# BILTEN FEDERALNOG TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA 2023. GODINE

Sarajevo, 23.4.2023. godine

Federalno takmičenje iz matematike učenika srednjih škola održano je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu, 23.4.2022. godine. Na takmičenju su učestvovala 142 učenika koji su odabrani na kantonalnim takmičenjima, kao i na kvalifikacionom takmičenju.

Prisutnima su se na otvaranju obratili prof. dr. Esmir Pilav ispred Prirodno-matematičkog fakulteta, prof. dr. Zenan Šabanac ispored Udruženja matematičara Kantona Sarajevo, doc. dr. Sead Delalić ispred Odsjeka za matematičke i kompjuterske nauke Prirodno-matematičkog fakulteta, te Admir Beširević ispred takmičarske komisije. Takmičenje je otvorila prof. dr. Senada Kalabušić, predsjednica Udruženja matematičara Kantona Sarajevo.

Na zahtjevnim zadacima učenici su pokazali zavidno znanje, te su u svakom razredu bar 4 učenika osvojila najmanje 50% bodova (ukupno 20 učenika). Na Matematičku olimpijadu BiH (MOBiH) su se plasirala 22 učenika, a na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olimpijadu 12 učenika. MOBiH se održava 20. i 21. maja na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu.


tika i kompjuterske nauke?

# ZADACI

## I RAZRED

**Zadatak 1.** Data je jednačina
$$\frac{2a+x}{2-x}-\frac{2a-x}{2+x}=\frac{4a}{4-x^2},$$
gdje je $x$ nepoznata.

a) Odrediti sve vrijednosti realnog broja $a$ za koje ova jednačina nema rješenja.
b) Odrediti sve vrijednosti realnog broja $a$ za koje ova jednačina ima bar jedno rješenje koje je manje ili jednako $1$.

**Zadatak 2.** Dat je paralelogram $ABCD$. Opisana kružnica trougla $\Delta ABC$ siječe pravu $AD$ u tačkama $A$ i $M$, a pravu $CD$ u tačkama $C$ i $N$. Ako je $S$ sredina onog luka $MN$ koji ne sadrži tačku $B$, dokazati da je $DS \perp AC$.

**Zadatak 3.** Neka je $S=\{1,2,3,\dots,9999\}$. Svaki element skupa $S$ možemo predstaviti u obliku $\overline{abcd}$, gdje su $a,b,c,d$ cifre (za $a\neq 0$ dobijamo četverocifrene brojeve, za $a=0$ i $b\neq 0$ trocifrene, za $a=b=0$ i $c\neq 0$ dvocifrene, te za $a=b=c=0$ i $d\neq 0$ jednocifrene). Za element $\overline{abcd}$ skupa $S$ kažemo da je *specijalan* ako su istovremeno ispunjeni sljedeći uslovi:

1. Brojevi $\overline{ab}-\overline{cd}$ i $\overline{ab}+\overline{cd}$ su kvadrati prirodnih brojeva.
2. Broj $\overline{ab}+\overline{cd}$ je djeljiv brojem $\overline{ab}-\overline{cd}$.
3. Broj $\overline{abcd}$ je djeljiv brojem $\overline{ab}+\overline{cd}$.

Odrediti sve specijalne elemente skupa $S$.
**Napomena:** ako je $\overline{abcd}=0405$, tada je $\overline{ab}=04=4$ i $\overline{cd}=05=5$.

**Zadatak 4.** Naći sve pozitivne realne brojeve $x$ koji zadovoljavaju jednačinu
$$x\cdot\lfloor x\rfloor+2023=\lfloor x^2\rfloor.$$
**Napomena:** $\lfloor x\rfloor$ je najveći cijeli broj koji je manji ili jednak $x$.

**Zadatak 5.** Neka je $k\leq 1000$ prirodan broj. Igrači $A$ i $B$ igraju igru na ploči formata $1000\times 1000$. Na početku su sva polja ploče bijela. Igrači igraju naizmjenično pri čemu $A$ igra prvi. Potez igrača $A$ podrazumijeva da odabere bijelo polje i oboji ga u crveno. Potez igrača $B$ podrazumijeva da odabere kvadrat dimenzija $k\times k$ čija su sva polja bijela i oboji ih u plavo. Pri tome, ako igrač $B$ ne može odigrati potez, on preskače potez. Igra se završava kada su sva polja obojena, te pobjeđuje igrač koji je obojio više polja (moguć je i neriješen rezultat).
Za svako $1\leq k\leq 1000$ odrediti da li jedan od igrača ima pobjedničku strategiju, te, ako ima, koji je to igrač.

## II RAZRED

**Zadatak 1.** Naći sve racionalne brojeve $r$ takve da su u jednačini $rx^2+(r+1)x+r=1$ sva rješenja cjelobrojna.

**Zadatak 2.** Neka je $M$ sredina stranice $AB$ u trouglu $ABC$. Tačka $N$ je data na težišnici $CM$ takva da vrijedi $MN\cdot MC=\frac{AB^2}{4}$. Prave $AN$ i $BN$ sijeku kružnicu opisanu oko trougla $ABC$ po drugi put u tačkama $P$ i $Q$, redom. Neka je $R$ tačka na duži $PQ$ sa iste strane prave $CM$ kao i tačka $Q$ takva da vrijedi $\angle NRC=\angle BNC$. Slično, neka je tačka $S$ na duži $PQ$ sa iste strane prave $CM$ kao i tačka $P$ takva da vrijedi $\angle NSC=\angle ANC$. Dokazati da je $RN=SN$.

**Zadatak 3.** Za prirodan broj $n\geq 2$ sa $A_n$ označimo broj prirodnih brojeva $k$ takvih da je udaljenost broja $n$ i njemu najbližeg cijelog broja djeljivog sa $k$ jednaka udaljenosti broja $n^3$ i njemu najbližeg cijelog broja djeljivog sa $k$. Odrediti sve prirodne brojeve $n\geq 2$ takve da je broj $A_n$ neparan.
**Napomena:** Udaljenost između brojeva $a$ i $b$ jednaka je broju $|a-b|$.

**Zadatak 4.** Neka je $k\leq 1000$ prirodan broj. Igrači $A$ i $B$ igraju igru na ploči formata $1000\times 1000$. Na početku su sva polja ploče bijela. Igrači igraju naizmjenično pri čemu $A$ igra prvi. Potez igrača $A$ podrazumijeva da odabere bijelo polje i oboji ga u crveno. Potez igrača $B$ podrazumijeva da odabere kvadrat dimenzija $k\times k$ čija su sva polja bijela i oboji ih u plavo. Pri tome, ako igrač $B$ ne može odigrati potez, on preskače potez. Igra se završava kada su sva polja obojena, te pobjeđuje igrač koji je obojio više polja (moguć je i neriješen rezultat).
Za svako $1\leq k\leq 1000$ odrediti da li jedan od igrača ima pobjedničku strategiju, te, ako ima, koji je to igrač.

**Zadatak 5.** Neka su $x,y,z$ realni brojevi takvi da vrijedi $x+y+z=0$ i $x^2+y^2+z^2=6$. Odrediti maksimalnu vrijednost izraza

$$|(x-y)(y-z)(z-x)|.$$

## III RAZRED

**Zadatak 1.** U skupu realnih brojeva riješiti sistem jedinačina:

$$x + y + z = 3,$$

$$2^x + 2^y + 2^z = 7,$$

$$2^{-x} + 2^{-y} = \frac{3}{4}.$$

**Zadatak 2.** Za prirodan broj $n \geq 2$ sa $A_n$ označimo broj prirodnih brojeva $k$ takvih da je udaljenost broja $n$ i njemu najbližeg cijelog broja djeljivog sa $k$ jednaka udaljenosti broja $n^3$ i njemu najbližeg cijelog broja djeljivog sa $k$. Odrediti sve prirodne brojeve $n \geq 2$ takve da je broj $A_n$ neparan.
**Napomena:** Udaljenost između brojeva $a$ i $b$ jednaka je broju $|a - b|$.

**Zadatak 3.** Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Dokazati da vrijedi identitet:

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[4]{n}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt[n]{n}\rfloor = \lfloor\log_2 n\rfloor + \lfloor\log_3 n\rfloor + \lfloor\log_4 n\rfloor + \cdots + \lfloor\log_n n\rfloor.$$

**Napomena:** Sa $\lfloor x\rfloor$ označavamo najveći cijeli broj koji nije veći od $x$ (npr. $\lfloor 3.14\rfloor = 3$ i $\lfloor 3\rfloor = 3$).

**Zadatak 4.** Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) je upisan u kružnicu $k$. Kružnice upisane u trouglove $ABD$ i $ACD$ dodiruju osnovice trapeza $AB$ i $CD$ u tačkama $P$ i $Q$, respektivno. Tačke $X$ i $Y$ su sredine lukova $\widehat{AB}$ i $\widehat{CD}$ kružnice $k$ koji ne sadrže tačke $D$ i $A$, respektivno. Dokazati da se prave $XP$ i $YQ$ sijeku na kružnici $k$.

**Zadatak 5.** U ravni su date 2023 prave od kojih nikoje dvije nisu paralelne i ne postoje tri prave koje se sijeku u istoj tački. Ove linije dijele ravan na određen broj disjunktnih regiona. Dokazati da ima najmanje $1348$ trouglova među tim regionima.

## IV RAZRED

**Zadatak 1.** Dat je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivnih realnih brojeva koji imaju osobinu da za sve $n \geq 2$ vrijedi da je $(n+1)^{a_n} = n^{a_{n-1}}$. Odrediti vrijednosti od $n$ za koje je $a_n < \frac{a_1}{2023}$.

**Zadatak 2.** Neka je $A$ tačka u ravni i neka tri prave koje prolaze kroz tu tačku dijele ravan na $6$ oblasti. U svakoj od tih oblasti dato je po $5$ tačaka. Poznato je da nikoje tri od svih ovih $30$ tačaka u datim oblastima nisu kolinearne. Dokazati da postoji bar $1000$ trouglova čiji vrhovi su tačke iz ovih oblasti takvi da tačka $A$ leži ili u unutrašnjosti ili na stranici trougla.

**Zadatak 3.** Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Dokazati da vrijedi identitet:

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[4]{n}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt[n]{n}\rfloor = \lfloor\log_2 n\rfloor + \lfloor\log_3 n\rfloor + \lfloor\log_4 n\rfloor + \cdots + \lfloor\log_n n\rfloor.$$

**Napomena:** Sa $\lfloor x\rfloor$ označavamo najveći cijeli broj koji nije veći od $x$ (npr. $\lfloor 3.14\rfloor = 3$ i $\lfloor 3\rfloor = 3$).

**Zadatak 4.** Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) je upisan u kružnicu $k$. Kružnice upisane u trouglove $ABD$ i $ACD$ dodiruju osnovice trapeza $AB$ i $CD$ u tačkama $P$ i $Q$, respektivno. Tačke $X$ i $Y$ su sredine lukova $\widehat{AB}$ i $\widehat{CD}$ kružnice $k$ koji ne sadrže tačke $D$ i $A$, respektivno. Dokazati da se prave $XP$ i $YQ$ sijeku na kružnici $k$.

**Zadatak 5.** Odrediti sve prirodne brojeve $n$ takve da je broj $(2n+1)^{2n} - 1$ djeljiv sa $n!$.

# Rješenja zadataka i šema bodovanja

## I RAZRED

**Zadatak 1.** Data je jednačina

$$\frac{2a+x}{2-x}-\frac{2a-x}{2+x}=\frac{4a}{4-x^2},$$

gdje je $x$ nepoznata.

a) Odrediti sve vrijednosti realnog broja $a$ za koje ova jednačina nema rješenja.

b) Odrediti sve vrijednosti realnog broja $a$ za koje ova jednačina ima bar jedno rješenje koje je manje ili jednako 1.

**Rješenje**

Data jednačina je ekvivalentna sa

$$\frac{2a+x}{2-x}-\frac{2a-x}{2+x}=\frac{4a}{(2-x)(2+x)}.$$

Njeno definiciono područje je $x \neq \pm 2$. Množenjem sa $(2-x)(2+x)$ jednačina postaje

$$(2a+x)(2+x)-(2a-x)(2-x)=4a \Leftrightarrow$$
$$4a+2ax+2x+x^2-(4a-2ax-2x+x^2)=4a \Leftrightarrow$$
$$4ax+4x=4a \Leftrightarrow$$
$$(a+1)x=a$$

Za $a=1$ jednačina postaje $0=1$, pa nema rješenja. Neka je $a \neq -1$. Tada dobijamo $x=\frac{a}{a+1}$. Kako je $x \neq \pm 2$, mora vrijediti $\frac{a}{a+1} \neq \pm 2$, tj. $a \neq \pm 2(a+1)$. Odavde slijedi $a \neq -\frac{2}{3}$ i $a \neq -2$. Dakle, vrijednosti realnog broj $a$ za koji jednačina nema rješenja su $a \in \left\{-2,-1,-\frac{2}{3}\right\}$, što je odgovor na dio a).

Za sve ostale vrijednosti $a$ jednačina ima jedinstveno rješenje $x=\frac{a}{a+1}$, pa je za dio b) potrebno odrediti vrijednosti realnog broja $a$ takve da je $\frac{a}{a+1} \leq 1$. Imamo

$$\frac{a}{a+1} \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{a}{a+1}-1 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{a+1} \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$a+1>0 \Leftrightarrow$$
$$a>-1$$

Dakle, vrijednosti realnog broja $a$ za koje je (jednistveno) rješenje jednačine manje ili jednako $1$ su $a \in (-1,+\infty) \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, što je odgovor na dio b).

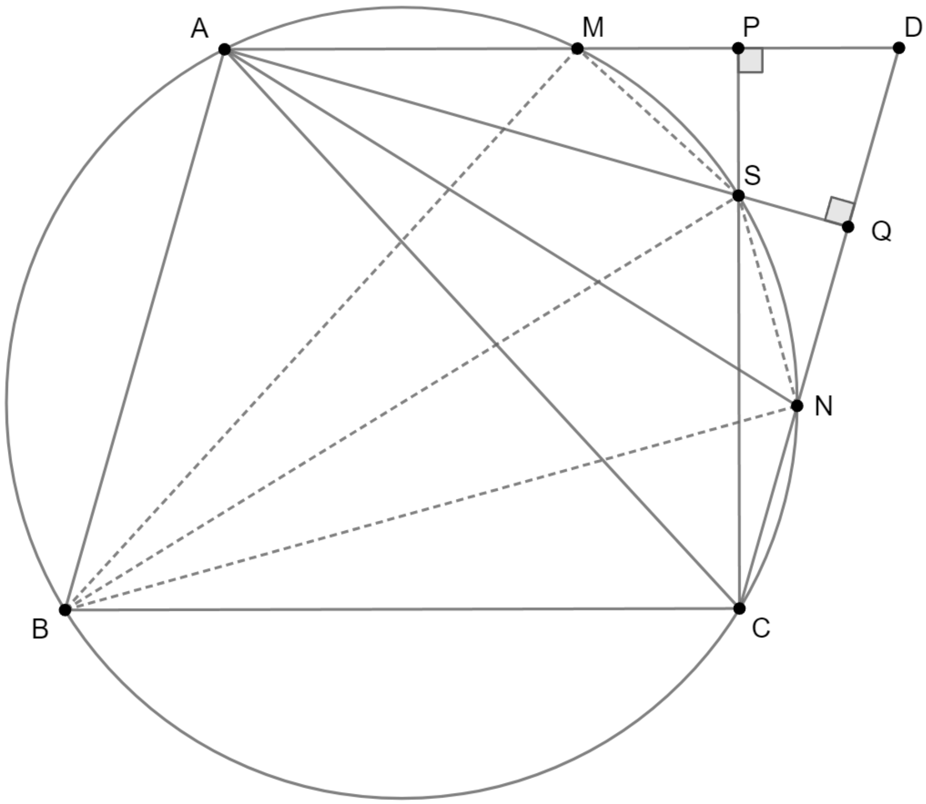
**Šema bodovanja**

- Određivanje definicionog područja jedančine: **1 bod**
- Svođenje jednačine na oblik $(a+1)x=a$: **3 boda**
- Zaključak da za $a=-1$ jednačina nema rješenja: **1 bod**

- Zaključak da za $a \in \left\{-2, -\frac{2}{3}\right\}$ jednačina nema rješenja: **2 boda**
- Rješavanje nejednačine $\frac{a}{a+1} \leq 1$: **2 boda**
- Dobijanje odgovora na dio b): **1 bod**

**Zadatak 2.** Dat je paralelogram $ABCD$. Opisana kružnica trougla $\Delta ABC$ siječe pravu $AD$ u tačkama $A$ i $M$, a pravu $CD$ u tačkama $C$ i $N$. Ako je $S$ sredina onog luka $MN$ koji ne sadrži tačku $B$, dokazati da je $DS \perp AC$.

