednosti može uzeti suma brojeva na svim karticama?

Rješenje:

Označimo sa $b_1, b_2, \dots, b_{500}$ brojeve na bijelim karticama, a sa $c_1, c_2, \dots, c_{500}$ brojeve na crnim karticama, tako da se na krugu brojevi nalaze sljedećim redoslijedom: $b_1, c_1, b_2, c_2, b_3, c_3, \dots, b_{499}, c_{499}, b_{500}, c_{500}$ (jasno, nakon c_{500} slijedi b_1 jer su brojevi na krugu). Broju c_2 susjedni su b_2 i b_3, pa po uslovu zadatka vrijedi $c_2 = b_2 + b_3$. Broju b_2 susjedni su c_1 i c_2, a broju b_3 susjedni su c_2 i c_3. Zato vrijedi $b_2 = c_1 \cdot c_2$ i $b_3 = c_2 \cdot c_3$. Sada imamo $c_2 = b_2 + b_3 = c_1 \cdot c_2 + c_2 \cdot c_3$, pa dijeljenjem sa c_2 (po uslovu zadatka on je različit od 0) dobijamo $1 = c_1 + c_3$. Analogno dobijamo $c_2 + c_4 = 1, c_3 + c_5 = 1, \dots c_{497} + c_{499} = 1$, $c_{498} + c_{500} = 1$. Sada je suma brojeva na crnim karticama jednaka

$$(c_1 + c_3) + (c_5 + c_7) + \cdots (c_{497} + c_{499}) + (c_2 + c_4) + (c_6 + c_8) \dots + (c_{498} + c_{500}) = 250,$$

jer ima 250 sabiraka jednakih 1.

Kako je svaki broj na crnoj kartici jednak sumi susjednih brojeva na bijelim karticama, imamo

$$\begin{aligned} 250 = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{500} &= (b_1 + b_2) + (b_2 + b_3) + (b_3 + b_4) + \cdots (b_{500} + b_1) \\ &= 2 \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{500}), \end{aligned}$$

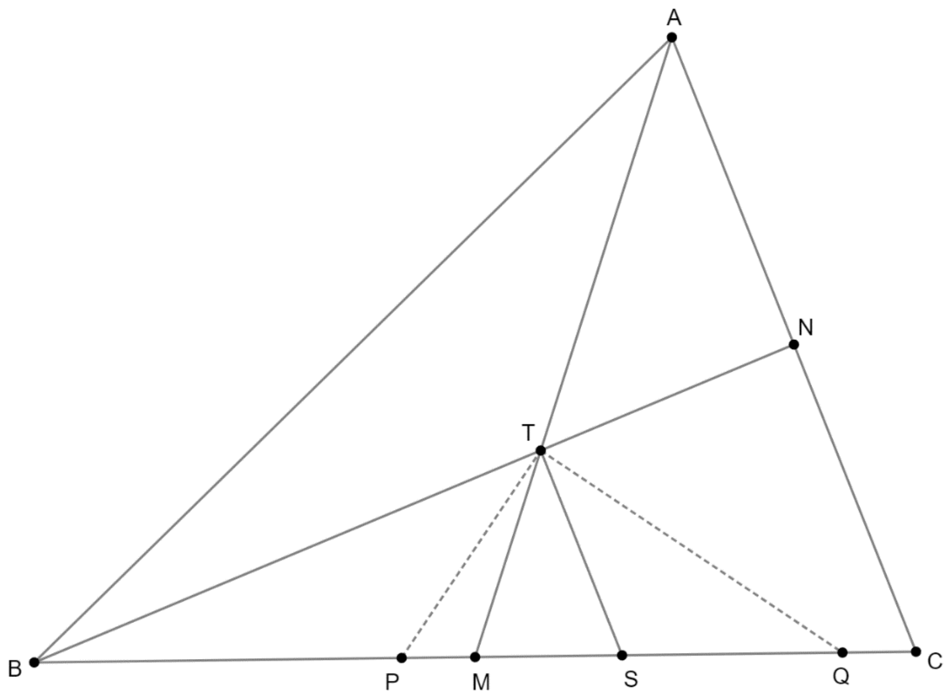
pa je $b_1 + b_2 + \cdots + b_{500} = \frac{250}{2} = 125$. Zaključujemo, ukupna suma brojeva je jednaka $250 + 125 = 375$ (jer je ona jednaka sumi brojeva na bijelim i brojeva na crnim karticama).

Šema bodovanja:

- Zaključak $c_1 + c_3 = 1$ ili njemu ekvivalentan: **3 boda**
- Određivanje sume brojeva na crnim karticama: **3 boda**
- Dobivanje relacije $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{500} = (b_1 + b_2) + (b_2 + b_3) + (b_3 + b_4) + \cdots (b_{500} + b_1)$ ili njoj ekvivalentne: **2 boda**
- Određivanje sume svih brojeva: **2 boda**

Zadatak 5. U trouglu ΔABC vrijedi $BC > AC$. Tačke P i Q leže na duži BC tako da vrijedi $CP = \frac{BC+AC}{3}$ i $CQ = \frac{BC-AC}{3}$. Ako je tačka T težište trougla ΔABC, dokazati da je $\angle PTQ = 90°$.