**Rješenje 1**




Označimo $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$. Kako je $CN \parallel AB$, četverougao $ABCN$ je trapez upisan u kružnicu, pa je on jednakokraki trapez. Zato je $\angle NAB = \angle ABC = \beta$. Kako je $AM \parallel BC$, to vrijedi $\angle MAB = 180° - \angle ABC = 180° - \beta$. Sada imamo $\angle MAN = \angle MAB - \angle NAB = 180° - \beta - \beta = 180° - 2\beta$. Tačka $S$ je sredina luka $MN$, pa su uglovi nad tetivama $MS$ i $NS$ jednaki. To znači da je $\angle SAM = \angle SAN = \angle\frac{MAN}{2} = 90° - \beta$. S druge strane, pošto je $ABCD$ paralelogram, vrijedi $\angle ADC = \angle ABC = \beta$. Označimo presjek pravih $AS$ i $CD$ sa $Q$. U trouglu $\Delta AQD$ imamo $\angle DAQ = 90° - \beta$ i $\angle ADQ = \beta$, pa je $\angle AQD = 90°$, što znači da je $AQ$ visina trougla $\Delta ACD$. Analogno dobijamo da je i $CP$ visina ovog trougla, gdje je $P$ presjek pravih $CS$ i $AD$. Slijedi da je $S$ ortocentar trougla $\Delta ACD$, pa je $DS \perp AC$, što je trebalo dokazati.

**Šema bodovanja**

- Konstatacija da su uglovi nad tetivama $SM$ i $SN$ jednaki: **1 bod**
- Izražavanje ugla $\angle MAN$ (ili $\angle MBN$) preko ugla $\angle ABC$: **2 boda**
- Izražavanje uglova $\angle SAM$ (ili $\angle SCN$) i $\angle ADC$ u obliku iz kojeg se vidi da im je zbir jednak 90°: **2 boda**
- Zaključak da je $AS \perp CD$ (ili $CS \perp AD$): **2 boda**

- Privođenje dokaza kraju: **3 boda**

**Rješenje 2**
Kako je $ABCD$ paralelogram, vrijedi $\angle DAB = \angle DCB$, odnosno $\angle MAB = \angle NCB$. Dakle, periferijski uglovi nad tetivama $MB$ i $NB$ jednaki, pa su i dužine tetiva jednake. Također, kako je $S$ sredina luka $MN$, vrijedi $SM = SN$. Sada imamo $BS = BS, SM = SN$ i $BM = BN$, pa na osnovu stava SSS sijedi $\Delta BNS \cong \Delta BMS$. Odatle dobijamo $\angle BNS = \angle BMS$, a kako su ovi uglovi naspramni u tetivnom četverouglu $BMSN$, vrijedi $\angle BMS = \angle BNS = 90°$. Dakle, $BS$ je prečnik opisane kružnice trougla $\Delta ABC$. Sada je $\angle BAS = 90°$ (kao periferijski ugao nad prečnikom), odnosno $AS \perp AB$, a kako je $AB \parallel CD$, to je i $AS \perp CD$. Analogno dobijamo $CS \perp AD$. Zaključujemo da je $S$ ortocentar trougla $\Delta ACD$, pa je i $DS \perp AC$, što je trebalo dokazati.

**Šema bodovanja**
- Zaključak $BM = BN$: **2 boda**
- Zaključak $SM = SN$: **1 bod**
- Zaključak $\Delta BNS \cong \Delta BMS$: **1 bod**
- Zaključak da je $BS$ prečnik opisane kružnice trougla $\Delta ABC$: **1 bod**
- Zaključak da je $AS \perp AB$ (ili $CS \perp CB$): **1 bod**
- Zaključak da je $AS \perp CD$ (ili $CS \perp AD$): **1 bod**
- Privođenje dokaza kraju: **3 boda**

**Zadatak 3.** Neka je $S = \{1, 2, 3, \dots, 9999\}$. Svaki element skupa $S$ možemo predstaviti u obliku $\overline{abcd}$, gdje su $a, b, c, d$ cifre (za $a \neq 0$ dobijamo četverocifrene brojeve, za $a = 0$ i $b \neq 0$ trocifrene, za $a = b = 0$ i $c \neq 0$ dvocifrene, te za $a = b = c = 0$ i $d \neq 0$ jednocifrene). Za element $\overline{abcd}$ skupa $S$ kažemo da je *specijalan* ako su istovremeno ispunjeni sljedeći uslovi:

4. Brojevi $\overline{ab} - \overline{cd}$ i $\overline{ab} + \overline{cd}$ su kvadrati prirodnih brojeva.
5. Broj $\overline{ab} + \overline{cd}$ je djeljiv brojem $\overline{ab} - \overline{cd}$.
6. Broj $\overline{abcd}$ je djeljiv brojem $\overline{ab} + \overline{cd}$.

Odrediti sve specijalne elemente skupa $S$.

**Napomena:** ako je $\overline{abcd} = 0405$, tada je $\overline{ab} = 04 = 4$ i $\overline{cd} = 05 = 5$.

**Rješenje**

Neka je $x$ prirodan broj takav da je $\overline{ab} - \overline{cd} = x^2$. Kako je $\overline{ab} + \overline{cd}$ potpun kvadrat djeljiv s $\overline{ab} - \overline{cd} = x^2$, to je $\overline{ab} + \overline{cd} = x^2y^2$ za neki prirodan broj $y$. Sada je $2\overline{ab} = \left(\overline{ab} + \overline{cd}\right) + \left(\overline{ab} - \overline{cd}\right) = x^2y^2 + x^2 = x^2(y^2+1)$ i $2\overline{cd} = \left(\overline{ab} + \overline{cd}\right) - \left(\overline{ab} - \overline{cd}\right) = x^2y^2 - x^2 = x^2(y^2-1)$. S druge strane, vrijedi $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 100(10a+b) + (10c+d) = 100\overline{ab} + \overline{cd}$, pa je $2\overline{abcd} = 100 \cdot 2\overline{ab} + 2 \cdot \overline{cd} = 100 \cdot x^2(y^2+1) + x^2(y^2-1) = x^2(101y^2+99)$. Dalje imamo

$$\overline{ab} + \overline{cd} \mid \overline{abcd} \Rightarrow$$
$$2\left(\overline{ab} + \overline{cd}\right) \mid 2\overline{abcd} \Leftrightarrow$$
$$2x^2y^2 \mid x^2(101y^2+99) \Leftrightarrow$$
$$2y^2 \mid 101y^2 + 99 \Rightarrow$$
$$y^2 \mid 101y^2 + 99 \Rightarrow$$
$$y^2 \mid 99$$

Jedini kvadrati koji dijele 99 su 1 i 9, pa su moguća dva slučaja: $y = 1$ i $y = 3$.

$1^\circ$ $y = 1$

Tada je $\overline{ab} = \frac{x^2(y^2+1)}{2} = x^2$ i $\overline{cd} = \frac{x^2(y^2-1)}{2} = 0$. U ovom slučaju za svaki potpun kvadrat $x^2 < 100$ dobijamo po jedan specijalan broj – to su $0100, 0400, 0900, 1600, 2500, 3600, 4900, 6400$ i $8100$.

$2^\circ$ $y = 3$

Tada je $\overline{ab} = \frac{x^2(y^2+1)}{2} = 5x^2$ i $\overline{cd} = \frac{x^2(y^2-1)}{2} = 4x^2$. U ovom slučaju za svaki potpun kvadrat $x^2 < 20$ (jer broj $5x^2$ ima manje od 3 cifre) dobijamo po jedan specijalan broj – to su $0504, 2016, 4536$ i $8064$.

Zaključujemo, svi specijalni brojevi su $0100,\ 0400,\ 0504,\ 0900,\ 1600,\ 2016,\ 2500,\ 3600,\ 4536,\ 4800,\ 6400,\ 8064$ i $8100$.

**Šema bodovanja**

- Uvođenje oznaka $x, y$ kao u rješenju (ili ekvivalentnih oznaka): **1 bod**
- Zaključak $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd}$: **1 bod**
- Transformacija uslova $\overline{ab} + \overline{cd} \mid \overline{abcd}$ u oblik koji koristi $x$ i $y$: **2 boda**
- Dobivanje relacije $y^2 \mid 99$ (ili njoj ekvivalentne): **3 boda**
  - Za dobivanje relacije $\overline{ab} + \overline{cd} \mid 99\overline{ab}$ dodjeljuje se **1** od ova 3 boda
- Zaključak $y \in \{1, 3\}$: **1 bod**
- Rješavanje slučaja $y = 1$: **1 bod**
- Rješavanje slučaja $y = 3$: **1 bod**

**Zadatak 4.** Naći sve pozitivne realne brojeve $x$ koji zadovoljavaju jednačinu

$$x \cdot \lfloor x \rfloor + 2023 = \lfloor x^2 \rfloor.$$

**Napomena:** $\lfloor x \rfloor$ je najveći cijeli broj koji je manji ili jednak $x$.

**Rješenje:**

Neka je $\lfloor x \rfloor = a$, pri čemu je $a$ nenegativan cijeli broj, te neka je $x = a + b$, gdje je $0 \leq b < 1$. Sada imamo:

$$(a+b) \cdot a + 2023 = \lfloor (a+b)^2 \rfloor \iff$$
$$a^2 + ab + 2023 = \lfloor a^2 + 2ab + b^2 \rfloor \iff \text{(jer je } a^2 \text{ cijeli broj)}$$
$$a^2 + ab + 2023 = a^2 + \lfloor 2ab + b^2 \rfloor \iff$$
$$ab + 2023 = \lfloor 2ab + b^2 \rfloor.$$

Kako je $\lfloor 2ab + b^2 \rfloor$ cijeli broj, to i lijeva strana mora biti cijeli broj, tj. $ab$ je cijeli broj. Onda imamo:

$$ab + 2023 = \lfloor 2ab + b^2 \rfloor \iff \text{(jer je } 2ab \text{ cijeli broj)}$$
$$ab + 2023 = 2ab + \lfloor b^2 \rfloor \iff$$
$$2023 = ab + \lfloor b^2 \rfloor.$$

Pošto je $0 \leq b^2 < 1$, onda je $\lfloor b^2 \rfloor = 0$, pa imamo:

$$2023 = ab \iff$$
$$b = \frac{2023}{a}.$$

Kako je $b < 1$ to mora vrijediti $a \geq 2024$.

Dakle, svi brojevi $x = a + \frac{2023}{a}$ pri čemu je $a \geq 2024$ prirodan broj su rješenja date jednačine.

**Šema bodovanja:**

- Uvođenje brojeva $a$ i $b$ kao u rješenju: **1 bod**
- Dobijanje jednačine $ab + 2023 = \lfloor 2ab + b^2 \rfloor$: **2 boda**
- Zaključak da je $ab$ cijeli broj: **2 boda**
- Dobijanje jednačine $2023 = ab + \lfloor b^2 \rfloor$: **1 bod**
- Zaključak da je $\lfloor b^2 \rfloor = 0$: **2 boda**
- Ispravno zaključivanje oblika rješenja: **2 boda**

**Zadatak 5.** Neka je $k \leq 1000$ prirodan broj. Igrači $A$ i $B$ igraju igru na ploči formata $1000 \times 1000$. Na početku su sva polja ploče bijela. Igrači igraju naizmjenično pri čemu $A$ igra prvi. Potez igrača $A$ podrazumijeva da odabere bijelo polje i oboji ga u crveno. Potez igrača $B$ podrazumijeva da odabere kvadrat dimenzija $k \times k$ čija su sva polja bijela i oboji ih u plavo. Pri tome, ako igrač $B$ ne može odigrati potez, on preskače potez. Igra se završava kada su sva polja obojena, te pobjeđuje igrač koji je obojio više polja (moguć je i neriješen rezultat).
Za svako $1 \leq k \leq 1000$ odrediti da li jedan od igrača ima pobjedničku strategiju, te, ako ima, koji je to igrač.

**Rješenje**
Numerišimo redove odozgo prema dole, a kolone slijeva nadesno brojevima $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Za polje kažemo da je *bitno* ako se nalazi u presjeku reda i kolone čiji su redni brojevi djeljivi s $k$. Svaki kvadrat $k \times k$ sadrži tačno jedno bitno polje, pa igrač $B$ u svakom potezu boji u plavo tačno jedno bitno polje. Kako ima $\left\lfloor \frac{1000}{k} \right\rfloor$ redova i $\left\lfloor \frac{1000}{k} \right\rfloor$ kolona čiji su redni brojevi djeljivi s $k$, ukupni broj bitnih polja na ploči je $\left\lfloor \frac{1000}{k} \right\rfloor^2$. Označimo ovaj broj sa $b$. Razmotrimo sljedeća tri slučaja:

1° $\frac{1000}{k} \notin \mathbb{Z}$

Tada igrač $A$ ima pobjedničku strategiju: ukoliko postoji neobojeno bitno polje, oboji ga, a u suprotnom oboji proizvoljno neobojeno polje. Kako igrač $A$ igra prvi, te kako igrač $B$ u svakom potezu boji tačno jedno bitno polje, to će igrač $B$ odigrati najviše $b/2$ poteza, što znači da će obojiti najviše $\frac{b}{2} \cdot k^2$ polja. Kako $\frac{1000}{k} \notin \mathbb{Z}$, to je $\left\lfloor \frac{1000}{k} \right\rfloor < \frac{1000}{k}$, pa je $b < \left(\frac{1000}{k}\right)^2$, odakle slijedi $\frac{b}{2} \cdot k^2 < \frac{1000^2}{2}$. Dakle, igrač $B$ će obojiti manje od polovine ukupnog broja polja ploče, pa igrač $A$ pobjeđuje.

2° $\frac{1000}{k}$ je neparan cio broj

Igrač $A$ i u ovom slučaju ima pobjedničku strategiju, i to istu kao u prvom slučaju. Naime, sada je $b$ neparan cio broj, pa igrač $B$ može obojiti najviše $\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor < \frac{b}{2}$ bitnih polja, što znači da će ukupno obojiti strogo manje od $\frac{b}{2} \cdot k^2 = \frac{1000^2}{2}$ polja.

3° $\frac{1000}{k}$ je paran cio broj

U ovom slučaju nijedan igrač nema pobjedničku strategiju. Oba igrača imaju strategiju kojom garantuju barem neriješen rezultat. Za igrača $A$ to je ista strategija kao u prethodna dva slučaja. Igrač $B$ to postiže tako što u svakom potezu bira kvadrat $k \times k$ čije je donje desno polje bitno. S obzirom da je sada $b$ paran cio broj, i da svaki potez igrača $A$ eliminiše najviše jedan takav potez igrača $B$, igrač $B$ ovom strategijom garantuje da će obojiti barem $\frac{b}{2} \cdot k^2 = \frac{1000^2}{2}$ polja.

Zaključujemo, za $k \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500\}$ nijedan igrač nema pobjedničku strategiju, a za ostale $1 \leq k \leq 1000$ igrač $A$ ima pobjedničku strategiju.

**Šema bodovanja**

- Posmatranje bitnih polja definisanih u rješenju: **1 bod**
- Navođenje strategije igrača $A$ navedene u rješenju: **2 boda**
- Zaključak da tom strategijom osigurava da igrač $B$ ne može obojiti više od $\frac{b}{2} \cdot k^2$ polja: **2 boda**
- Zaključak da tom strategijom igrač $A$ pobjeđuje kada $\frac{1000}{k}$ nije cio broj ili je neparan cio broj: **3 boda**
    - Za jedan (bilo koji) od ova dva zaključka dodjeljuju se **2** od ova 3 boda
- Zaključak da oba igrača mogu garantovati neriješen rezultat kada je $\frac{1000}{k}$ paran cio broj: **2 boda**

## II RAZRED

**Zadatak 1.** Naći sve racionalne brojeve $r$ takve da su u jednačini $rx^2 + (r+1)x + r = 1$ sva rješenja cjelobrojna.

**Rješenje:**

Primijetimo prvo da za $r = 0$ imamo $x = 1$, što zadovoljava uslove zadatka. Neka je sada $r \neq 0$ broj takav da su rješenja date jednačine cjelobrojna. Zapišimo datu jednačinu kao $rx^2 + (r+1)x + r - 1 = 0$. Kako je ova jednačina kvadratna, ona ima dva rješenja (ne nužno različita), neka su to $a$ i $b$ i neka je bez gubitka opštosti $a \geq b$. Iz Vijetovih pravila imamo da je $a + b = \frac{-(r+1)}{r} = -1 - \frac{1}{r}$ i $ab = \frac{r-1}{r} = 1 - \frac{1}{r}$. Kako su $a$ i $b$ cijeli brojevi to je i $a + b$ cijeli broj, pa mora i $-1 - \frac{1}{r}$ biti cijeli broj, tj. $r = \frac{1}{n}$, za neki cijeli broj $n$. Sada imamo da je $a + b = -1 - n$ i $ab = 1 - n$. Oduzimanjem ovih jednačina dobijamo:

$$ab - a - b = 2 \Leftrightarrow$$

$$(a-1)(b-1) = 3.$$

Kako su $a$ i $b$ cijeli brojevi, posljednja jednačina ima rješenja (imajući u vidu da je $a \geq b$) $(a, b) \in \{(4,2), (0, -2)\}$, a kako je $n = 1 - ab$, to $n \in \{-7, 1\}$, tj. $r \in \{\frac{-1}{7}, 1\}$. Laganom provjerom se uvjeravamo da ove vrijednosti broja $r$ zaista zadovljavaju uslove zadatke.

Dakle, vrijednosti broja $r$ za koje su sva rješenja date jednačine cjelobrojna su $0, \frac{-1}{7}$ i $1$.