Rješenje



Neka su M, N i S redom sredine duži BC, CA i PQ. Označimo $a = BC$ i $b = AC$. Tada je $CP = \frac{a+b}{3}$ i $CQ = \frac{a-b}{3}$, pa je

$$PQ = CP - CQ = \frac{a+b}{3} - \frac{a-b}{3} = \frac{2b}{3},$$

odakle slijedi

$$SP = SQ = \frac{PQ}{2} = \frac{b}{3}.$$

Sada imamo

$$CS = CQ + SQ = \frac{a-b}{3} + \frac{b}{3} = \frac{a}{3}, \qquad BS = BC - CS = a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}.$$

Zaključujemo, vrijedi $\frac{BS}{BC} = \frac{2}{3}$. Kako težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$, vrijedi i $\frac{BT}{TN} = \frac{2}{1}$, odnosno $\frac{BT}{BN} = \frac{2}{3}$. Dakle, $\frac{BS}{BC} = \frac{BT}{BN} = \frac{2}{3}$, pa iz obrata Talesove teoreme dobijamo $ST \parallel CN$ i $\frac{ST}{CN} = \frac{2}{3}$. Dakle,

$$ST = \frac{2}{3} \cdot CN = \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b}{3}.$$

Dobili smo $SP = SC = SQ = \frac{b}{3}$, pa je S centar opisane kružnice trougla ΔPQT. Kako je S ujedno sredina stranice PQ, slijedi da je ovaj trougao pravougli sa hipotenuzom PQ, odnosno da je $\angle PTQ = 90°$, što je trebalo dokazati.

Šema bodovanja

- Uvođenje sredine duži PQ (tačka S u rješenju): **2 boda**
- Zaključak $PQ = \frac{2b}{3}$: **1 bod**
- Zaključak $CS = \frac{a}{3}$: **1 bod**
- Konstatacija da je $\frac{BT}{TN} = \frac{2}{3}$ (ili njoj ekvivalentna): **1 bod**
- Zaključak da je $\frac{ST}{CN} = \frac{2}{3}$: **3 boda**
- Privođenje dokaza kraju: **2 boda**

IX RAZRED

Zadatak 1. Riješiti sljedeći sistem jednačina u skupu realnih brojeva:

$$\frac{xy}{3x+2y}=\frac{1}{8},$$

$$\frac{xy}{2x+3y}=\frac{1}{7}.$$

Rješenje 1: Unakrsnim množenjem jednačina dobijamo

$$8xy = 3x+2y$$

$$7xy = 2x+3y.$$

Množenjem prve jednačina sa 3, a druge jednačine sa 2, te oduzimanjem druge od prve imamo

$$10xy = 5x.$$

Sada razlikujemo dva slučaja:

$1°$ Ako je $x=0$, onda iz početnih uslova lagano dobijamo da $0=\frac{1}{8}$, što nije moguće.

$2°$ Ako je $x\neq 0$, tada iz prethodne jednačine dobijamo $y=\frac{1}{2}$. Uvrštavanjem toga u neki od početnih uslova dobijamo da je $x=1$. Provjerom utvrđujemo da $(x,y)=(1,\frac{1}{2})$ zaista jeste rješenje datog sistema.

Šema bodovanja:

- dobijanje jednačine $8xy=3x+2y$: 1 bod
- dobijanje jednačine $7xy=2x+3y$: 1 bod
- dobijanje jednačine $10xy=5x$ (ili slične sa y na desnoj strani): 4 boda
- razmatranje i rješavanje slučaja $x=0$: 1 bod
- dobijanje rješenja u drugom slučaju: 2 boda
- provjera rješenja: 1 bod

Rješenje 2: Ako posmatramo recipročne vrijednosti u obje jednačine imamo

$$\frac{3x+2y}{xy} = 8$$

$$\frac{(2x+3y)}{xy} = 7,$$

odnosno

$$\frac{3}{y} + \frac{2}{x} = 8$$

$$\frac{2}{y} + \frac{3}{x} = 7,$$

pri čemu smo koristili da ni x ni y nisu jednaki 0. Uvođenjem smjene $\frac{1}{x} = a$ i $\frac{1}{y} = b$, ovaj sistem se svodi na linearni sistem

$$3b + 2a = 8$$

$$2b + 3a = 7,$$

čijim rješavanjem dobijamo rješenje $a = 1, b = 2$ što nam daje $x = 1, y = \frac{1}{2}$. Provjerom utvrđujemo da $(x, y) = (1, \frac{1}{2})$ zaista jeste rješenje datog sistema.

Šema bodovanja:

- dobijanje jednačine $\frac{3}{y} + \frac{2}{x} = 8$: 2 boda
- dobijanje jednačine $\frac{2}{y} + \frac{3}{x} = 7$: 2 boda
- uvođenje smjena a i b kao u zadatku i rješavanje sistema po a i b: 4 boda
- dobijanje rješenja za x, y: 1 bod
- provjera rješenja: 1 bod

Zadatak 2. Neka su p, q, r, s prosti brojevi takvi da vrijedi

$$5 < p < q < r < s < p + 10.$$

Dokazati da je broj $p + q + r + s$ djeljiv sa 60.