**Šema bodovanja:**

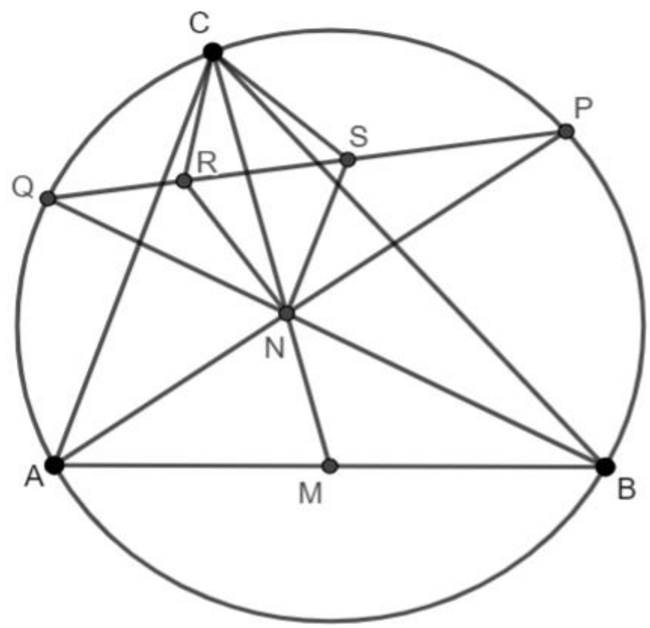
- razmatranje $r = 0$: 1 bod
- dokaz da je $a + b = -1 - \frac{1}{r}$ i $ab = 1 - \frac{1}{r}$: 2 boda
- zaključak da je $r = \frac{1}{n}$ za neki cijeli broj $n$: 2 boda
- dobijanje izraza $(a-1)(b-1) = 3$: 3 boda
- dobijanje rješenja i njihova provjera: 2 boda

**Napomena:** U zadnjoj stavci iz šeme se oduzima 1 bod ako se dobijena rješenja ne provjere.

**Zadatak 2.** Neka je $M$ sredina stranice $AB$ u trouglu $ABC$. Tačka $N$ je data na težišnici $CM$ takva da vrijedi $MN \cdot MC = \frac{AB^2}{4}$. Prave $AN$ i $BN$ sijeku kružnicu opisanu oko trougla $ABC$ po drugi put u tačkama $P$ i $Q$, redom. Neka je $R$ tačka na duži $PQ$ sa iste strane prave $CM$ kao i tačka $Q$ takva da vrijedi $\angle NRC = \angle BNC$. Slično, neka je tačka $S$ na duži $PQ$ sa iste strane prave $CM$ kao i tačka $P$ takva da vrijedi $\angle NSC = \angle ANC$. Dokazati da je $RN = SN$.

**Rješenje:**

Iz uslova zadatka je $MN \cdot MC = \frac{AB^2}{4} = MB^2$, tj. $\frac{MN}{MB} = \frac{MB}{MC}$, odakle, imajući u vidu da je $\angle BMC = \angle BMN$, slijedi sličnost trouglova $MNB$ i $MBC$. Iz te sličnosti imamo da je $\angle MNB = \angle MBC = \angle ABC$, pa je $\angle NRC = \angle BNC = 180° - \angle MNB = 180° - \angle ABC$. Iz tetivnog četverougla $CPBA$ imamo da je $\angle CPA = \angle CBA$, pa vrijedi $\angle NRC + \angle CPN = 180°$, tj. četverougao $CRNP$ je tetivan. Analogno zaključujemo da je i četverougao $CSNQ$ tetivan. Da bi dokazali da je $RN = SN$, dovoljno je dokazati da je $\angle NSR = \angle NRS$. Iz tetivnog četverougla $QNSC$ imamo da je$\angle NSQ = \angle NCQ = \angle BNC - \angle BQC = 180° - \angle ABC - \angle BAC = \angle ACB$. Analogno dobijamo da je $\angle NRP = \angle NCP = \angle ACB$, odakle slijedi da je $\angle NSR = \angle NRS, q.e.d.$




**Šema bodovanja:**

- dokaz da su trouglovi $MNB$ i $MBC$ slični: 1 bod
- dokaz da je $\angle NRC = 180° - \angle ABC$: 2 boda (1 bod se može osvojiti ako se dokaže neka ekvivalentna tvdnja, npr. da je $\angle MNB = \angle ABC$ ili da je $\angle MBN = \angle MCB$)
- dokaz da je četverougao $CRNP$ tetivan: 3 boda
- dokaz da je $\angle NSQ = \angle ACB$: 2 boda
- analogno zaključivanje sa druge strane i kraj dokaza: 2 boda

**Napomena:** Bodovi iz prve četiri stavke iz šeme bodovanja se mogu osvojiti i ako se dokažu analogne tvrdnje s druge strane.

**Zadatak 3.** Za prirodan broj $n \geq 2$ sa $A_n$ označimo broj prirodnih brojeva $k$ takvih da je udaljenost broja $n$ i njemu najbližeg cijelog broja djeljivog sa $k$ jednaka udaljenosti broja $n^3$ i njemu najbližeg cijelog broja djeljivog sa $k$. Odrediti sve prirodne brojeve $n \geq 2$ takve da je broj $A_n$ neparan.
**Napomena:** Udaljenost između brojeva $a$ i $b$ jednaka je broju $|a-b|$.

**Rješenje:**

Primijetimo da ukoliko je kod oba broja $n$ i $n^3$ najbliži broj djeljiv sa $k$ manji ili jednak od njih ili ukoliko je kod oba broja najbliži broj djeljiv sa $k$ veći ili jednak od njih, tada je uslov zadatka ekvivalentan tome da brojevi $n^3$ i $n$ daju iste ostatke pri dijeljenju sa $k$, tj. da $k|n^3-n$. S druge strane, ukoliko je kod jednog od brojeva $n$ i $n^3$ najbliži broj djeljiv sa $k$ manji ili jednak od njega, a kod drugog veći ili jednak, tada je uslov zadatka ekvivalentan tome da $n^3$ i $n$ daju suprotne ostatke pri dijeljenju sa $k$, odnosno da $k|n^3+n$. Dakle, $A_n$ je broj prirodnih brojeva $k$ takvih da $k|n^3-n$ ili $k|n^3+n$.
Sa $\tau(x)$ ćemo označavati broj pozitivnih djelilaca prirodnog broja $x$. Poznato je (i lako se dokazuje) da je broj $\tau(x)$ neparan ako i samo ako je broj $x$ potpun kvadrat. Dokažimo da je broj $\tau(n^3-n)$ paran (analogno se dokazuje da je i broj $\tau(n^3+n)$ paran). To ćemo dokazati na dva načina:

**I način:** Pretpostavimo suprotno, da je broj $n^3-n=n(n^2-1)$ potpun kvadrat. Kako su brojevi $n$ i $n^2-1$ relativno prosti, a proizvod im je kvadrat, to oba moraju biti kvadrati. Međutim, za $n \geq 2$ broj $n^2-1$ očito nije potpun kvadrat (ne postoje dva kvadrata prirodnih brojeva koji se razlikuju za 1), pa dolazimo do kontradikcije, odakle zaključujemo da broj $n^3-n$ nije potpun kvadrat, pa ima paran broj djelioca.

**II način:** Kako su brojevi $n$ i $n^2-1$ relativno prosti, to je $\tau(n^3-n)=\tau(n(n^2-1))=\tau(n^2-1)\cdot\tau(n)$, što je paran broj jer je $\tau(n^2-1)$ paran broj (zbog činjenice da broj $n^2-1$ nije potpun kvadrat).

Broj različitih djelioca u brojevima $n^3+n$ i $n^3-n$ dobijamo tako što od zbira broja djelioca ta dva broja oduzmemo broj djelioca njihovog največeg zajedničkog djelioca (jer smo te djelioce brojali dvaput u zbiru).
Sada je $A_n=\tau(n^3-n)+\tau(n^3+n)-\tau\big(NZD(n^3-n,n^3+n)\big) \equiv \tau\big(NZD(n^3-n,n^3+n)\big)\ (mod\ 2)$.
Jasno je da je $NZD(n^3-n,n^3+n)=NZD(n(n^2-1),n(n^2+1))=n\cdot NZD(n^2-1,n^2+1)$.
Ako je broj $n$ paran, tada su brojevi $n^2-1$ i $n^2+1$ relativno prosti, pa je $NZD(n^3-n,n^3+n)=n$. Broj $A_n$ će biti neparan ako i samo ako je $\tau(n)$ neparan broj, tj. ako i samo ako je $n$ potpun kvadrat. Dakle, u ovom slučaju su rješenje svi prirodni brojevi $n=(2t)^2, t \in N$.
Ako je broj $n$ neparan, tada je $NZD(n^2-1,n^2+1)=2$, pa je $NZD(n^3-n,n^3+n)=2n$. Broj $A_n$ će biti neparan ako i samo ako je $2n$ potpun kvadrat, što nije moguće jer je broj $2n$ djeljiv sa 2, a nije sa 4.
Dakle, broj $A_n$ je neparan ako i samo ako je $n=(2t)^2, t \in N$.

**Šema bodovanja:**

- zaključak da je $A_n$ jednak broju brojeva koji dijele bar jedan od brojeva $n^3 - n$ i $n^3 + n$: 2 boda
- dokaz da brojevi $n^3 + n$ i $n^3 - n$ imaju paran broj djelilaca: 2 boda
- zaključak da je $A_n = \tau(n^3 - n) + \tau(n^3 + n) - \tau\big(NZD(n^3 - n, n^3 + n)\big)$: 2 boda
- rješavanje slučaja kada je $n$ paran broj: 2 boda
- odbacivanje slučaja kada je $n$ neparan broj: 2 boda

**Zadatak 4.** Neka je $k \leq 1000$ prirodan broj. Igrači $A$ i $B$ igraju igru na ploči formata $1000 \times 1000$. Na početku su sva polja ploče bijela. Igrači igraju naizmjenično pri čemu $A$ igra prvi. Potez igrača $A$ podrazumijeva da odabere bijelo polje i oboji ga u crveno. Potez igrača $B$ podrazumijeva da odabere kvadrat dimenzija $k \times k$ čija su sva polja bijela i oboji ih u plavo. Pri tome, ako igrač $B$ ne može odigrati potez, on preskače potez. Igra se završava kada su sva polja obojena, te pobjeđuje igrač koji je obojio više polja (moguć je i neriješen rezultat).

Za svako $1 \leq k \leq 1000$ odrediti da li jedan od igrača ima pobjedničku strategiju, te, ako ima, koji je to igrač.

**Rješenje:**

Numerišimo redove odozgo prema dole, a kolone slijeva nadesno brojevima $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Za polje kažemo da je *bitno* ako se nalazi u presjeku reda i kolone čiji su redni brojevi djeljivi s $k$. Svaki kvadrat $k \times k$ sadrži tačno jedno bitno polje, pa igrač $B$ u svakom potezu boji u plavo tačno jedno bitno polje. Kako ima $\lfloor\frac{1000}{k}\rfloor$ redova i $\lfloor\frac{1000}{k}\rfloor$ kolona čiji su redni brojevi djeljivi s $k$, ukupni broj bitnih polja na ploči je $\lfloor\frac{1000}{k}\rfloor^2$. Označimo ovaj broj sa $b$. Razmotrimo sljedeća tri slučaja:

1° $\frac{1000}{k} \notin Z$

Tada igrač $A$ ima pobjedničku strategiju: ukoliko postoji neobojeno bitno polje, oboji ga, a u suprotnom oboji proizvoljno neobojeno polje. Kako igrač $A$ igra prvi, te kako igrač $B$ u svakom potezu boji tačno jedno bitno polje, to će igrač $B$ odigrati najviše $b/2$ poteza, što znači da će obojiti najviše $\frac{b}{2} \cdot k^2$ polja. Kako $\frac{1000}{k} \notin Z$, to je $\lfloor\frac{1000}{k}\rfloor < \frac{1000}{k}$, pa je $b < \left(\frac{1000}{k}\right)^2$, odakle slijedi $\frac{b}{2} \cdot k^2 < \frac{1000^2}{2}$. Dakle, igrač $B$ će obojiti manje od polovine ukupnog broja polja ploče, pa igrač $A$ pobjeđuje.

2° $\frac{1000}{k}$ je neparan cio broj

Igrač $A$ i u ovom slučaju ima pobjedničku strategiju, i to istu kao u prvom slučaju. Naime, sada je $b$ neparan cio broj, pa igrač $B$ može obojiti najviše $\lfloor\frac{b}{2}\rfloor < \frac{b}{2}$ bitnih polja, što znači da će ukupno obojiti strogo manje od $\frac{b}{2} \cdot k^2 = \frac{1000^2}{2}$ polja.

3° $\frac{1000}{k}$ je paran cio broj

U ovom slučaju nijedan igrač nema pobjedničku strategiju. Oba igrača imaju strategiju kojom garantuju barem neriješen rezultat. Za igrača $A$ to je ista strategija kao u prethodna dva slučaja. Igrač $B$ to postiže tako što u svakom potezu bira kvadrat $k \times k$ čije je donje desno polje bitno. S obzirom da je sada $b$ paran cio broj, i da svaki potez igrača $A$ eliminiše najviše jedan takav potez igrača $B$, igrač $B$ ovom strategijom garantuje da će obojiti barem $\frac{b}{2} \cdot k^2 = \frac{1000^2}{2}$ polja.

Zaključujemo, za $k \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500\}$ nijedan igrač nema pobjedničku strategiju, a za ostale $1 \leq k \leq 1000$ igrač $A$ ima pobjedničku strategiju.

**Šema bodovanja:**

- posmatranje bitnih polja definisanih u rješenju: 1 bod
- navođenje strategije igrača $A$ navedene u rješenju: 2 boda
- zaključak da tom strategijom osigurava da igrač $B$ ne može obojiti više od $\frac{b}{2} \cdot k^2$ polja: 2 boda
- zaključak da tom strategijom igrač $A$ pobjeđuje kada $\frac{1000}{k}$ nije cio broj ili je neparan cio broj: 3 boda
    - za jedan (bilo koji) od ova dva zaključka dodjeljuju se 2 od ova 3 boda
- zaključak da oba igrača mogu garantovati neriješen rezultat kada je $\frac{1000}{k}$ paran cio broj: 2 boda

**Zadatak 5.** Neka su $x, y, z$ realni brojevi takvi da vrijedi $x + y + z = 0$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Odrediti maksimalnu vrijednost izraza

$$|(x - y)(y - z)(z - x)|.$$

**Rješenje I:**

Iz uslova zadatka lagano dobijamo da je $xy + yz + zx = -3$. Iz $x + y + z = 0$ imamo da je $z = -(x + y)$ pa uvrštavanjem dobijamo da je $x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 6$, tj. $x^2 + y^2 + xy = 3$. Slično dobijamo da je $x^2 + z^2 + xz = 3$ i $y^2 + z^2 + yz = 3$. Označimo izraz $|(x - y)(y - z)(z - x)|$ sa $W$. Da bi maksimizirali $W$, dovoljno je maksimizirati $W^2$. Imamo da je

$$W^2 = (x - y)^2(y - z)^2(z - x)^2 = (x^2 - 2xy + y^2)(y^2 - 2yz + z^2)(z^2 - 2zx + x^2) =$$

$$= (3 - 3xy)(3 - 3yz)(3 - 3yx) = 27(1 - xy)(1 - yz)(1 - zx).$$

Dakle, potrebno je maksimizirati izraz $A = (1 - xy)(1 - yz)(1 - zx)$. Množenjem zagrada u posljednjem izrazu dobijamo da je:

$$A = 1 - (xy + yz + zx) + xyz(x + y + z) - (xyz)^2 = 1 - (-3) + 0 - (xyz)^2 = 4 - (xyz)^2.$$

Sada je očigledno $A \leq 4$, a jednakost se dostiže ako je neki od $x, y, z$ jednak $0$. Dakle, maksimalna vrijednost izraza $W$ je $\sqrt{27 \cdot 4} = 6\sqrt{3}$, a ta vrijednost se može dostići za npr. $x = \sqrt{3},\ y = 0, z = -\sqrt{3}$.

**Rješenje II:**

Kao u prvom rješenju, iz uslova zadatka lagano dobijamo da je $xy + yz + zx = -3$. Zbog simetričnosti uslova, možemo bez gubitka opštosti pretpostaviti da je $x \geq y \geq z$.

Uvedimo smjene $a = x - y, b = y - z, c = z - x$. Zbog pretpostavke imamo da je $a \geq 0, b \geq 0, c \leq 0$. Dalje imamo da je $a + b + c = (x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$, te $a^2 + b^2 + c^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 18$. Uvrštavanjem $c = -(a + b)$ u drugu jednačinu dobijamo $a^2 + ab + b^2 = 9$.

Potrebno je maksimizirati izraz $W = |abc| = |ab(a + b)| = ab(a + b)$ (jer vrijedi $a \geq 0, b \geq 0$). Množeći uslov $a^2 + ab + b^2 = 9$ sa $b$ dobijamo da je $a^2b + ab^2 + b^3 = 9b$, tj. $W = ab(a + b) = b(9 - b^2)$. Kako je $W \geq 0$, vrijedi da je i $9 - b^2 \geq 0$. Posmatrajmo sada izraz $W^2 = b^2(9 - b^2)^2$. Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo da je

$$9 = b^2 + \frac{9 - b^2}{2} + \frac{9 - b^2}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{W^2}{4}},$$

pri čemu smo koristili da je $W \geq 0$ i $6 - b^2 \geq 0$. Odavdje imamo da je $W \leq 6\sqrt{3}$, pri čemu se jednakost dostiže za $b = \sqrt{3}$. Vrijednost $W = 6\sqrt{3}$, možemo dostići za $a = b = \sqrt{3}$ i $c = -2\sqrt{3}$, tj. za $x = \sqrt{3}, y = 0, z = -\sqrt{3}$.

**Napomena:** Nejednakost $b(9 - b^2) \leq 6\sqrt{3}$ se mogla dokazati i na druge načine, npr. primjenjivanjem nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine na brojeve $(\sqrt{3} - 1)b, (2 - \sqrt{3})(3 + b)$ i $3 - b$, ili primijenjivanjem nejednakosti između kvadratne i geometrijske sredine na brojeve $b, \sqrt{\frac{9-b^2}{2}}$ i $\sqrt{\frac{9-b^2}{2}}$.

**Šema bodovanja za rješenje I:**

- dobijanje $x^2 + z^2 + xz = 3$ (ili neke od analognih jednačina sa $y$ ili $z$): 1 bod
- dobijanje prethodne jednačine za svaka dva para brojeva $x, y, z$: 1 bod
- izražavanje izraza $W^2$ kao $27(1 - xy)(1 - yz)(1 - zx)$ (ili izraza $W$ kao korijen iz navedenog): 3 boda
- izražavanje izraza $A$ kao $4 - (xyz)^2$: 2 boda
- zaključak da je $W \leq 6\sqrt{3}$: 1 bod
- dokaz da se vrijednost $W = 6\sqrt{3}$ može dostići: 2 boda

**Šema bodovanja za rješenje II:**

- uvođenje smjene kao u rješenju i dobijanje jednačina $a + b + c = 0$ i $a^2 + b^2 + c^2 = 18$: 2 boda
- svođenje zadatka na maksimiziranje izraza $ab(a + b)$ uz uslov $a^2 + ab + b^2 = 9$: 2 boda
- dokaz da je $ab(a + b) \leq 6\sqrt{3}$: 4 boda
- dokaz da se vrijednost $W = 6\sqrt{3}$ može dostići: 2 boda

**Napomena:** Nije dovoljno naći vrijednosti brojeva $a, b, c$ za koje se dostiže vrijednost $W = 6\sqrt{3}$, nego je potrebno navesti tačne vrijednosti brojeva $x, y, z$ (ili dokazati da takvi brojevi postoje). Ukoliko se navedu samo vrijednosti brojeva $a, b, c$ u zadnjoj stavci iz šeme bodovanja se osvaja 1 bod.

## III RAZRED

**Zadatak 1.** U skupu realnih brojeva riješiti sistem jedinačina:

$$x + y + z = 3,$$

$$2^x + 2^y + 2^z = 7,$$

$$2^{-x} + 2^{-y} = \frac{3}{4}.$$

**Rješenje:**

Uvedimo smjenu $2^x = u, 2^y = v, 2^z = w$, gdje su $u, v, w$ pozitivni realni brojevi. Tada je $u + v + w = 7, \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{3}{4}$, te $uvw = 2^{x+y+z} = 2^3 = 8$. Sada je $\frac{3}{4} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u+v}{uv} = \frac{7-w}{\frac{8}{w}}$, što se nakon sređivanja svodi na $w^2 - 7w + 6 = 0$, tj. $(w-6)(w-1) = 0$. Dakle, $w = 6$ ili $w = 1$.

Za $w = 6$ dobijamo $u + v = 1$ i $uv = \frac{8}{w} = \frac{4}{3}$, odnosno $u(1-u) = \frac{4}{3}$, tj. $u^2 - u + \frac{4}{3} = 0$. Diskriminanta posljednje kvadratne jednačine je $1^2 - 4 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{13}{3}$, pa ona nema rješenja u skupu realnih brojeva.

Za $w = 1$ dobijamo $u + v = 6$ u $uv = \frac{8}{w} = 8$, odnosno $u(6-u) = 8$, tj. $u^2 - 6u + 8 = 0$, odakle dobijamo $(u-2)(u-4) = 0$. Za $u = 2$ dobijamo $v = 4$, odnosno $x = 1, y = 2, z = 0$. Za $u = 4$ slično dobijamo $x = 2, y = 1, z = 0$. Provjerom dobijamo da ove trojke zaista zadovoljavaju uslove zadatke.

**Šema bodovanja:**

- uvođenje smjene te dobijanje uslova $u + v + w = 7$ i $\frac{1}{u} + \frac{1}{w} = \frac{3}{4}$ (1 bod)
- dobijanje uslova $uvw = 8$ (2 boda)
- dobijanje jednačine samo po $w$ (npr. $\frac{3}{4} = \frac{7-w}{\frac{8}{w}}$) (2 boda)
- zaključak da je $w = 1$ ili $w = 6$ (1 bod)
- odbacivanje slučaja $w = 6$ (2 boda)
- rješavanje slučaja $w = 1$ (2 boda)

**Napomena:** Rješavanje sistema u skupu prirodnih ili cijelih brojeva, te dobijanje rješenja bez ispravnog postupka (pogađadnje rješenja) nosi 0 bodova.

**Zadatak 2.** Za prirodan broj $n \geq 2$ sa $A_n$ označimo broj prirodnih brojeva $k$ takvih da je udaljenost broja $n$ i njemu najbližeg cijelog broja djeljivog sa $k$ jednaka udaljenosti broja $n^3$ i njemu najbližeg cijelog broja djeljivog sa $k$. Odrediti sve prirodne brojeve $n \geq 2$ takve da je broj $A_n$ neparan.
**Napomena:** Udaljenost između brojeva $a$ i $b$ jednaka je broju $|a-b|$.

**Rješenje:**
Primijetimo da ukoliko je kod oba broja $n$ i $n^3$ najbliži broj djeljiv sa $k$ manji ili jednak od njih ili ukoliko je kod oba broja najbliži broj djeljiv sa $k$ veći ili jednak od njih, tada je uslov zadatka ekvivalentan tome da brojevi $n^3$ i $n$ daju iste ostatke pri dijeljenju sa $k$, tj. da $k|n^3-n$. S druge strane, ukoliko je kod jednog od brojeva $n$ i $n^3$ najbliži broj djeljiv sa $k$ manji ili jednak od njega, a kod drugog veći ili jednak, tada je uslov zadatka ekvivalentan tome da $n^3$ i $n$ daju suprotne ostatke pri dijeljenju sa $k$, odnosno da $k|n^3+n$. Dakle, $A_n$ je broj prirodnih brojeva $k$ takvih da $k|n^3-n$ ili $k|n^3+n$.
Sa $\tau(x)$ ćemo označavati broj pozitivnih djelilaca prirodnog broja $x$. Poznato je (i lako se dokazuje) da je broj $\tau(x)$ neparan ako i samo ako je broj $x$ potpun kvadrat. Dokažimo da je broj $\tau(n^3-n)$ paran (analogno se dokazuje da je i broj $\tau(n^3+n)$ paran). To ćemo dokazati na dva načina:

**I način:** Pretpostavimo suprotno, da je broj $n^3-n=n(n^2-1)$ potpun kvadrat. Kako su brojevi $n$ i $n^2-1$ relativno prosti, a proizvod im je kvadrat, to oba moraju biti kvadrati. Međutim, za $n \geq 2$ broj $n^2-1$ očito nije potpun kvadrat (ne postoje dva kvadrata prirodnih brojeva koji se razlikuju za 1), pa dolazimo do kontradikcije, odakle zaključujemo da broj $n^3-n$ nije potpun kvadrat, pa ima paran broj djelioca.

**II način:** Kako su brojevi $n$ i $n^2-1$ relativno prosti, to je $\tau(n^3-n)=\tau(n(n^2-1))=\tau(n^2-1)\cdot\tau(n)$, što je paran broj jer je $\tau(n^2-1)$ paran broj (zbog činjenice da broj $n^2-1$ nije potpun kvadrat).

Broj različitih djelioca u brojevima $n^3+n$ i $n^3-n$ dobijamo tako što od zbira broja djelioca ta dva broja oduzmemo broj djelioca njihovog najvećeg zajedničkog djelioca (jer smo te djelioce brojali dvaput u zbiru).
Sada je $A_n=\tau(n^3-n)+\tau(n^3+n)-\tau\big(NZD(n^3-n,n^3+n)\big) \equiv \tau\big(NZD(n^3-n,n^3+n)\big)\ (mod\ 2)$.
Jasno je da je $NZD(n^3-n,n^3+n)=NZD(n(n^2-1),n(n^2+1))=n\cdot NZD(n^2-1,n^2+1)$.
Ako je broj $n$ paran, tada su brojevi $n^2-1$ i $n^2+1$ relativno prosti, pa je $NZD(n^3-n,n^3+n)=n$. Broj $A_n$ će biti neparan ako i samo ako je $\tau(n)$ neparan broj, tj. ako i samo ako je $n$ potpun kvadrat. Dakle, u ovom slučaju su rješenje svi prirodni brojevi $n=(2t)^2, t \in \mathbb{N}$.
Ako je broj $n$ neparan, tada je $NZD(n^2-1,n^2+1)=2$, pa je $NZD(n^3-n,n^3+n)=2n$. Broj $A_n$ će biti neparan ako i samo ako je $2n$ potpun kvadrat, što nije moguće jer je broj $2n$ djeljiv sa 2, a nije sa 4.
Dakle, broj $A_n$ je neparan ako i samo ako je $n=(2t)^2, t \in \mathbb{N}$.

**Šema bodovanja**
- zaključak da je $A_n$ jednak broju brojeva koji dijele bar jedan od brojeva $n^3-n$ i $n^3+n$ (2 boda)
- dokaz da brojevi $n^3+n$ i $n^3-n$ imaju paran broj djelilaca (2 boda)
- zaključak da je $A_n=\tau(n^3-n)+\tau(n^3+n)-\tau\big(NZD(n^3-n,n^3+n)\big)$ (2 boda)
- rješavanje slučaja kada je $n$ paran broj (2 boda)
- odbacivanje slučaja kada je $n$ neparan broj (2 boda)

**Zadatak 3.** Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Dokazati da vrijedi identitet:

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[4]{n}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt[n]{n}\rfloor = \lfloor\log_2 n\rfloor + \lfloor\log_3 n\rfloor + \lfloor\log_4 n\rfloor + \cdots + \lfloor\log_n n\rfloor.$$

**Napomena:** Sa $\lfloor x\rfloor$ označavamo najveći cijeli broj koji nije veći od $x$ (npr. $\lfloor 3.14\rfloor = 3$ i $\lfloor 3\rfloor = 3$).

**Rješenje 1:**

Neka je $\lfloor\log_2 n\rfloor = m$. Tada svi sabirci na desnoj strani pripadaju skupu $\{1,2,\dots,m\}$. Te sabirke ćemo grupisati tako da su u svakoj grupi svi sabirci jednaki, a u različitim grupama različiti. Neka je $j$ proizvoljan broj iz skupa $\{1,2,\dots,m\}$. Izračunajmo koliko ima sabiraka koji su jednaki $j$. Vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$\lfloor\log_k n\rfloor = j \iff j \leq \log_k n < j+1 \iff \frac{1}{j+1} < \log_n k \leq \frac{1}{j} \iff n^{\frac{1}{j+1}} < k \leq n^{\frac{1}{j}} \iff \sqrt[j+1]{n} < k \leq \sqrt[j]{n}.$$

Iz ovoga slijedi da je broj sabiraka koji su jednaki $j$ jednak $\lfloor\sqrt[j]{n}\rfloor - \lfloor\sqrt[j+1]{n}\rfloor$. Sada je

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \log_k n = \sum_{j=1}^{m} j \cdot \left(\lfloor\sqrt[j]{n}\rfloor - \lfloor\sqrt[j+1]{n}\rfloor\right) = \\ = n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 2(\lfloor\sqrt{n}\rfloor - \lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor) + 3(\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor - \lfloor\sqrt[4]{n}\rfloor) + \cdots + m(\lfloor\sqrt[m+1]{n}\rfloor - \lfloor\sqrt[m+1]{n}\rfloor) = \\ = n + \sum_{j=2}^{m} \lfloor\sqrt[j]{n}\rfloor - m \cdot \lfloor\sqrt[m+1]{n}\rfloor.\end{aligned}$$

Dokažimo da je $\lfloor\sqrt[j]{n}\rfloor = 1$ za sve $j \geq m+1$. Dovoljno je dokazati da je $\lfloor\sqrt[m+1]{n}\rfloor = 1$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $\sqrt[m+1]{n} \geq 2$, tj. $n \geq 2^{m+1}$, tj. $\log_2 n \geq m+1 = \lfloor\log_2 n\rfloor + 1$, što je očigledna kontradikcija (za svaki realan broj $x$ vrijedi $x < \lfloor x\rfloor + 1$).

Konačno imamo $\sum_{k=2}^{n} \log_k n = \sum_{j=2}^{m} \lfloor\sqrt[j]{n}\rfloor + n - m = \sum_{j=2}^{m} \lfloor\sqrt[j]{n}\rfloor + \sum_{j=m+1}^{n} \lfloor\sqrt[j]{n}\rfloor = \sum_{j=2}^{n} \lfloor\sqrt[j]{n}\rfloor$, što je i trebalo dokazati.

**Napomena:** Slično gornjem rješenju, mogli su se grupisati elementi na lijevoj strani u grupe sa jednakim vrijednostima, te na sličan način dobiti tražena jednakost. Naime, kako vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$\lfloor\sqrt[j]{n}\rfloor = k \iff k \leq \sqrt[j]{n} < k+1 \iff k^j \leq n < (k+1)^j \iff \log_{k+1} n < j \leq \log_k n,$$

to je broj elemenata na lijevoj strani koji su jednaki $k$ jednak $\lfloor\log_k n\rfloor - \lfloor\log_{k+1} n\rfloor$ (ovdje nam $k \in \{1,2,\dots,\lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$, te uzimamo konvenciju $\log_1 n = n$). Sada se sumiranjem slično kao u prvom rješenju dobija traženi identitet.

**Šema bodovanja:**

- izračunavanje koliko ima sabiraka koji su jednaki $j$ (4 boda), međutim ukoliko je to izračunato samo za neko specifično $j$ (npr. $j = 3$) dobijaju se 2 boda. Svaki smislen pokušaj izračunavanja koliko ima sabiraka koji su jednaki $j$ vrednuje se jednim bodom.
- dobijanje jednakosti $\sum_{k=2}^{n} \log_k n = n + \sum_{j=2}^{m} \lfloor\sqrt[j]{n}\rfloor - m \cdot \lfloor\sqrt[m+1]{n}\rfloor$ (3 boda)
- završetak dokaza (3 boda)

**Napomena:** Sumiranje sa grupisanjem elemenata na lijevoj strani se boduje analogno.

**Rješenje 2:**

Tvrdnju ćemo dokazati koristeći princip matematičke indukcije. Označimo lijevu stranu sa $L_n$, a desnu sa $R_n$. Kako je $L_2 = 1 = R_2$, tvrdnja vrijedi za $n = 2$. Neka sada tvrdnja vrijedi za $n$, tj. neka je $L_n = R_n$. Posmatrajmo razliku $L_{n+1} - L_n$. Primijetimo da za $k \in \{2,3,\dots,n\}$ vrijedi $\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor = \lfloor \sqrt[k]{n+1} \rfloor$, kad god broj $n+1$ nije $k$-ti stepen prirodnog broja. S druge strane, kada $n+1$ jeste $k$-ti stepen prirodnog broja, tada je očito $\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor + 1 = \lfloor \sqrt[k]{n+1} \rfloor$. Dakle, kada posmatramo sumu $L_{n+1}$ (bez posljednjeg člana), broj članova koji se povećaju za 1 u odnosu na $L_n$ jednak je broju načina da broj $n+1$ zapišemo u obliku $a^k$, gdje su $a$ i $k$ prirodni brojevi i vrijedi $k \geq 2$ (ne moramo postavljati uslov $k \leq n$ jer je slučaj $k > n$ nemoguć zbog nejednakosti $2^{n+1} > n+1$). Kako pri tome u sumi $L_{n+1}$ imamo dodatni član $\lfloor \sqrt[n+1]{n+1} \rfloor$ koji je jednak 1 (jer je $2^{n+1} > n+1$), to je broj $L_{n+1} - L_n$ jednak broju načina da broj $n+1$ zapišemo u obliku $a^k$, gdje su $a$ i $k$ prirodni brojevi (u odnosu na prijašnje načine, dodali smo još jedan način za $a = n+1$ i $k = 1$). Posmatrajmo sada razliku $R_{n+1} - R_n$. Primijetimo da za $a \in \{2,3,\dots,n\}$ vrijedi $\lfloor \log_a n \rfloor = \lfloor \log_a(n+1) \rfloor$, kad god broj $n+1$ nije stepen broja $a$. S druge strane, kada broj $n+1$ jeste stepen broja $a$, tada je očito $\lfloor \log_a n \rfloor + 1 = \lfloor \log_a(n+1) \rfloor$. Dakle, u sumi $R_{n+1}$ (bez posljednjeg člana) je broj članova koji se povećaju za 1 u odnosu na $R_n$ jednak broju načina da broj $n+1$ zapišemo u obliku $a^k$, gdje su $a$ i $k$ prirodni brojevi i vrijedi $a \leq n$. Kako u sumi $R_{n+1}$ imamo dodatni član $\lfloor \log_{n+1}(n+1) \rfloor = 1$, to je broj $R_{n+1} - R_n$ jednak broju načina da broj $n+1$ zapišemo u obliku $a^k$, gdje su $a$ i $k$ prirodni brojevi (u odnosu na ranije načine dodali smo samo još način za $a = n+1, k = 1$).