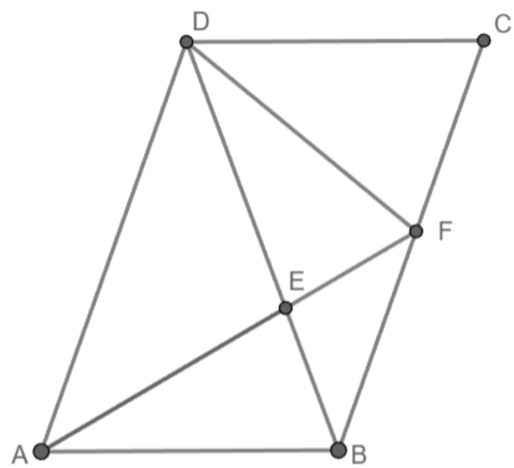
Rješenje: Pošto su svi brojevi $2 < p < q < r < s$ neparni prosti brojevi koji su manji od $p + 10$, to onda moraju biti neka četiri od brojeva $p, p + 2, p + 4, p + 6, p + 8$. Ako bi izostavili neki od brojeva $p, p + 2, p + 6, p + 8$, onda bi imali tri uzastopna neparna prosta broja, što znači da je neki od njih djeliv sa 3, što je kontradikcija sa obzirom da su svi veći od 3. Dakle, $p = p, q = p + 2, r = p + 6, s = p + 8$. Ujedno ovo znači i da $p + 4$ mora biti djeljiv sa 3 (jer nijedan od preostala četiri broja nije). Od pet uzastopnih neparnih brojeva $p, p + 2, p + 4, p + 6, p + 8$ jedan je djeljiv sa 5, a pošto nijedan od p, q, r, s nije djeljiv sa 5 (jer su svi veći od 5), to onda $p + 4$ mora biti djeljiv sa 5. Sada imamo da je $p + q + r + s = p + (p + 2) + (p + 6) + (p + 8) = 4p + 16 = 4(p + 4)$, a kako je $p + 4$ djeljiv i sa 5 i sa 3, tj. sa 15, onda je ovaj zbir djeljiv sa $4 \cdot 15 = 60, q.e.d.$

Šema bodovanja:

- zaključak da su q, r, s neka tri broja od brojeva $p + 2, p + 4, p + 6, p + 8$: 2 boda
- zaključak da je $p + 4$ izostavljeni broj: 3 boda
- zaključak da je $p + 4$ djeljiv sa 3: 1 bod
- zaključak da je $p + 4$ djeljiv sa 5: 2 boda
- izražavanje sume $p + q + r + s$ kao $4(p + 4)$: 1 bod
- konačni zaključak da je $p + q + r + s = 4(p + 4)$ djeljivo sa 60: 1 bod

Zadatak 3. U paralelogramu $ABCD$ ($AB||CD$, $BC||AD$) vrijedi $AD = BD$. Neka je E tačka na duži BD tako da vrijedi $AE = DE$. Prava AE siječe duž BC u tački F. Ispostavilo se da je prava DF simetrala ugla $\angle CDE$. Odrediti veličinu ugla $\angle ABD$.

Rješenje: Pošto je trougao AED jednakokraki vrijedi $\angle ADE = \angle DAE$. Iz paralelnosti $BF||AD$ imamo da je i $\angle EBF = \angle EDA$ i $\angle EFB = \angle EAD$, tj. vrijedi $< EFB = \angle EBF$ pa je $EF = EB$. Primijetimo sada da su trouglovi ΔAEB i ΔDEF podudarni po pravilu SUS ($AE = ED, EB = EF$ i $\angle AEB = \angle DEF$). To nam govori da je $DF = AB$, a pošto je $AB = CD$, onda je i $DF = CD$, odnosno, trougao ΔDFC je jednakokraki. Ovo nam govori da je $\angle DFC = \angle DCF$.



S druge strane, pošto je trougao ΔDBC jednakokraki ($BC = AD = BD$) imamo $\angle DCF = \angle CDB = 2\angle CDF$ (jer je DF simetrala ugla $\angle BDC$). Sada imamo da je $\angle DCF = \angle DFC = 2\angle CDF$, tj. u trouglu ΔDCF vrijedi $180° = \angle DCF + \angle DFC + \angle CDF = 5\angle CDF$, odnosno $\angle CDF = 36°$. Dalje je $\angle DCB = \angle DCF = 2\angle CDF = 2 \cdot 36° = 72°$. Konačno, iz paralelnosti AB i CD imamo da je $\angle ABD = \angle DCB = 72°$.