Dakle, vrijedi $L_{n+1} - L_n = R_{n+1} - R_n$, pa kako je po induktivnoj pretpostavci $L_n = R_n$, to je $L_{n+1} = R_{n+1}$. Ovim je dokaz završen.

**Napomena:** Postoji i neinduktivna varijanta gornjeg rješenja. Naime, označimo sa $X_n$ broj uređenih parova $(a,k)$ prirodnih brojeva većih od 1 takvih da je $a^k \leq n$. Kako je $a^k \leq n$ ekvivalentno sa $a \leq \sqrt[k]{n}$, to je za fiksno $k \in \{2,3,\dots,n\}$ broj ovakvih parova $(a,k)$ jednak $\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor - 1$ (oduzimamo 1 jer ne računamo rješenje $a = 1$). Zbog toga je $X_n = \sum_{k=2}^{n}(\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor - 1) = L_n - (n-1)$. (1) S druge strane, kako je $a^k \leq n$ ekvivalentno sa $k \leq \log_a n$, to je za fiksno $a \in \{2,3,\dots,n\}$ broj ovakvih parova $(a,k)$ jednak $\lfloor \log_a n \rfloor - 1$ (oduzimamo 1 jer ne računamo rješenje $k = 1$). Zbog toga je $X_n = \sum_{a=2}^{n}(\lfloor \log_a n \rfloor - 1) = R_n - (n-1)$. (2)

Iz (1) i (2) očigledno slijedi $L_n = R_n$, što je i trebalo dokazati.

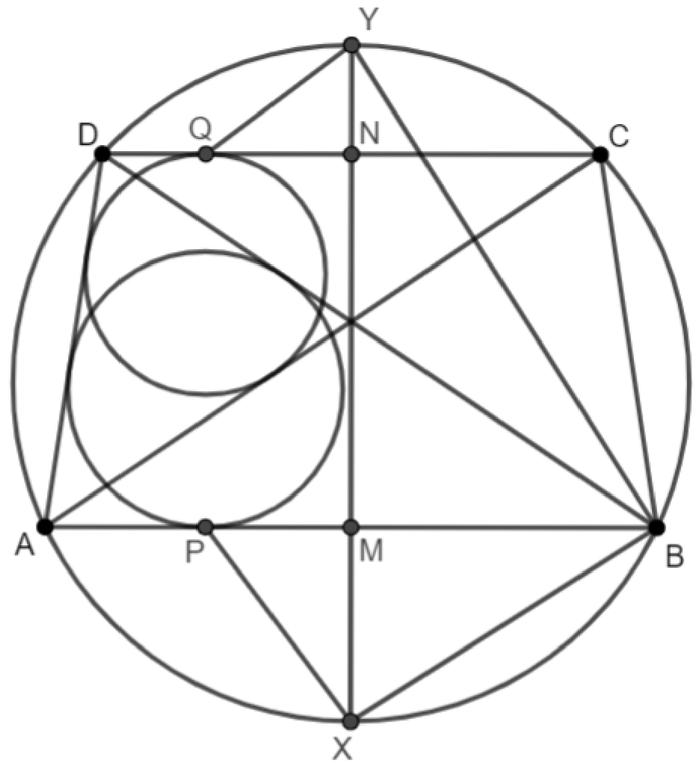
**Šema bodovanja:**

- posmatranje razlika $L_{n+1} - L_n$ i $R_{n+1} - R_n$ i rješavanje zadatka matematičkom indukcijom (1 bod)
- jednakosti $\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor = \lfloor \sqrt[k]{n+1} \rfloor$ i $\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor + 1 = \lfloor \sqrt[k]{n+1} \rfloor$, u zavisnosti da li je $n+1$ $k$-ti stepen (1 bod)
- zaključak da je $L_{n+1} - L_n$ jednak broju parova $(a,k)$ takvih da je $a^k = n+1$ (3 boda)
- jednakosti $\lfloor \log_a n \rfloor = \lfloor \log_a(n+1) \rfloor$ i $\lfloor \log_a n \rfloor + 1 = \lfloor \log_a(n+1) \rfloor$ u zavisnosti da li je $n+1$ stepen broja $k$ (1 bod)
- zaključak da je $R_{n+1} - R_n$ jednak broju parova $(a,k)$ takvih da je $a^k = n+1$ (3 boda)
- završetak dokaza (1 bod)

**Napomena:** Za neinduktivno rješenje šema je slična. Prvi bod se dobija na posmatranje broja parova $(a,k)$ takvih da je $a^k \leq n$. Po 4 boda nosi dobijanje relacija $X_n = L_n - (n-1)$ i $X_n = R_n - (n-1)$, pri čemu 1 od ta 4 boda nosi zaključak koliko parova ima za fiksno $k$ (ili fiksno $a$). Završetak dokaza nosi 1 bod.

**Zadatak 4.** Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) je upisan u kružnicu $k$. Kružnice upisane u trouglove $ABD$ i $ACD$ dodiruju osnovice trapeza $AB$ i $CD$ u tačkama $P$ i $Q$, respektivno. Tačke $X$ i $Y$ su sredine lukova $\widehat{AB}$ i $\widehat{CD}$ kružnice $k$ koji ne sadrže tačke $D$ i $A$, respektivno. Dokazati da se prave $XP$ i $YQ$ sijeku na kružnici $k$.

**Rješenje 1:**




Neka su $M$ i $N$ sredine osnovica trapeza $ABCD$. Kako je trapez $ABCD$ tetivni, to je on jednakokraki, pa tačke $X, M, N, Y$ pripadaju simetrali stranice $AB$ (što je ujedno i simetrala stranice $CD$). Kako je $XY$ prečnik kružnice $k$, da bi se prave $XP$ i $YQ$ sijekle na kružnici $k$, dovoljno je da vrijedi $\angle QYX + \angle PXY = 90°$. Primijetimo da je za to dovoljno da pravougli trouglovi $QNY$ i $PMX$ budu slični, tj. da vrijedi $\frac{QN}{NY} = \frac{MX}{MP}$, tj. $QN \cdot MP = MX \cdot NY$.

Imamo $MP = AM - AP = \frac{AB}{2} - \frac{AB+AD-BD}{2} = \frac{BD-AD}{2} = \frac{AC-AD}{2} = \frac{CD}{2} - \frac{CD+AD-AC}{2} = NQ$. Kako je $BM$ visina pravouglog trougla $MBY$, to je $BX^2 = XM \cdot XY$, tj. $XM = \frac{BX^2}{XY}$. Analogno je i $YN = \frac{CY^2}{XY}$, pa je $XM \cdot YN = \frac{BX^2 \cdot CY^2}{XY^2}$. Dakle, dovoljno je dokazati $\frac{BD-AD}{2} = \frac{BX \cdot CY}{XY}$.

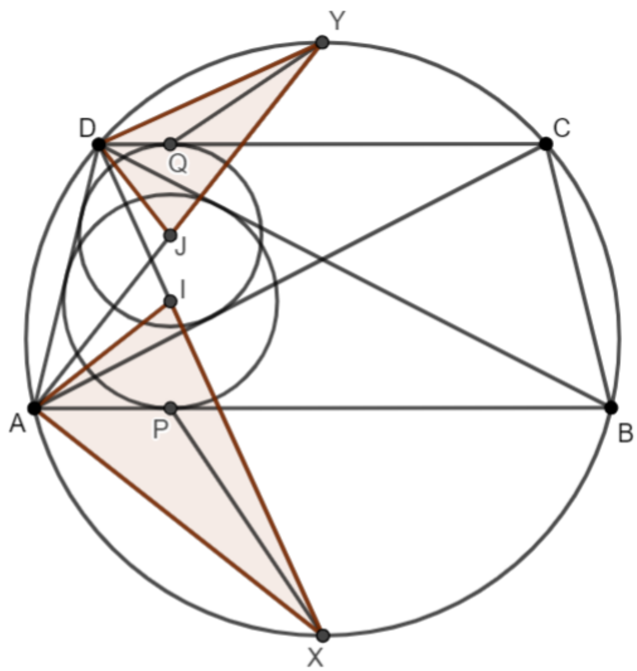
Neka je $XY = 2R$ prečnik kružnice $k$. Tada je iz sinusne teoreme $BD = 2R \cdot \sin\angle BAD$, $AD = 2R \cdot \sin\angle ABD$, $BX = 2R \cdot \sin\angle BDX = 2R \cdot \sin\frac{\angle BDA}{2}$, $CY = 2R \cdot \sin\frac{\angle CAD}{2}$. Nakon uvrštavanja, potrebno je dokazati $\frac{\sin\angle BAD - \sin\angle ABD}{2} = \sin\frac{\angle BDA}{2} \cdot \sin\frac{\angle CAD}{2}$ $(*)$. Kako je $\frac{\sin x - \sin y}{2} = \sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2}$, to je $\frac{\sin\angle BAD - \sin\angle ABD}{2} = \sin\frac{\angle BAD - \angle ABD}{2} \cdot \cos\frac{\angle BAD + \angle ABD}{2}$. (1) Kako je $\angle ABD = \angle BAC$, to je $\angle BAD - \angle ABD = \angle BAD - \angle BAC = \angle DAC$, pa je $\sin\frac{\angle BAD - \angle ABD}{2} = \sin\frac{\angle CAD}{2}$. (2) S druge strane, kako je $\angle BAD + \angle ABD + \angle BDA = 180°$, to je $\frac{\angle BAD + \angle ABD + \angle BDA}{2} = 90°$, pa je $\cos\frac{\angle BAD + \angle ABD}{2} = \sin\frac{\angle BDA}{2}$. (3) Iz (1), (2) i (3) slijedi $(*)$.

**Šema bodovanja:**

- zaključak da je dovoljno dokazati $\frac{QN}{NY} = \frac{MX}{MP}$ (3 boda), i to:
  - zaključak da je dovoljno da vrijedi $\angle QYX + \angle PXY = 90°$ (1 bod)
  - zaključak da je dovoljno dokazati sličnost trouglova $YQN$ i $PMX$ (1 bod)
  - zapisivanje odnosa kojeg je potrebno dokazati (1 bod)
- dokaz da je $PM \cdot QN = \left(\frac{BD-AD}{2}\right)^2$ (1 bod)
- dokaz da je $XM \cdot YN = \frac{BX^2 \cdot CY^2}{XY^2}$ (2 boda)
- svođenje zadatka na dokazivanje jednakosti $(*)$ (2 boda)
- završetak dokaza (2 boda)

**Rješenje 2:**

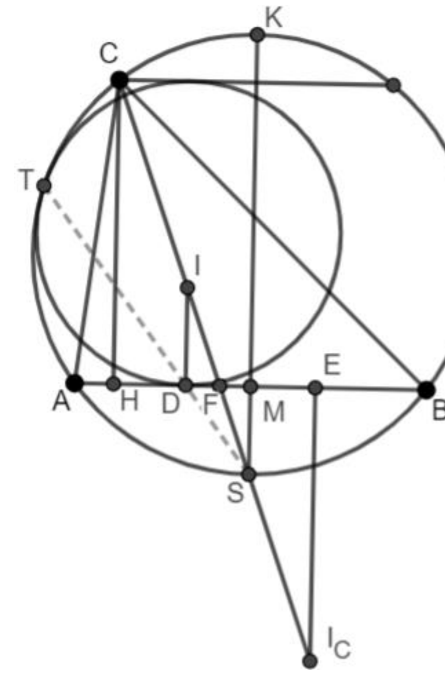
Neka su $I$ i $J$ redom centri kružnica upisanih u trouglove $ABD$ i $ACD$. Kao u prvom rješenju zaključujemo da je trapez jednakokraki i da je $XY$ prečnik kružnice $k$. Kako su i $AJ$ i $AY$ simetrale ugla $\angle DAC$, to su tačke $A, J, Y$ kolinearne. Analogno su tačke $D, I, X$ kolinearne. Poznato je (i lako se dokazuje) da je $XA = XI$ i $YJ = YD$, pa kako je $\angle DYJ = \angle DYA = \angle DXA = \angle IXA$, to su trouglovi $AXI$ i $DJY$ slični. Dalje, kako su prave $AB$ i $CD$ paralelne, to je $\angle BAD + \angle CDA = 180°$, tj. $\frac{\angle BAD + \angle CDA}{2} = 90°$, odakle je $\angle QDJ = \frac{\angle CDA}{2} = 90° - \frac{\angle BAD}{2} = 90° - \angle BAI = \angle AIP$, te analogno i $\angle IAP = \angle DJQ$, što znači da su tačke $P$ i $Q$ odgovarajuće tačke u ovim sličnim trouglovima. Primijetimo također da su pomenuti trouglovi isto orijentisani te da imaju okomite stranice (na primjer, $DX$ je unutrašnja, a $DY$ vanjska simetrala ugla $\angle ADB$, pa su okomite). Kako su $P$ i $Q$ odgovarajuće tačke u ovim trouglovima, to je $XP$ okomito na $YQ$, odakle slijedi da njihov presjek pripada kružnici sa prečnikom $XY$, tj. kružnici $k$, što je i trebalo dokazati.




**Šema bodovanja:**

- zaključak da su trouglovi $AXI$ i $DJY$ slični (1 bod)
- zaključak da ovi trouglovi imaju okomite stranice (2 boda), pri čemu se ovi bodovi dobijaju samo ukoliko je ta tvrdnja navedena u kontekstu sličnosti trouglova (na primjer, zaključci $DY$ okomito na $DX$ i $AX$ okomito na $AY$ sami za sebe ne nose bodove)
- zaključak da su tačke $P$ i $Q$ odgovarajuće u ovim trouglovima (4 boda)
- završetak dokaza (3 boda)

**Rješenje 3:**




Dokažimo najprije sljedeću lemu, iz koje će lako slijediti tvrdnja zadatka:

**Lema:** Neka upisana kružnica trougla $ABC$ dodiruje stranicu $AB$ u $D$, te neka je $S$ sredina luka $AB$ opisane kružnice $\omega$ trougla $ABC$ na kojem nije tačka $C$. Kružnica $\psi$ dodiruje pravu $AB$ u $D$ i kružnicu $\omega$ u $T$, tako da $T$ pripada luku $\widehat{ACB}$. Tada su tačke $T, D, S$ kolinearne, te prava kroz $C$ paralelna sa $AB$ dodiruje kružnicu $\psi$.

**Dokaz:** Primijetimo da homotetija u $T$ koja slika kružnicu $\psi$ u $\omega$, slika pravu $AB$ u njoj paralelnu tangentu. Međutim, ta paralelna tangenta dodiruje $\omega$ u $S$, pa se tom homotetijom $D$ slika u $S$. Dakle, tačke $T, D, S$ su kolinearne. Za drugi dio leme dovoljno je dokazati da je prečnik kružnice $\psi$ jednak $h$, gdje je $h$ dužina visine iz $C$ trougla $ABC$. Koeficijent pomenute homotetije je $\frac{TS}{TD}$, pa je dovoljno dokazati da vrijedi $\frac{TS}{TD} = \frac{2R}{h}$ $(*)$, gdje je $R$ poluprečnik kružnice $\omega$. Kako je $\angle ATS = \angle ACS = \angle BCS = \angle BAS$, to je $SA$ tangenta na opisanu kružnicu trougla $ADT$, pa je $SA^2 = SD \cdot ST$. S druge strane, iz potencije tačke $D$ na kružnicu $\omega$ vrijedi $AD \cdot BD = SD \cdot DT$. Dijeljem posljednje dvije relacije dobijamo $\frac{ST}{TD} = \frac{SA^2}{AD \cdot BD}$. $(1)$ Neka je $I$ centar upisane kružnice trougla $ABC$, $r$ poluprečnik te kružnice, $I_C$ centar pripisane kružnice trougla $ABC$, $r_C$ poluprečnik te kružnice, a $E$ tačka u kojoj ta kružnica dodiruje $AB$. Jednostavno se dobija da su trouglovi $ADI$ i $AEI_C$ slični, odakle je $r \cdot r_C = ID \cdot I_C E = AD \cdot AE = AD \cdot BD$. $(2)$ S druge strane, ako je $M$ sredina stranice $AB$, a $K$ tačka dijametralno suprotna $S$ na $\omega$, tada se lako dobija $SB^2 = SM \cdot SK = SM \cdot 2R$ $(3)$ Uvrštavajući $(2)$ i $(3)$ u $(1)$, a zatim to u $(*)$, dobijamo da je dovoljno dokazati $\frac{r_C}{h} = \frac{MS}{I_C E}$, što je ekvivalentno sa $\frac{CI}{IF} = \frac{SI_C}{FS} = \frac{SA}{FS}$, gdje je $F$ presjek $CS$ i $AB$. Međutim, kako je iz teoreme o simetrali ugla $\frac{CI}{IF} = \frac{BC}{BF}$, a iz sličnosti trouglova $AFS$ i $BFC$ vrijedi $\frac{SA}{FS} = \frac{BC}{BF}$, čime je dokaz leme završen.