Šema bodovanja:

- zaključak da je $\angle EBF = \angle EDA = \angle EFB = \angle EAD$: 2 boda
- zaključak da su ΔAEB i ΔDEF podudarni: 1 bod
- zaključak da je $DF = DC$: 1 bod
- zaključak da je $\angle DFC = \angle DCF$: 1 bod
- zaključak da je $\angle DCF = \angle CDB = 2\angle CDF$: 2 boda
- dobijanje $\angle CDF = 36°$: 2 boda
- dobijanje $\angle ABD = 72°$: 1 bod

Zadatak 4. Odrediti najveću moguću vrijednost izraza $x-y$, ako su x, y, z realni brojevi koji zadovoljavaju sljedeća dva uslova:

$$x+y+z=2,$$

$$xy+yz+zx=1.$$

Rješenje: Iz uslova zadatka je $x+y=2-z$, $xy=1-z(x+y)=1-z(2-z)=1-2z+z^2=(z-1)^2$. Sada imamo da je

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(2-z)^2-4(z-1)^2=-3z^2+4z,$$

odnosno $|x-y|=\sqrt{-3z^2+4z}$. Sada je $\sqrt{3}\cdot|x-y|=\sqrt{-9z^2+12z}=\sqrt{4-(3z-2)^2}\leq\sqrt{4}=2$, pri čemu u posljednjoj nejednakosti vrijedi jednakost za $3z=2$, odnosno $z=\frac{2}{3}$. Dakle dokazali smo da je $x-y\leq|x-y|\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$. Pronađimo još vrijednosti x i y za koje se dostiže jednakost $x-y=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Mora vrijediti $z=\frac{2}{3}$ pa uvrštavanjem u početne uslove dobijamo $x+y=\frac{2}{3}$. Sada iz $x-y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ i $x+y=\frac{2}{3}$ lagano dobijamo da je $x=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ i $y=\frac{2-\sqrt{3}}{3}$. Provjerom utvrđujemo da se zaista za $x=\frac{2+\sqrt{3}}{3}, y=\frac{2-\sqrt{3}}{3}, z=\frac{2}{3}$ dostiže maksimalna vrijednost izraza $x-y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

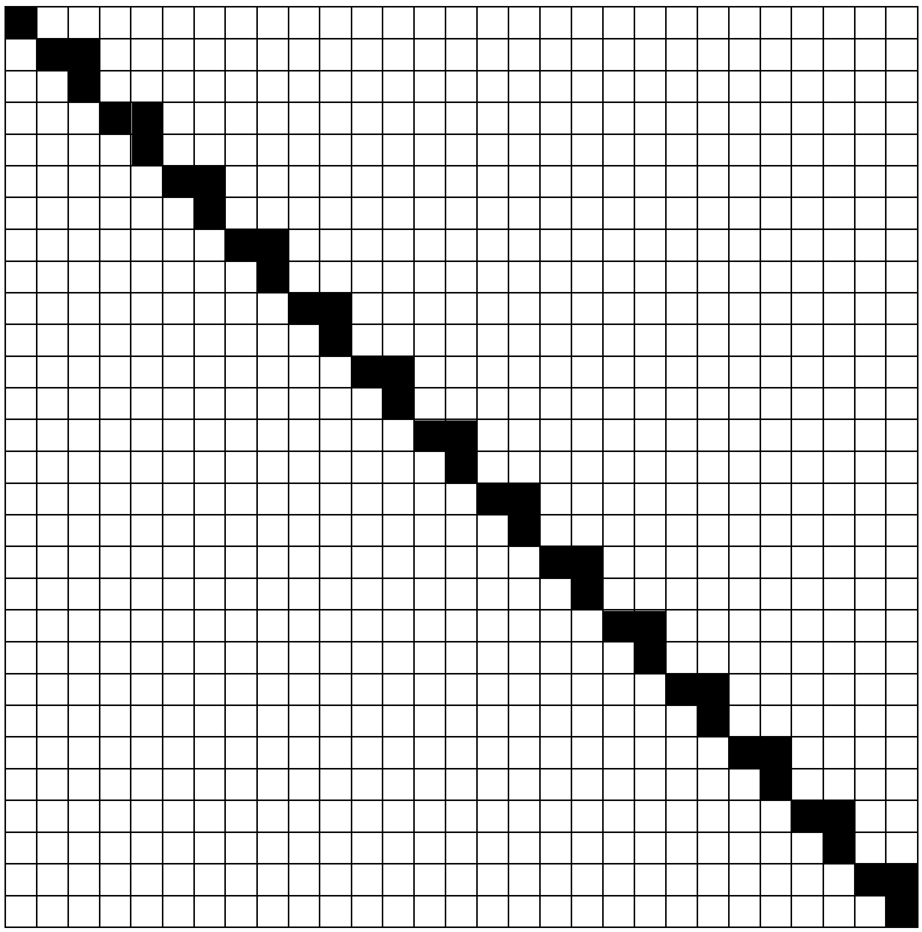
Šema bodovanja:

- dobijanje izraza za $x+y$ i xy preko z kao u rješenju: 1 bod
- dobijanje $(x-y)^2=-3z^2+4z$: 2 boda
- zaključak da je maksimum izraza $|x-y|$ jednak $\frac{2\sqrt{3}}{3}$: 5 bodova (moguće je dobiti parcijalne bodove ako učenik npr. pokušava izraz $-3z^2+4z$ naštimati na kvadrat)
- dokaz da se vrijednost $x-y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ može dostići: 2 boda

Zadatak 5. Redovi i kolone ploče dimenzije 29×29 numerisani su redom brojevima $1,2,\ldots,29$ odozdo prema gore i s lijeva na desno. Neka polja ploče su obojana u crno. Za svako crno polje vrijedi da postoji najviše jedno drugo crno polje koje se nalazi u redu većem ili jednakom od reda tog polja i u koloni većoj ili jednakoj od kolone tog polja. Odrediti najveći mogući broj crnih polja na ploči.