Vratimo se sada rješavanju zadatka. Ako prave $XP$ i $YQ$ sijeku $k$ u tačkama $T_1$ i $T_2$, primijetimo da kružnice $\psi$ iz leme za trouglove $ABD$ i $ACD$ dodiruju $k$ u $T_1$ i $T_2$, redom, te da obje te kružnice dodiruju $AB$ i $CD$. Međutim, postoji samo jedna kružnica koja dodiruje prave $AB$ i $CD$ te kružnicu $k$ iznutra na luku $AD$, pa se tačke $T_1$ i $T_2$ poklapaju, što pokazuje da se prave $XP$ i $YQ$ sijeku na $k$, što je i trebalo dokazati.

**Šema bodovanja:**

- zaključak da kružnica koja dodiruje $AB$ u $P$ i kružnicu $k$ prolazi kroz presjek prave $XP$ sa kružnicom $k$ (1 bod)
- zaključak da je dovoljno dokazati da ta kružnica dodiruje pravu $CD$ (2 boda)
- zaključak da je dovoljno da poluprečnik te kružnice bude $h$ (1 bod)
- svođenje dokaza leme na nešto što ne zavisi od tačke $T$, npr. na jednakost $\frac{SA^2}{AD \cdot BD} = \frac{2R}{h}$ (3 boda)
- završetak dokaza (3 boda)

**Zadatak 5.** U ravni su date 2023 prave od kojih nikoje dvije nisu paralelne i ne postoje tri prave koje se sijeku u istoj tački. Ove linije dijele ravan na određen broj disjunktnih regiona. Dokazati da ima najmanje $1348$ trouglova među tim regionima.

**Rješenje:**

Neka je $P$ skup svih tačaka presjeka datih pravih i neka je $T$ skup svih trouglova koji nastaju particijom ravni na regione pomoću datih 2023 pravih. Treba pokazati da skup $T$ ima bar $1348$ elemenata.

Svaka prava dijeli ravan na dva dijela (otvorene poluravni) koje ćemo zvati stranama prave (sama prava ne pripada niti jednoj svoj strani). Imamo ukupno $2 \cdot 2023 = 4046$ parova $(p, \alpha)$, pri čemu je $p$ jedna od datih 2023 pravih i $\alpha$ strana od $p$. Uzmimo jedan takav par $(p, \alpha)$ i pretpostavimo da $\alpha$ sadrži bar jednu tačku iz skupa $P$. Od svih tačaka iz skupa $P$ koje se nalaze u $\alpha$ označimo sa $A$ onu koja je najbliža pravoj $p$. Postoje dvije prave $p_1$ i $p_2$ iz skupa $P$ koje prolaze tačkom $A$. Neka je $\{B\} = p \cap p_1$ i $\{C\} = p \cap p_2$. Tada trougao $ABC$ leži u skupu $T$. Naime, u suprotnom bi bar jedna od naših $2023$ pravih imala tačku unutar trougla $ABC$ i onda bi ona sijekla ili stranicu $AB$ ili stranicu $AC$. Tačka presjeka bi tada bila u skupu $P$ i bila bi bliža pravoj $p$ od tačke $A$, što je kontradikcija sa izborom tačke $A$.

Znači, svakom paru $(p, \alpha)$ takvom da $\alpha$ sadrži tačku iz $P$ možemo pridružiti trougao iz $T$ čija jedna stranica leži na pravoj $p$ i jedan vrh se nalazi u $\alpha$. Svaki trougao iz $T$ je pridružen najviše tri para $(p, \alpha)$. Odatle slijedi da je $|T| \geq \frac{N}{3}$, pri čemu smo sa $|T|$ označili broj elemenata skupa $T$, a $N$ je broj parova $(p, \alpha)$ takvih da je $p$ jedna od naše $2023$ prave i $\alpha$ je ona strana prave $p$ koja sadrži tačku iz skupa $P$.

Tvrdimo da postoje najviše dva para $(p, \alpha)$ takva da $\alpha$ ne sadrži tačku iz $P$. Dokažimo to. Za svaku pravu $p$ bar jedna od njenih strana ima tačaka iz $P$. Posmatrajmo sada bilo koje tri date prave $p_1, p_2, p_3$. Neka je $p$ četvrta prava i neka su $\{A_i\} = p \cap p_i$, $i = 1,2,3$. Pretpostavimo da $A_2$ leži između $A_1$ i $A_3$ na pravoj $p$. Tada su tačke $A_1$ i $A_3$ iz $P$ i leže sa različitih strana prave $p_2$. Ovim smo dokazali da među bilo koje tri prave bar jedna od njih ima tačaka iz $P$ sa obje svoje strane. Dakle, postoje najviše dvije od naših pravih koje nemaju tačaka iz $P$ sa obje svoje strane, što smo i željeli dokazati.

Dakle, $N \geq 4046 - 2 = 4044$ i $|T| \geq \frac{4044}{3} = 1348$, što je i trebalo dokazati.

**Šema bodovanja:**

- dokaz da za sve $(p, \alpha)$ takve da postoji tačka iz $P$ u $\alpha$ postoji trougao sa stranicom na $p$ (5 bodova)
- dokaz da postoje najviše dva para $(p, \alpha)$ takva da $\alpha$ ne sadrži tačku iz $P$ (3 boda)
- završetak dokaza (2 boda)

**Napomena:** Ukoliko učenik pokušava dokazati tvrdnju sličnu prvoj stavci (tj. ukoliko pokušava za svaku pravu pronaći dva trougla), dobija bod samo ukoliko nema drugih bodova na zadatku. Ako učenik svede zadatak na dokazivanje druge stavke (tj. ako pokaže da je dovoljno da ona vrijedi), dobija $5 + 2 = 7$ bodova.

## IV RAZRED

**Zadatak 1.** Dat je niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivnih realnih brojeva koji imaju osobinu da za sve $n \geq 2$ vrijedi da je $(n+1)^{a_n} = n^{a_{n-1}}$. Odrediti vrijednosti od $n$ za koje je $a_n < \frac{a_1}{2023}$.

**Rješenje:**

Logaritmiranjem date jednakosti dobijemo

$$(n+1)^{a_n} = n^{a_{n-1}} \Leftrightarrow a_n \ln(n+1) = a_{n-1} \ln n \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} \frac{\ln n}{\ln(n+1)},$$

za svaki prirodan broj $n \geq 2$. Odavde lako zaključujemo da je

$$a_n = a_{n-1} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = a_{n-2} \frac{\ln(n-1)}{\ln n} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = a_{n-2} \frac{\ln(n-1)}{\ln(n+1)} = \cdots = a_1 \frac{\ln 2}{\ln(n+1)}.$$

Sada imamo da vrijedi

$$a_n = a_1 \frac{\ln 2}{\ln(n+1)} = a_1 \log_{(n+1)} 2.$$

Kako je $a_1 > 0$, imamo

$$a_n < \frac{a_1}{2023} \Leftrightarrow a_1 \log_{(n+1)} 2 < \frac{a_1}{2023} \Leftrightarrow \log_{(n+1)} 2 < \frac{1}{2023}$$

$$\Leftrightarrow 2 < (n+1)^{\frac{1}{2023}} \Leftrightarrow 2^{2023} < n+1 \Leftrightarrow 2^{2023} \leq n.$$

Dakle, nejednakost vrijedi za sve prirodne brojeve $n$ takve da je $n \geq 2^{2023}$.

**Šema bodovanja:**

- logaritmiranje i dobijanje jednakosti $a_n = a_{n-1} \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$ ili njoj analogne po drugoj bazi (1 bod)
- zaključak da je $a_n = a_1 \frac{\ln 2}{\ln(n+1)}$ (5 bodova)
- $a_n = a_1 \log_{(n+1)} 2$ (2 boda)
- dokaz da je $a_n < \frac{a_1}{2023} \Leftrightarrow n \geq 2^{2023}$ (2 boda)

**Zadatak 2.** Neka je $A$ tačka u ravni i neka tri prave koje prolaze kroz tu tačku dijele ravan na 6 oblasti. U svakoj od tih oblasti dato je po 5 tačaka. Poznato je da nikoje tri od svih ovih 30 tačaka u datim oblastima nisu kolinearne. Dokazati da postoji bar 1000 trouglova čiji vrhovi su tačke iz ovih oblasti takvi da tačka $A$ leži ili u unutrašnjosti ili na stranici trougla.

**Rješenje:**

Označimo oblasti sa $O_1, O_2, \dots, O_6$ ciklično. Podijelimo trouglove u dvije kategorije:

1) One čiji vrhovi leže u oblastima $(O_1, O_3, O_5)$ ili $(O_2, O_4, O_6)$ (po jedan u svakoj oblasti). Lako se vidi da svaki od ovih trouglova sadrži tačku $A$. Broj načina na koji možemo izabrati ove tačke jednak je
$$2 \cdot \binom{5}{1}^3 = 250.$$
2) One čije su dvije tačke u suprotnim oblastima, tj. u oblastima $(O_i, O_j)$ takvim da je $|i-j| = 3$ (primijetimo da ovi trouglovi nisu brojani u prethodnom slučaju). Neka su tačke $B$ i $C$ u suprotnim oblastima, npr. $O_1$ i $O_4$. Ako je tačka $A$ sa one strane prave $BC$ sa koje su i oblasti $A_2$ i $A_3$, tada bilo koji trougao $BCD$ takav da $D \in A_2 \cup A_3$ sigurno sadrži tačku $A$. Slično, ako je tačka $A$ sa one strane prave $BC$ sa koje su i oblasti $A_4$ i $A_5$, tada bilo koji trougao $BCD$ takav da $D \in A_4 \cup A_5$ sadrži tačku $A$. Postoji najmanje 10 načina da izaberemo ove tačke iz dvije oblasti koje zadovoljavaju uslov. Ukupan broj načina iznosi
$$3 \cdot 10 \cdot \binom{5}{1}^2 = 750.$$

Dakle, postoji najmanje 1000 trouglova koji zadovoljavaju uslove zadatka.

**Šema bodovanja:**

- dobijanje broja načina u slučaju 1) (3 boda)
- dobijanje broja načina u slučaju 2) (7 bodova)

**Zadatak 3.** Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Dokazati da vrijedi identitet:

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor + \lfloor\sqrt[4]{n}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt[n]{n}\rfloor = \lfloor\log_2 n\rfloor + \lfloor\log_3 n\rfloor + \lfloor\log_4 n\rfloor + \cdots + \lfloor\log_n n\rfloor.$$

**Napomena:** Sa $\lfloor x\rfloor$ označavamo najveći cijeli broj koji nije veći od $x$ (npr. $\lfloor 3.14\rfloor = 3$ i $\lfloor 3\rfloor = 3$).

**Rješenje 1:**

Neka je $\lfloor\log_2 n\rfloor = m$. Tada svi sabirci na desnoj strani pripadaju skupu $\{1,2,\dots,m\}$. Te sabirke ćemo grupisati tako da su u svakoj grupi svi sabirci jednaki, a u različitim grupama različiti. Neka je $j$ proizvoljan broj iz skupa $\{1,2,\dots,m\}$. Izračunajmo koliko ima sabiraka koji su jednaki $j$. Vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$\lfloor\log_k n\rfloor = j \iff j \leq \log_k n < j+1 \iff \frac{1}{j+1} < \log_n k \leq \frac{1}{j} \iff n^{\frac{1}{j+1}} < k \leq n^{\frac{1}{j}} \iff \sqrt[j+1]{n} < k \leq \sqrt[j]{n}.$$

Iz ovoga slijedi da je broj sabiraka koji su jednaki $j$ jednak $\left\lfloor\sqrt[j]{n}\right\rfloor - \left\lfloor\sqrt[j+1]{n}\right\rfloor$. Sada je

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\log_k n = \sum_{j=1}^{m} j\cdot\left(\left\lfloor\sqrt[j]{n}\right\rfloor - \left\lfloor\sqrt[j+1]{n}\right\rfloor\right) &= \\ &= n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 2\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor - \lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor\right) + 3\left(\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor - \lfloor\sqrt[4]{n}\rfloor\right) + \cdots + m\left(\lfloor\sqrt[m+1]{n}\rfloor - \lfloor\sqrt[m+1]{n}\rfloor\right) = \\ &= n + \sum_{j=2}^{m}\left\lfloor\sqrt[j]{n}\right\rfloor - m\cdot\lfloor\sqrt[m+1]{n}\rfloor.\end{aligned}$$

Dokažimo da je $\left\lfloor\sqrt[j]{n}\right\rfloor = 1$ za sve $j \geq m+1$. Dovoljno je dokazati da je $\left\lfloor\sqrt[m+1]{n}\right\rfloor = 1$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $\sqrt[m+1]{n} \geq 2$, tj. $n \geq 2^{m+1}$, tj. $\log_2 n \geq m+1 = \lfloor\log_2 n\rfloor + 1$, što je očigledna kontradikcija (za svaki realan broj $x$ vrijedi $x < \lfloor x\rfloor + 1$).

Konačno imamo $\sum_{k=2}^{n}\log_k n = \sum_{j=2}^{m}\left\lfloor\sqrt[j]{n}\right\rfloor + n - m = \sum_{j=2}^{m}\left\lfloor\sqrt[j]{n}\right\rfloor + \sum_{j=m+1}^{n}\left\lfloor\sqrt[j]{n}\right\rfloor = \sum_{j=2}^{n}\left\lfloor\sqrt[j]{n}\right\rfloor$, što je i trebalo dokazati.

**Napomena:** Slično gornjem rješenju, mogli su se grupisati elementi na lijevoj strani u grupe sa jednakim vrijednostima, te na sličan način dobiti tražena jednakost. Naime, kako vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$\left\lfloor\sqrt[j]{n}\right\rfloor = k \iff k \leq \sqrt[j]{n} < k+1 \iff k^j \leq n < (k+1)^j \iff \log_{k+1} n < j \leq \log_k n,$$

to je broj elemenata na lijevoj strani koji su jednaki $k$ jednak $\lfloor\log_k n\rfloor - \lfloor\log_{k+1} n\rfloor$ (ovdje nam $k \in \{1,2,\dots,\lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$, te uzimamo konvenciju $\log_1 n = n$). Sada se sumiranjem slično kao u prvom rješenju dobija traženi identitet.

**Šema bodovanja:**

- izračunavanje koliko ima sabiraka koji su jednaki $j$ (4 boda), međutim ukoliko je to izračunato samo za neko specifično $j$ (npr. $j = 3$) dobijaju se 2 boda. Svaki smislen pokušaj izračunavanja koliko ima sabiraka koji su jednaki $j$ vrednuje se jednim bodom.
- dobijanje jednakosti $\sum_{k=2}^{n}\log_k n = n + \sum_{j=2}^{m}\left\lfloor\sqrt[j]{n}\right\rfloor - m\cdot\left\lfloor\sqrt[m+1]{n}\right\rfloor$ (3 boda)
- završetak dokaza (3 boda)

**Napomena:** Sumiranje sa grupisanjem elemenata na lijevoj strani se boduje analogno.

**Rješenje 2:**

Tvrdnju ćemo dokazati koristeći princip matematičke indukcije. Označimo lijevu stranu sa $L_n$, a desnu sa $R_n$. Kako je $L_2 = 1 = R_2$, tvrdnja vrijedi za $n = 2$. Neka sada tvrdnja vrijedi za $n$, tj. neka je $L_n = R_n$. Posmatrajmo razliku $L_{n+1} - L_n$. Primijetimo da za $k \in \{2,3,\dots,n\}$ vrijedi $\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor = \lfloor \sqrt[k]{n+1} \rfloor$, kad god broj $n + 1$ nije $k$-ti stepen prirodnog broja. S druge strane, kada $n + 1$ jeste $k$-ti stepen prirodnog broja, tada je očito $\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor + 1 = \lfloor \sqrt[k]{n+1} \rfloor$. Dakle, kada posmatramo sumu $L_{n+1}$ (bez posljednjeg člana), broj članova koji se povećaju za 1 u odnosu na $L_n$ jednak je broju načina da broj $n + 1$ zapišemo u obliku $a^k$, gdje su $a$ i $k$ prirodni brojevi i vrijedi $k \geq 2$ (ne moramo postavljati uslov $k \leq n$ jer je slučaj $k > n$ nemoguć zbog nejednakosti $2^{n+1} > n + 1$). Kako pri tome u sumi $L_{n+1}$ imamo dodatni član $\lfloor \sqrt[n+1]{n+1} \rfloor$ koji je jednak 1 (jer je $2^{n+1} > n + 1$), to je broj $L_{n+1} - L_n$ jednak broju načina da broj $n + 1$ zapišemo u obliku $a^k$, gdje su $a$ i $k$ prirodni brojevi (u odnosu na prijašnje načine, dodali smo još jedan način za $a = n + 1$ i $k = 1$).
Posmatrajmo sada razliku $R_{n+1} - R_n$. Primijetimo da za $a \in \{2,3,\dots,n\}$ vrijedi $\lfloor \log_a n \rfloor = \lfloor \log_a(n+1) \rfloor$, kad god broj $n + 1$ nije stepen broja $a$. S druge strane, kada broj $n + 1$ jeste stepen broja $a$, tada je očito $\lfloor \log_a n \rfloor + 1 = \lfloor \log_a(n+1) \rfloor$. Dakle, u sumi $R_{n+1}$ (bez posljednjeg člana) je broj članova koji se povećaju za 1 u odnosu na $R_n$ jednak broju načina da broj $n + 1$ zapišemo u obliku $a^k$, gdje su $a$ i $k$ prirodni brojevi i vrijedi $a \leq n$. Kako u sumi $R_{n+1}$ imamo dodatni član $\lfloor \log_{n+1}(n+1) \rfloor = 1$, to je broj $R_{n+1} - R_n$ jednak broju načina da broj $n + 1$ zapišemo u obliku $a^k$, gdje su $a$ i $k$ prirodni brojevi (u odnosu na ranije načine dodali smo samo još način za $a = n + 1, k = 1$).
Dakle, vrijedi $L_{n+1} - L_n = R_{n+1} - R_n$, pa kako je po induktivnoj pretpostavci $L_n = R_n$, to je $L_{n+1} = R_{n+1}$. Ovim je dokaz završen.