Rješenje:

Na slici ispod je dat primjer sa 43 crna polja.



Dokazat ćemo da je nemoguće imati više od 43 crnih polja. Iz uslova zadatka slijedi da svaki red i svaka kolona mogu najviše sadržavati 2 crna polja. Ako imamo više od 43 crna polja, to znači da postoji bar 15 redova sa 2 crna polja (jer inače je najviše $14 \cdot 2 + 15 = 43$ crnih polja). Posmatrajmo tih 15 redova. Kako je $15 \cdot 2 > 29$ to se neka dva od tih 30 žetona moraju naći u istoj koloni, tj. postoje redovi $a < b$ i kolona c tako da su polja (a, c) i (b, c) crna. Posmatrajmo red a. U njemu pored crnog polja (a, c) postoji neko crno polje (a, d). Ako je $d > c$, dobijamo kontradikciju posmatrajući polje (a, c), a ako je $d < c$ onda dobijamo kontradikciju posmatrajući polje (a, d).

Šema bodovanja:

- konstrukcija sa 43 crnih polja: 4 boda
- zaključak da svaki red i svaka kolona imaju najviše dva crna polja: 1 bod
- zaključak da postoji bar 15 redova (ili kolona) sa dva crna polja: 2 boda
- zaključak da u dva od tih 15 redova (ili kolona) postoje dva crna polja u istoj koloni: 2 boda
- kraj dokaza: 1 bod

Konačni rezultati federalnog takmičenja iz matematike učenika VI razreda

Rank	Ime i prezime	Škola	1	2	3	4	5	Ukupno
1	Hamdi Mehmedovski	JU OŠ "Mirsad Prnjavorac" Vogošća	10	7	10	8	0	35
2	Alma Fajić	OŠ "Poljice" Lukavac	10	6	6	10	0	32
3	Ismail Hadžović	OŠ "Ćamil Sijarić" Sarajevo	10	9	0	9	0	28
4	Iman Boškailo	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	10	4	10	2	0	26
4	Martina Andrić	KŠC "Sveti Franjo" Tuzla	10	3	0	3	10	26
4	Amina Agović	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	10	9	0	7	0	26
7	Hamza Drkić	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	10	4	0	10	0	24
8	Adem Bišćević	OŠ "Mehmed-beg Kapetanović Ljubušak" Sarajevo	10	6	1	3	0	20
8	Mesud Mešić	JU OŠ "Dr. Safvet-beg Bašagić" Gradačac	4	7	1	8	0	20
10	Lamija Isović	OŠ "Isak Samokovlija" Sarajevo	10	3	1	5	0	19
11	Emin Čišija	OŠ "Kulin Ban" Visoko	10	4	1	3	0	18
11	Vedad Mujkanović	OŠ "Hamdija Kreševljaković" Gradačac	6	8	1	3	0	18
13	Kaan Kačapor	OŠ "Grbavica II" Sarajevo	10	4	1	0	0	15
14	Adnan Hadžikadunić	OŠ "1. mart" Jelah	10	4	0	0	0	14
14	Haris Delić	OŠ "Novi Grad" Tuzla	10	4	0	0	0	14
16	Amina Suljić	OŠ "Novi Grad" Tuzla	10	1	0	2	0	13
17	Adi Priganica	OŠ "Osman Nuri Hadžić" Sarajevo	10	2	0	0	0	12
18	Ajna Čengić	OŠ "Čengić Vila I" Sarajevo	10	1	0	0	0	11
19	Uma Hodžić	OŠ "Mehmed-beg Kapetanović Ljubušak" Sarajevo	10	0	0	0	0	10
19	Madžid Smajić	OŠ "Džemal Bijedić" Miljanovci	9	0	1	0	0	10
21	Faris Bašagić	OŠ "Osman Nuri Hadžić" Sarajevo	2	5	0	1	0	8
22	Mahir Sulejmanović	Druga osnovna škola Živinice	4	3	0	0	0	7
22	Lamija Imamović	OŠ "Osman Nuri Hadžić" Sarajevo	4	3	0	0	0	7
24	Bakir Suljić	OŠ "Meša Selimović" Zenica	4	1	1	0	0	6
24	Amna Hamzić	JU OŠ "Husein efendija Đozo" Goražde	0	6	0	0	0	6
26	Bakir Kešetović	OŠ "Ropatnica" Srebrenik	2	2	0	1	0	5
26	Amina Huremović	OŠ "Nafija Sarajlić" Sarajevo	0	0	0	5	0	5
26	Sumeja Šabaredžović	JU "Deseta osnovna škola" Ilidža	3	2	0	0	0	5
29	Adi Snagić	JU Prva osnovna škola Srebrenik	0	0	1	2	0	3
29	Naida Semić	JU OŠ "Zahid Baručija" Vogošća	0	1	1	1	0	3
31	Asja Husejinović	JU "Treća osnovna škola" Ilidža	0	0	1	1	0	2
32	Dinela Kljuca	OŠ "Mehmedalija Mak Dizdar" Goražde	0	1	0	0	0	1
32	Adna Korda	OŠ "Safvet-beg Bašagić" Novi Travnik	0	0	0	1	0	1
34	Nadija Mušović	JU OŠ "Husein efendija Đozo" Goražde	0	0	0	0	0	0