**Napomena:** Postoji i neinduktivna varijanta gornjeg rješenja. Naime, označimo sa $X_n$ broj uređenih parova $(a, k)$ prirodnih brojeva većih od 1 takvih da je $a^k \leq n$. Kako je $a^k \leq n$ ekvivalentno sa $a \leq \sqrt[k]{n}$, to je za fiksno $k \in \{2,3,\dots,n\}$ broj ovakvih parova $(a, k)$ jednak $\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor - 1$ (oduzimamo 1 jer ne računamo rješenje $a = 1$). Zbog toga je $X_n = \sum_{k=2}^{n}(\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor - 1) = L_n - (n - 1).$ (1) S druge strane, kako je $a^k \leq n$ ekvivalentno sa $k \leq \log_a n$, to je za fiksno $a \in \{2,3,\dots,n\}$ broj ovakvih parova $(a, k)$ jednak $\lfloor \log_a n \rfloor - 1$ (oduzimamo 1 jer ne računamo rješenje $k = 1$). Zbog toga je $X_n = \sum_{a=2}^{n}(\lfloor \log_a n \rfloor - 1) = R_n - (n - 1).$ (2)
Iz (1) i (2) očigledno slijedi $L_n = R_n$, što je i trebalo dokazati.

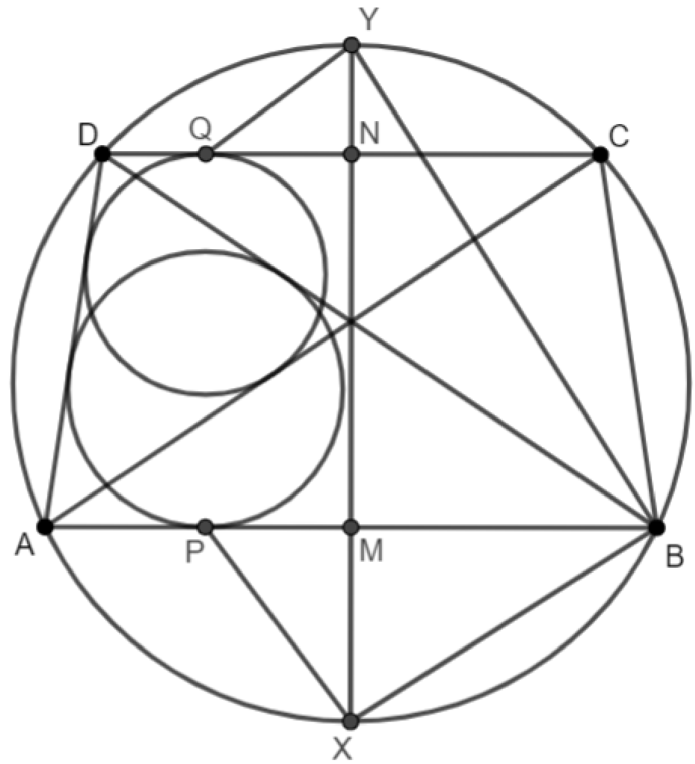
**Šema bodovanja:**

- posmatranje razlika $L_{n+1} - L_n$ i $R_{n+1} - R_n$ i rješavanje zadatka matematičkom indukcijom (1 bod)
- jednakosti $\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor = \lfloor \sqrt[k]{n+1} \rfloor$ i $\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor + 1 = \lfloor \sqrt[k]{n+1} \rfloor$, u zavisnosti da li je $n + 1$ $k$-ti stepen (1 bod)
- zaključak da je $L_{n+1} - L_n$ jednak broju parova $(a, k)$ takvih da je $a^k = n + 1$ (3 boda)
- jednakosti $\lfloor \log_a n \rfloor = \lfloor \log_a(n+1) \rfloor$ i $\lfloor \log_a n \rfloor + 1 = \lfloor \log_a(n+1) \rfloor$ u zavisnosti da li je $n + 1$ stepen broja $k$ (1 bod)
- zaključak da je $R_{n+1} - R_n$ jednak broju parova $(a, k)$ takvih da je $a^k = n + 1$ (3 boda)
- završetak dokaza (1 bod)

**Napomena:** Za neinduktivno rješenje šema je slična. Prvi bod se dobija na posmatranje broja parova $(a, k)$ takvih da je $a^k \leq n$. Po 4 boda nosi dobijanje relacija $X_n = L_n - (n - 1)$ i $X_n = R_n - (n - 1)$, pri čemu 1 od ta 4 boda nosi zaključak koliko parova ima za fiksno $k$ (ili fiksno $a$). Završetak dokaza nosi 1 bod.

**Zadatak 4.** Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) je upisan u kružnicu $k$. Kružnice upisane u trouglove $ABD$ i $ACD$ dodiruju osnovice trapeza $AB$ i $CD$ u tačkama $P$ i $Q$, respektivno. Tačke $X$ i $Y$ su sredine lukova $\widehat{AB}$ i $\widehat{CD}$ kružnice $k$ koji ne sadrže tačke $D$ i $A$, respektivno. Dokazati da se prave $XP$ i $YQ$ sijeku na kružnici $k$.

**Rješenje 1:**




Neka su $M$ i $N$ sredine osnovica trapeza $ABCD$. Kako je trapez $ABCD$ tetivni, to je on jednakokraki, pa tačke $X, M, N, Y$ pripadaju simetrali stranice $AB$ (što je ujedno i simetrala stranice $CD$). Kako je $XY$ prečnik kružnice $k$, da bi se prave $XP$ i $YQ$ sijekle na kružnici $k$, dovoljno je da vrijedi $\angle QYX + \angle PXY = 90°$. Primijetimo da je za to dovoljno da pravougli trouglovi $QNY$ i $PMX$ budu slični, tj. da vrijedi $\frac{QN}{NY} = \frac{MX}{MP}$, tj. $QN \cdot MP = MX \cdot NY$.

Imamo $MP = AM - AP = \frac{AB}{2} - \frac{AB+AD-BD}{2} = \frac{BD-AD}{2} = \frac{AC-AD}{2} = \frac{CD}{2} - \frac{CD+AD-AC}{2} = NQ$. Kako je $BM$ visina pravouglog trougla $MBY$, to je $BX^2 = XM \cdot XY$, tj. $XM = \frac{BX^2}{XY}$. Analogno je i $YN = \frac{CY^2}{XY}$, pa je $XM \cdot YN = \frac{BX^2 \cdot CY^2}{XY^2}$. Dakle, dovoljno je dokazati $\frac{BD-AD}{2} = \frac{BX \cdot CY}{XY}$.

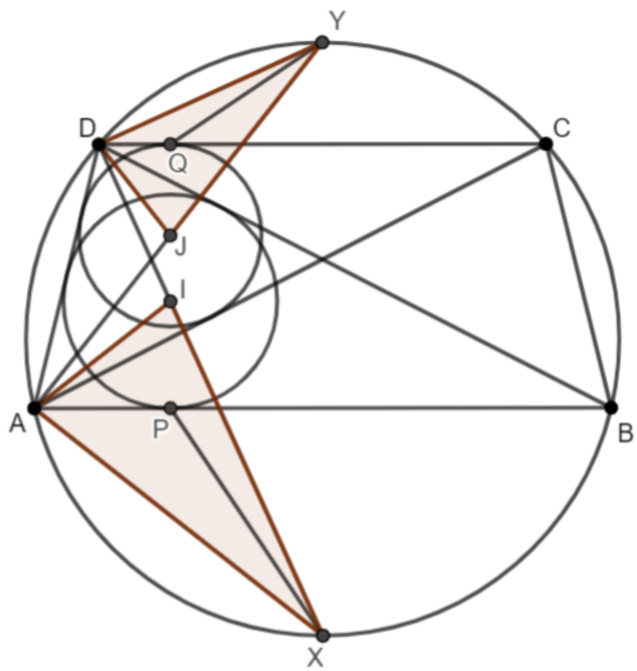
Neka je $XY = 2R$ prečnik kružnice $k$. Tada je iz sinusne teoreme $BD = 2R \cdot \sin\angle BAD$, $AD = 2R \cdot \sin\angle ABD$, $BX = 2R \cdot \sin\angle BDX = 2R \cdot \sin\frac{\angle BDA}{2}$, $CY = 2R \cdot \sin\frac{\angle CAD}{2}$. Nakon uvrštavanja, potrebno je dokazati $\frac{\sin\angle BAD - \sin\angle ABD}{2} = \sin\frac{\angle BDA}{2} \cdot \sin\frac{\angle CAD}{2}$ $(*)$. Kako je $\frac{\sin x - \sin y}{2} = \sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2}$, to je $\frac{\sin\angle BAD - \sin\angle ABD}{2} = \sin\frac{\angle BAD - \angle ABD}{2} \cdot \cos\frac{\angle BAD + \angle ABD}{2}$. (1) Kako je $\angle ABD = \angle BAC$, to je $\angle BAD - \angle ABD = \angle BAD - \angle BAC = \angle DAC$, pa je $\sin\frac{\angle BAD - \angle ABD}{2} = \sin\frac{\angle CAD}{2}$. (2) S druge strane, kako je $\angle BAD + \angle ABD + \angle BDA = 180°$, to je $\frac{\angle BAD + \angle ABD + \angle BDA}{2} = 90°$, pa je $\cos\frac{\angle BAD + \angle ABD}{2} = \sin\frac{\angle BDA}{2}$. (3) Iz (1), (2) i (3) slijedi $(*)$.

**Šema bodovanja:**

- zaključak da je dovoljno dokazati $\frac{QN}{NY} = \frac{MX}{MP}$ (3 boda), i to:
    - zaključak da je dovoljno da vrijedi $\angle QYX + \angle PXY = 90°$ (1 bod)
    - zaključak da je dovoljno dokazati sličnost trouglova $YQN$ i $PMX$ (1 bod)
    - zapisivanje odnosa kojeg je potrebno dokazati (1 bod)
- dokaz da je $PM \cdot QN = \left(\frac{BD-AD}{2}\right)^2$ (1 bod)
- dokaz da je $XM \cdot YN = \frac{BX^2 \cdot CY^2}{XY^2}$ (2 boda)
- svođenje zadatka na dokazivanje jednakosti $(*)$ (2 boda)
- završetak dokaza (2 boda)

**Rješenje 2:**

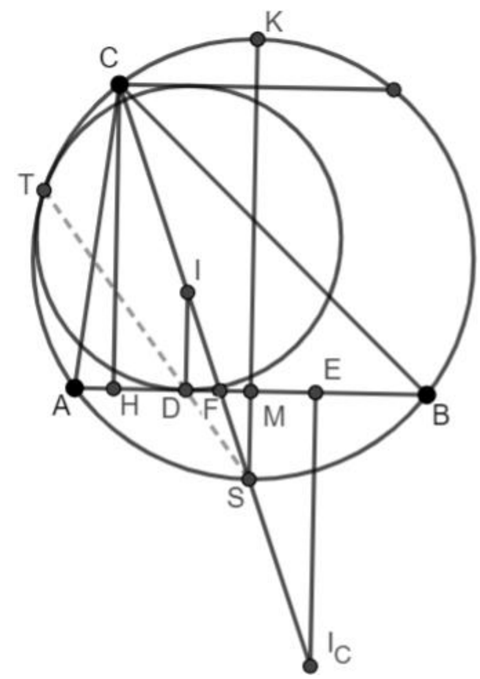
Neka su $I$ i $J$ redom centri kružnica upisanih u trouglove $ABD$ i $ACD$. Kao u prvom rješenju zaključujemo da je trapez jednakokraki i da je $XY$ prečnik kružnice $k$. Kako su i $AJ$ i $AY$ simetrale ugla $\angle DAC$, to su tačke $A, J, Y$ kolinearne. Analogno su tačke $D, I, X$ kolinearne. Poznato je (i lako se dokazuje) da je $XA = XI$ i $YJ = YD$, pa kako je $\angle DYJ = \angle DYA = \angle DXA = \angle IXA$, to su trouglovi $AXI$ i $DJY$ slični. Dalje, kako su prave $AB$ i $CD$ paralelne, to je $\angle BAD + \angle CDA = 180°$, tj. $\frac{\angle BAD + \angle CDA}{2} = 90°$, odakle je $\angle QDJ = \frac{\angle CDA}{2} = 90° - \frac{\angle BAD}{2} = 90° - \angle BAI = \angle AIP$, te analogno i $\angle IAP = \angle DJQ$, što znači da su tačke $P$ i $Q$ odgovarajuće tačke u ovim sličnim trouglovima. Primijetimo također da su pomenuti trouglovi isto orijentisani te da imaju okomite stranice (na primjer, $DX$ je unutrašnja, a $DY$ vanjska simetrala ugla $\angle ADB$, pa su okomite). Kako su $P$ i $Q$ odgovarajuće tačke u ovim trouglovima, to je $XP$ okomito na $YQ$, odakle slijedi da njihov presjek pripada kružnici sa prečnikom $XY$, tj. kružnici $k$, što je i trebalo dokazati.




**Šema bodovanja:**

- zaključak da su trouglovi $AXI$ i $DJY$ slični (1 bod)
- zaključak da ovi trouglovi imaju okomite stranice (2 boda), pri čemu se ovi bodovi dobijaju samo ukoliko je ta tvrdnja navedena u kontekstu sličnosti trouglova (na primjer, zaključci $DY$ okomito na $DX$ i $AX$ okomito na $AY$ sami za sebe ne nose bodove)
- zaključak da su tačke $P$ i $Q$ odgovarajuće u ovim trouglovima (4 boda)
- završetak dokaza (3 boda)

**Rješenje 3:**




Dokažimo najprije sljedeću lemu, iz koje će lako slijediti tvrdnja zadatka:

**Lema:** Neka upisana kružnica trougla $ABC$ dodiruje stranicu $AB$ u $D$, te neka je $S$ sredina luka $AB$ opisane kružnice $\omega$ trougla $ABC$ na kojem nije tačka $C$. Kružnica $\psi$ dodiruje pravu $AB$ u $D$ i kružnicu $\omega$ u $T$, tako da $T$ pripada luku $\widehat{ACB}$. Tada su tačke $T, D, S$ kolinearne, te prava kroz $C$ paralelna sa $AB$ dodiruje kružnicu $\psi$.

**Dokaz:** Primijetimo da homotetija u $T$ koja slika kružnicu $\psi$ u $\omega$, slika pravu $AB$ u njoj paralelnu tangentu. Međutim, ta paralelna tangenta dodiruje $\omega$ u $S$, pa se tom homotetijom $D$ slika u $S$. Dakle, tačke $T, D, S$ su kolinearne. Za drugi dio leme dovoljno je dokazati da je prečnik kružnice $\psi$ jednak $h$, gdje je $h$ dužina visine iz $C$ trougla $ABC$. Koeficijent pomenute homotetije je $\frac{TS}{TD}$, pa je dovoljno dokazati da vrijedi $\frac{TS}{TD} = \frac{2R}{h}$ $(*)$, gdje je $R$ poluprečnik kružnice $\omega$. Kako je $\angle ATS = \angle ACS = \angle BCS = \angle BAS$, to je $SA$ tangenta na opisanu kružnicu trougla $ADT$, pa je $SA^2 = SD \cdot ST$. S druge strane, iz potencije tačke $D$ na kružnicu $\omega$ vrijedi $AD \cdot BD = SD \cdot DT$. Dijeljem posljednje dvije relacije dobijamo $\frac{ST}{TD} = \frac{SA^2}{AD \cdot BD}$. $(1)$ Neka je $I$ centar upisane kružnice trougla $ABC$, $r$ poluprečnik te kružnice, $I_C$ centar pripisane kružnice trougla $ABC$, $r_C$ poluprečnik te kružnice, a $E$ tačka u kojoj ta kružnica dodiruje $AB$. Jednostavno se dobija da su trouglovi $ADI$ i $AEI_C$ slični, odakle je $r \cdot r_C = ID \cdot I_C E = AD \cdot AE = AD \cdot BD$. $(2)$ S druge strane, ako je $M$ sredina stranice $AB$, a $K$ tačka dijametralno suprotna $S$ na $\omega$, tada se lako dobija $SB^2 = SM \cdot SK = SM \cdot 2R$ $(3)$ Uvrštavajući $(2)$ i $(3)$ u $(1)$, a zatim to u $(*)$, dobijamo da je dovoljno dokazati $\frac{r_C}{h} = \frac{MS}{I_C E}$, što je ekvivalentno sa $\frac{CI}{IF} = \frac{SI_C}{FS} = \frac{SA}{FS}$, gdje je $F$ presjek $CS$ i $AB$. Međutim, kako je iz teoreme o simetrali ugla $\frac{CI}{IF} = \frac{BC}{BF}$, a iz sličnosti trouglova $AFS$ i $BFC$ vrijedi $\frac{SA}{FS} = \frac{BC}{BF}$, čime je dokaz leme završen.