Konačni rezultati federalnog takmičenja iz matematike učenika VII razreda

Rank	Ime i prezime	Škola	1	2	3	4	5	Ukupno
1	Kenan Softić	Richmond Park International School Tuzla	10	9	10	8	0	37
2	Dino Ahić	OŠ "Safvet-beg Bašagić" Visoko	5	6	9	10	0	30
3	Merjem Đonko	OŠ "Mehmedalija Mak Dizdar" Sarajevo	10	8	9	0	2	29
4	Tarik Odžak	OŠ "Grbavica I" Sarajevo	10	4	10	2	0	26
5	Merjem Durović	OŠ "Alija Nametak" Sarajevo	9	4	10	0	0	23
6	Adi Efendira	OŠ "Safvet-beg Bašagić" Visoko	3	8	5	6	0	22
7	Zina Ivković	OŠ "Suljo Čilić" Jablanica	5	8	0	8	0	21
7	Benjamin Mujkić	OŠ "Sjenjak" Tuzla	3	3	5	10	0	21
9	Alem Đulić	OŠ "Safvet-beg Bašagić" Novi Travnik	1	4	7	8	0	20
9	Džena Omanović	OŠ "Mula Mustafa Bašeskija" Donje Moštre	3	3	8	6	0	20
11	Abdullah Muminagić	OŠ "Grbavica I" Sarajevo	3	8	1	7	0	19
11	Ibrahim Mulahusejnović	OŠ "Hasan Kikić" Gračanica	0	3	8	8	0	19
11	Ahmed Fišek	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Visoko	2	7	10	0	0	19
14	Amir Karamović	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	10	8	0	0	0	18
15	Daris Turčinović	OŠ "Skender Kulenović"	3	8	0	6	0	17
16	Merjem Mešić	OŠ "Isak Samokovlija" Sarajevo	0	7	5	4	0	16
17	Azra Jašarspahić	OŠ "Hamdija Kreševljaković" Kakanj	0	4	6	5	0	15
17	Ema Eminović	OŠ "Ivan Goran Kovačić" Gradačac	5	3	7	0	0	15
17	Tarik Ajanović	OŠ "Zahid Baručija" Vogošća	10	4	1	0	0	15
17	Faris Šabeta	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	1	4	0	10	0	15
21	Nejra Begović	OŠ "Mula Mustafa Bašeskija" Donje Moštre	10	3	1	0	0	14
21	Ismail Čustović	OŠ "Deseta osnovna škola" Ilidža	0	4	5	5	0	14
23	Ahmed Sedić	OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo	0	8	1	4	0	13
23	Danija Sinanović	JU OŠ "Hasan Kaimija" Sarajevo	0	3	7	3	0	13
25	Una Ugarak	Druga osnovna škola Bugojno	0	3	9	0	0	12
26	Mirza Bubalo	OŠ "Druga osnovna škola" Konjic	3	7	0	0	0	10
26	Džana Hodžabegović	OŠ "Harmani II" Bihać	3	4	2	1	0	10
26	Farah Hasanbašić	OŠ "Meša Selimović" Zenica	4	3	3	0	0	10
29	Josip Šimić	OŠ "Sveti Franjo Tuzla" Tuzla	0	8	1	0	0	9
30	Lamija Dervišić	OŠ "Turbe" Turbe	0	3	0	5	0	8
31	Mubina Ramić	OŠ "Jezerski" Bosanska Krupa	0	3	4	0	0	7
32	Amina Džananović	OŠ "Hasan Kikić" Gračanica	1	4	1	0	0	6
32	Ahmed Kurtović	OŠ "Deseta osnovna škola" Sarajevo	0	0	0	6	0	6
34	Amina Karović	OŠ "Ustikolina" Ustikolina	0	3	1	1	0	5
35	Lamija Kisjelica	OŠ "Prva osnovna škola" Bosanska Krupa	0	4	0	0	0	4
36	Melisa Iskrić	OŠ "Ivan Goran Kovačić" Gradačac	0	3	0	0	0	3
36	Lejla Jašarević	OŠ "Ivan Goran Kovačić" Gradačac	0	1	1	1	0	3
36	Davud Mušinović	OŠ "Prva osnovna škola" Konjic	0	3	0	0	0	3
39	Amina Huskić	OŠ "Treća osnovna škola" Bugojno	0	0	0	1	0	1

Konačni rezultati federalnog takmičenja iz matematike učenika VIII razreda

Rank	Ime i prezime	Škola	1	2	3	4	5	Ukupno
1	Harun Memić	OŠ "Isak Samokovlija" Sarajevo	10	10	4	10	0	34
2	Max Dedić	OŠ "Hrasno" Sarajevo	10	5	4	4	1	24
3	Ajdin Bešić	OŠ "Harmani II" Bihać	10	6	4	3	0	23
4	Adem Agić	OŠ "Hrasno" Sarajevo	10	4	4	2	2	22
5	Fatima Čolan	OŠ "Vareš Majdan" Vareš	10	3	4	1	0	18
6	Dženan Jašarspahić	OŠ "15. april" Doboj-Kakanj	9	1	4	0	3	17
7	Davud Palić	OŠ "Kovačići" Sarajevo	10	2	4	0	0	16
7	Hana Memić	OŠ "Čengić Vila 1" Sarajevo	7	1	5	2	1	16
9	Alma Husnić	OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo	2	10	3	0	0	15
9	Almir Hadžović	OŠ "Čengić Vila 1" Sarajevo	1	6	8	0	0	15
9	Ajla Krdžić	OŠ "Podlugovi" Podlugovi	10	1	1	2	1	15
12	Harun Salčinović	OŠ "Mak Dizdar" Zenica	0	4	8	0	1	13
13	Abdurahman Fehratbegović	OŠ "Ćamil Sijarić" Sarajevo	4	1	0	7	0	12
13	Mehmedalija Šibonjić	OŠ "Safvet-beg Bašagić" Gradačac	3	5	3	0	1	12
15	Ajla Rašidagić	OŠ "Hrasno" Sarajevo	4	4	1	1	0	10
15	Naida Mravović	OŠ "Druga osnovna škola" Konjic	10	0	0	0	0	10
17	Ali Hodžić	OŠ "Malta" Sarajevo	2	4	2	1	0	9
17	Mak Hadžiefendić	OŠ "Sveti Franjo Tuzla" Tuzla	3	5	0	0	1	9
19	Emin Džambegović	OŠ "Ilidža" Sarajevo	7	0	0	0	0	7
20	Nejla Kozarević	OŠ "Slavinovići" Tuzla	4	0	1	0	1	6
21	Adin Čorić	OŠ "Miroslav Krleža" Zenica	2	1	1	0	1	5
22	Uma Beganović	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Zenica	3	0	0	0	0	3
22	Emina Fuško	OŠ "Travnik" Travnik	3	0	0	0	0	3
22	Vedad Jusufspahić	OŠ "Gračanica" Bugojno	3	0	0	0	0	3
22	Ismail Duranović	OŠ "Turbe" Turbe	3	0	0	0	0	3
22	Dali Lekić	OŠ "Kovačići" Sarajevo	2	0	0	1	0	3
22	Hana Ćufurović	OŠ "Todorovska Slapnica" Velika Kladuša	3	0	0	0	0	3
22	Aid Dizdarević	OŠ "25. novembar" Velika Kladuša	3	0	0	0	0	3
22	Adi Nuhić	OŠ "Lukavac Grad" Lukavac	3	0	0	0	0	3
22	Hatidža Hamidović	OŠ "Fatima Gunić" Sarajevo	3	0	0	0	0	3
22	Hana Šuta	OŠ "Zalik" Mostar	3	0	0	0	0	3
22	Selma Deljo	OŠ "Husein efendija Đozo" Goražde	3	0	0	0	0	3
22	Fatima Dedić	OŠ "Dubrave" Dubrave	3	0	0	0	0	3
22	Emrah Nišić	OŠ "Đurđevik" Živinice	3	0	0	0	0	3
35	Tarik Omanović	OŠ "Mula Mustafa Bašeskija" Visoko	2	0	0	0	0	2
36	Imana Čaušević	OŠ "Cazin II" Cazin	0	0	0	1	0	1
37	Laila Kević	OŠ "Zalik" Mostar	0	0	0	0	0	0

Konačni rezultati federalnog takmičenja iz matematike učenika IX razreda

Rank	Ime i prezime	Škola	1	2	3	4	5	Ukupno
1	Adnan Osmić	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	9	10	10	10	10	49
2	Uma Senta	JU OŠ "Skender Kulenović" Sarajevo	10	9	10	5	0	34
3	Nermin Kadić	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	10	8	10	0	4	32
4	Tarik Dacić	OŠ "Pofalići" Sarajevo	10	10	10	0	0	30
5	Amer Moštro	OŠ "Hamdija Kreševljaković" Kakanj	10	7	10	1	0	28
5	Nermin Malićević	JU "Deseta osnovna škola" Ilidža	10	7	9	0	2	28
7	Lana Žepić	JU OŠ "Sv. Franjo" Tuzla	9	4	10	2	0	25
7	Hana Kozica	OŠ "Grbavica 1" Sarajevo	9	10	5	1	0	25
7	Alen Avdibegović	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo	10	0	10	0	5	25
10	Ahmed Čengić	OŠ "Safvet-beg Bašagić" Breza	10	1	10	0	0	21
10	Iman Kurtović	JU "Prva osnovna škola" Živinice	10	9	0	1	1	21
12	Ajla Ćuprija	JU OŠ "Skendar Kulenović" Sarajevo	9	0	10	1	0	20
13	Emir Tuzlak	OŠ "Ćamil Sijarić" Sarajevo	10	4	4	1	0	19
14	Hamza Banjanović	OŠ "Osman Nuri Hadžić" Sarajevo	9	7	0	1	0	17
15	Damir Konjić	Richmond Park International School Tuzla	9	5	0	0	0	14
16	Ida Cerić	OŠ "Skender Kulenović" Zenica	10	0	2	0	0	12
16	Malik Hodžić	OŠ "Ivan Goran Kovačić" Gradačac	10	0	2	0	0	12
16	Emir Korda	OŠ "Safvet-beg Bašagić" Novi Travnik	10	0	1	0	1	12
19	Emina Mujanović	JU OŠ "Kalesija" Kalesija	10	0	1	0	0	11
19	Edi Lukić	OŠ "Ćamil Sijarić" Sarajevo	10	0	1	0	0	11
19	Sumeja Hrustić	OŠ "Skender Kulenović" Zenica	10	0	1	0	0	11
19	Abdullah Muslić	JU "Peta osnovna škola" Sarajevo	9	0	2	0	0	11
23	Hanan Hrnjić	OŠ "Travnik" Travnik	9	0	0	0	1	10
23	Malik Agić	OŠ "Žepče" Žepče	10	0	0	0	0	10
23	Adin Mehić	JU OŠ "Ivan Goran Kovačić" Gradačac	9	0	1	0	0	10
23	Faruk Šošo	JU OŠ "Husein ef. Đozo" Goražde	9	0	1	0	0	10
23	Zlatan Bešlagić	OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Zenica	9	0	1	0	0	10
23	Lamija Vojić	JU OŠ "Harmani I" Bihać	10	0	0	0	0	10
29	Ema Deljo	OŠ "Husein ef. Đozo" Goražde	9	0	0	0	0	9
29	Ishak Klopić	Richmond Park International School Tuzla	7	1	1	0	0	9
29	Kenan Nuhić	Četvrta osnovna škola Mostar	9	0	0	0	0	9
29	Lamija Jazvin	JU OŠ "Prva osnovna škola" Konjic	9	0	0	0	0	9
29	Harun Opardija	"Četvrta osnovna škola Torlakovac" Donji Vakuf	9	0	0	0	0	9
29	Hanan Hodžić	OŠ "Isak Samokovlija" Sarajevo	8	0	1	0	0	9
29	Naida Bajrektarević	JU Druga osnovna škola Srebrenik	9	0	0	0	0	9
36	Ramiz Vilić	JU OŠ "Safvet-beg Bašagić" Gradačac	8	0	0	0	0	8
37	Mirza Begović	Prva osnovna škola Donji Vakuf	4	0	0	0	0	4
38	Hana Jušić	OŠ "Liskovac" Cazin	3	0	0	0	0	3

Na Juniorsku matematičku olimpijadu BiH (JMOBiH) plasman su ostvarili sljedeći učenici:

1. **Kenan Softić, Richmond Park International School Tuzla**
2. **Harun Memić, OŠ “Isak Samokovlija” Sarajevo**
3. **Max Dedić, OŠ “Hrasno” Sarajevo**
4. **Ajdin Bešić, OŠ “Harmani II” Bihać**
5. **Adem Agić. OŠ “Hrasno” Sarajevo**
6. **Fatima Čolan, OŠ “Vareš Majdan” Vareš**
7. **Adnan Osmić, OŠ “Musa Ćazim Ćatić” Sarajevo**
8. **Uma Senta, OŠ “Skender Kulenović” Sarajevo**
9. **Nermin Kadić, OŠ “Musa Ćazim Ćatić” Sarajevo**
10. **Tarik Dacić, OŠ “Pofalići” Sarajevo**
11. **Amer Moštro, OŠ “Hamdija Kreševljaković” Kakanj**
12. **Nermin Malićević, JU “Deseta osnovna škola” Ilidža**
13. **Lana Žepić, OŠ “Sveti Franjo” Tuzla**
14. **Hana Kozica, OŠ “Grbavica 1” Sarajevo**
15. **Alen Avdibegović, OŠ “Musa Ćazim Ćatić” Sarajevo**
16. **Ahmed Čengić, OŠ “Safvet-beg Bašagić” Breza**
17. **Iman Kurtović, JU “Prva osnovna škola” Živinice**
18. **Ajla Ćuprija, OŠ “Skender Kulenović” Sarajevo**
19. **Emir Tuzlak, OŠ “Ćamil Sijarić” Sarajevo**
20. **Hamza Banjanović, OŠ “Osman Nuri Hadžić” Sarajevo**

Pored ovih učenika, na JMOBiH se poziva i učenica prvog razreda srednje škole **Amila Pašić**, koja ima pravo nastupa na Juniorskoj balkanskoj matematičkoj olimpijadi 2023, a koja je prošle godine imala maksimalnih 40 bodova na JMOBiH.