Vratimo se sada rješavanju zadatka. Ako prave $XP$ i $YQ$ sijeku $k$ u tačkama $T_1$ i $T_2$, primijetimo da kružnice $\psi$ iz leme za trouglove $ABD$ i $ACD$ dodiruju $k$ u $T_1$ i $T_2$, redom, te da obje te kružnice dodiruju $AB$ i $CD$. Međutim, postoji samo jedna kružnica koja dodiruje prave $AB$ i $CD$ te kružnicu $k$ iznutra na luku $AD$, pa se tačke $T_1$ i $T_2$ poklapaju, što pokazuje da se prave $XP$ i $YQ$ sijeku na $k$, što je i trebalo dokazati.

**Šema bodovanja:**

- zaključak da kružnica koja dodiruje $AB$ u $P$ i kružnicu $k$ prolazi kroz presjek prave $XP$ sa kružnicom $k$ (1 bod)
- zaključak da je dovoljno dokazati da ta kružnica dodiruje pravu $CD$ (2 boda)
- zaključak da je dovoljno da poluprečnik te kružnice bude $h$ (1 bod)
- svođenje dokaza leme na nešto što ne zavisi od tačke $T$, npr. na jednakost $\frac{SA^2}{AD \cdot BD} = \frac{2R}{h}$ (3 boda)
- završetak dokaza (3 boda)

**Zadatak 5.** Odrediti sve prirodne brojeve $n$ takve da je broj $(2n+1)^{2n}-1$ djeljiv sa $n!$.

**Rješenje:**

Sa $v_2(x)$ ćemo označavati najveći stepen broja 2 koji dijeli prirodan broj $x$, tj. takav cijeli broj $s$ da vrijedi $2^s|x$ i $2^{s+1}\nmid x$. Dokažimo najprije sljedeću lemu:

**Lema:** Neka je $a$ neparan prirodan broj, a $k$ paran prirodan broj. Tada je

$$v_2(a^k-1)=v_2(a-1)+v_2(a+1)+v_2(k)-1.$$

**Dokaz:** Neka je $k=2^s m$, pri čemu je $m$ neparan broj i $s\geq 1$. Primijetimo najprije da je

$$a^k-1=a^{2^s m}-1=(a^m-1)(a^m+1)(a^{2m}+1)\cdots\left(a^{2^{s-1}m}+1\right).\ (*)$$

Ako je $b$ neparan cijeli broj, onda je $b^2+1$ paran broj ali nije djeljiv sa $4$. Odavde slijedi da je

$$v_2\left(a^{2^i\cdot m}+1\right)=1 \text{ za sve } i=1,2,\dots,s-1.\ (1)$$

Dalje, kako je $m$ neparan broj, onda je $1+a+a^2+\cdots+a^{m-1}$ također neparan broj. Kako je

$$v_2(a^m-1)=v_2\big((a-1)(1+a+a^2+\cdots+a^{m-1})\big)=v_2(a-1).\ (2)$$

Slično je

$$v_2(a^m+1)=v_2(a+1).\ (3)$$

Iz $(*)$, $(1)$, $(2)$ i $(3)$ slijedi tvrdnja leme (jer je $v_2(k)=s$).

Koristeći lemu za $a=2n+1$ i $k=2n$, dobijamo $v_2((2n+1)^{2n}-1)=2v_2(n)+v_2(n+1)+2$.

Ako je $n\geq 9$ neparan broj, tada je $v_2(n!)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{8}\right\rfloor+\cdots\geq\frac{n-1}{2}+\frac{n-3}{4}+\frac{n-7}{8}=\frac{7}{8}n-\frac{17}{8}=\frac{7}{8}(n+1)-3$, a kako je $v_2((2n+1)^{2n}-1)=v_2(n+1)+2$, pa da bi vrijedila tvrdnja zadatka mora vrijediti $\frac{7}{8}(n+1)\leq v_2(n+1)+5$. Neka je $n+1=2^t\cdot m$, gdje je $m$ neparan broj i $t\geq 1$. Tada vrijedi $\frac{7}{8}\cdot 2^t\cdot m\leq t+5$, tj. $7\cdot 2^t\cdot m\leq 8(t+5)$. Međutim, kako je $7\cdot 2^t>8(t+5)$ za $t\geq 4$ (lako se dokazuje matematičkom indukcijom), to je $t\leq 3$, odakle je $\frac{7}{8}(n+1)\leq 8$, što je nemoguće za $n\geq 9$. Direktnom provjerom dobijamo da $n=1,3,5$ jesu rješenja, dok $n=7$ nije ($3\nmid 15^{16}-1$).

Neka je sada $n$ paran broj, te neka je $n=2^t m$, pri čemu je $m$ neparan broj i $t\geq 1$. Sada je $v_2(n!)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{8}\right\rfloor+\cdots\geq 2^{t-1}+2^{t-2}+\cdots+1=2^t-1$. S druge strane, sada je $v_2((2n+1)^{2n}-1)=2t+2$, pa mora vrijediti $2^t\leq 2t+3$. Međutim, posljednja nejednakost ne vrijedi za $t\geq 4$, pa je $t\leq 3$, odakle je $v_2((2n+1)^{2n}-1)\leq 8$. Međutim, kako je već $v_2(12!)=10$, to mora vrijediti $n\leq 10$. Direktnom provjerom dobijamo da $n=2$ i $n=6$ jesu rješenja (za $n=6$ je broj $13^{12}-1$ djeljiv sa $16, 9$ i $5$, pa je djeljiv i sa $720=6!$). S druge strane, $n=4, n=8$ i $n=10$ nisu rješenja (razlozi su redom: $3\nmid 9^8-1, 7\nmid 17^{16}-1, 3\nmid 21^{20}-1$). Dakle, $n\in\{1,2,3,5,6\}$.

**Napomena:** Lema iz zadatka je LTE (Lifting The Exponent) lema za slučaj $p=2$ i paran eksponent. Nije obavezno dokazivati lemu ako je navedeno da je to LTE lema za slučaj $p=2$ i paran eksponent.

**Šema bodovanja:**

- Navođenje i dokaz leme (3 boda), ovi bodovi se mogu osvojiti ako se $v_2((2n+1)^{2n}-1)$ procijeni bilo kojom funkcijom $f(n)$ koja je asimptotski manja od $n$ (tj. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = 0$)
- procjena $v_2(n!) \geq c \cdot n$ za neku konstantu $c$ (2 boda), navođenje formule za $v_2(n!)$ je 1 bod
- dobijanje ograničenja $n \leq C$ za bilo koju konstantu $C \leq 30$ (4 boda), pri čemu učenik dobija 1 od 4 boda ukoliko samo intuitivno razumije da $n$ ne može biti veliko, ali ne zna to dokazati
- provjera malih slučajeva (1 bod), ovaj bod se dobija samo ako učenik ima ograničenje $n \leq C$

## Konačni rezultati federalnog takmičenja iz matematike učenika I razreda

| Rang | Ime i prezime | Škola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VK | Adnan Osmić | OŠ "Musa Ćazim Ćatić" Sarajevo | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 50 |
| 1 | Faruk Demirović | Richmond Park ISS Sarajevo | 9 | 10 | 8 | 8 | 1 | 36 |
| 2 | Amila Pašić | Gimnazija "Meša Selimović" Tuzla | 7 | 10 | 3 | 10 | 5 | 35 |
| 3 | Helena Dizdarević | Druga gimnazija Sarajevo | 9 | 10 | 2 | 10 | 0 | 31 |
| 4 | Danis Begović | Druga gimnazija Sarajevo | 7 | 10 | 1 | 10 | 0 | 28 |
| 5 | Nađa Hadžiabdić | Prva Bošnjačka gimnazija Sarajevo | 7 | 10 | 10 | 0 | 0 | 27 |
| 5 | Adrian Mišić | Druga gimnazija Sarajevo | 7 | 10 | 1 | 9 | 0 | 27 |
| 7 | Nedim Beganović | JU "Gimnazija" Cazin | 5 | 0 | 10 | 8 | 0 | 23 |
| 7 | Nedžma Durović | Druga gimnazija Sarajevo | 3 | 10 | 2 | 8 | 0 | 23 |
| 9 | Emir Salčinović | Treća gimnazija Sarajevo | 8 | 0 | 2 | 1 | 7 | 18 |
| 10 | Aron Arslan | Druga gimnazija Sarajevo | 9 | 0 | 1 | 0 | 4 | 14 |
| 11 | Maximilian Jelačić | KŠC "Sv. Josip" Sarajevo | 4 | 0 | 0 | 2 | 5 | 11 |
| 11 | Emina Hodžić | SMŠ "Zijah Dizdarević" Fojnica | 7 | 2 | 1 | 1 | 0 | 11 |
| 11 | Harun Mešić | Druga gimnazija Sarajevo | 3 | 0 | 2 | 0 | 6 | 11 |
| 11 | Ahmed Krdžić | Gazi Husrev-begova medresa u Sarajevu | 7 | 3 | 1 | 0 | 0 | 11 |
| 11 | Rijad Grabus | SMŠ "Žepče" | 9 | 0 | 1 | 1 | 0 | 11 |
| 16 | Hadžera Karahodža | MSŠ "Travnik" | 7 | 1 | 1 | 0 | 0 | 9 |
| 16 | Kenan Muhamedbegović | MS Elektrotehnička škola Tuzla | 6 | 0 | 0 | 0 | 3 | 9 |
| 16 | Farah Demirović | Richmond Park ISS Sarajevo | 4 | 4 | 1 | 0 | 0 | 9 |
| 19 | Tarik Ramić | JU "Gimnazija" Cazin | 6 | 0 | 2 | 0 | 0 | 8 |
| 20 | Adin Avdušinović | Gimnazija "Rizah Odžečkić" Zavidovići | 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 7 |
| 20 | Adi Sudžuka | Gimnazija "Visoko" | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| 20 | Adnan Hajdić | Gimnazija "Dr. Mustafa Kamarić" Gračanica | 2 | 0 | 0 | 0 | 5 | 7 |
| 23 | Selma Osmanović | MS Elektrotehnička škola Tuzla | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| 23 | Safa Vrević | MSŠ "Travnik" | 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| 23 | Talha Veladžić | Medresa "Reis Džemaludin ef. Čaušević" u Cazinu | 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 6 |
| 23 | Vedad Čišija | Gimnazija "Visoko" | 4 | 0 | 2 | 0 | 0 | 6 |
| 23 | Harisa Nazdraić | Druga gimnazija Mostar | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| 28 | Lamija Hadžić | Druga gimnazija Sarajevo | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| 28 | Faruk Džinić | MSŠ "Musa Ćazim Ćatić" Olovo | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| 28 | Ajna Merdanović | Gimnazija "Rizah Odžečkić" Zavidovići | 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 31 | Amina Hodžić | MSŠ Živinice | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 31 | Iman Škrebo | Richmond Park ISS Tuzla | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 31 | Mustafa Parić | Srednja tehnička škola Zavidovići | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 34 | Harun Ćuturović | Richmond Park College Bihać | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 34 | Valentin Kiselev | Gimnazija Mostar | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 34 | Naima Čatrnja | Srednja elektrotehnička škola "Salih-Salko Ćurić" Mostar | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 37 | Emina Kulukčija | Srednja građevinska škola Mostar | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 38 | Emela Hajrić | STŠ "Hasib Hadžović" Goražde | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 38 | Amer Talo | MSŠ Tešanj | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Učenik devetog razreda Adnan Osmić se takmičio van konkurencije u kategoriji prvih razreda, ali sa mogućnošću prolaska na viši nivo takmičenja. On se plasirao i na Matematičku olimpijadu BiH i na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olipmijadu, dok su se učenici Faruk Demirović, Amila Pašić i Helena Dizdarević plasirali na Matematičku olimpijadu BiH.**

## Konačni rezultati federalnog takmičenja iz matematike učenika II razreda

| Rang | Ime i prezime | Škola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Benjamin Mujkić | Druga gimnazija Sarajevo | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 49 |
| 2 | Abdullah Fehratbegović | Druga gimnazija Sarajevo | 10 | 10 | 10 | 8 | 1 | 39 |
| 3 | Ines Jozić | Druga gimnazija Sarajevo | 9 | 10 | 0 | 8 | 1 | 28 |
| 4 | Sara Smajić | Richmond Park ISS Sarajevo | 9 | 10 | 8 | 0 | 0 | 27 |
| 5 | Isa Švrakić | Druga gimnazija Sarajevo | 5 | 3 | 2 | 4 | 1 | 15 |
| 6 | Filip Krištić | KŠC "Sv. Josip" Sarajevo | 9 | 0 | 3 | 1 | 1 | 14 |
| 7 | Afan Isaković | Treća gimnazija Sarajevo | 2 | 0 | 0 | 7 | 0 | 9 |
| 8 | Amela Smolo | Gimnazija "Visoko" | 1 | 0 | 2 | 0 | 4 | 7 |
| 8 | Kerim Fetić | Prva gimnazija u Zenici | 4 | 1 | 0 | 1 | 1 | 7 |
| 8 | Senada Zaketović | Gimnazija "Dr. Mustafa Kamarić" Gračanica | 4 | 3 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| 11 | Alma Harbaš | Gimnazija "Bihać" | 3 | 0 | 0 | 3 | 0 | 6 |
| 11 | Ajdina Herceglija | Gimnazija "Visoko" | 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 6 |
| 11 | Muhamed Numanović | Richmond Park ISS Tuzla | 3 | 0 | 0 | 1 | 2 | 6 |
| 14 | Faris Dinarević | Richmond Park ISS Tuzla | 1 | 0 | 0 | 4 | 0 | 5 |
| 15 | Eldar Hamzić | Srednja medicinska škola Tuzla | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 16 | Merjem Mešan | Srednja tehnička škola Bugojno | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 16 | Arif Begić | Druga gimnazija Sarajevo | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 |
| 16 | Harun Demirović | Mješovita elektrotehnička i drvnoprerađivačka srednja škola Bihać | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| 16 | Luka Đulabić | KŠC "Sv. Franjo" Tuzla | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 |
| 16 | Kerim Fazlić | Gimnazija "Ismet Mujezinović" Tuzla | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 |
| 21 | Amina Devedžija | Druga gimnazija Sarajevo | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 21 | Mediha Fajić | Druga gimnazija Mostar | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 21 | Lejla Baturić | Behram-begova medresa u Tuzli | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 |
| 21 | Nadija Džolota | Srednja elektrotehnička škola "Salih-Salko Ćurić" Mostar | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 21 | Nejla Mameledžija | MSŠ "Travnik" | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 21 | Lamija Jakubović | Behram-begova medresa u Tuzli | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| 21 | Faruk Ramić | JU "Gimnazija" Cazin | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 28 | Nadja Smajkić | Srednja elektrotehnička škola "Salih-Salko Ćurić" Mostar | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 28 | Lamija Sabitović | Srednja škola Jablanica | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 28 | Sumeja Hasanspahić | Gimnazija "Muhsin Rizvić" Breza | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 28 | Emina Bjelić | Gimnazija "Rizah Odžečkić" Zavidovići | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 28 | Ilhana Kvakić | Gimnazija "Visoko" | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 33 | Armina Filan | MSŠ "Gornji Vakuf" | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 33 | Faris Omanović | MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 33 | Adem Kunovac | STŠ "Hasib Hadžović" Goražde | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Učenici Benjamin Mujkić i Abdullah Fehratbegović su se plasirali i na Matematičku olimpijadu BiH i na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olipmijadu, dok su se učenice Ines Jozić i Sara Smajić plasirali na Matematičku olimpijadu BiH.**

## Konačni rezultati federalnog takmičenja iz matematike učenika III razreda

| Rang | Ime i prezime | Škola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Ilma Čeljo | Druga gimnazija Sarajevo | 10 | 10 | 9 | 10 | 0 | 39 |
| 2 | Harun Alibegović | Richmond Park ISS Sarajevo | 4 | 8 | 10 | 10 | 0 | 32 |
| 2 | Rastko Stanković | Druga gimnazija Sarajevo | 10 | 5 | 10 | 7 | 0 | 32 |
| 4 | Emina Hasanbegović | Druga gimnazija Sarajevo | 10 | 10 | 0 | 10 | 1 | 31 |
| 5 | Asja Ćatić | Druga gimnazija Sarajevo | 10 | 5 | 8 | 2 | 0 | 25 |
| 6 | Ahmed Spahić | Druga gimnazija Sarajevo | 9 | 8 | 5 | 0 | 0 | 22 |
| 7 | Husein Jašić | Behram-begova medresa u Tuzli | 10 | 0 | 0 | 10 | 0 | 20 |
| 8 | Naida Gavranović | Druga gimnazija Sarajevo | 7 | 1 | 0 | 2 | 4 | 14 |
| 9 | Ammar Turbić | Gimnazija "Dr. Mustafa Novalić" Gradačac | 10 | 2 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| 10 | Emir Halilović | Elektrotehnička škola Tuzla | 10 | 0 | 1 | 0 | 0 | 11 |
| 11 | Tarik Agić | Prva bošnjačka gimnazija Sarajevo | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 11 | Kerim Mujkanović | Gimnazija "Musa Ćazim Ćatić" Tešanj | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 11 | Fatima Huskanović | Behram-begova medresa u Tuzli | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 11 | Hana Juklo | Druga gimnazija Mostar | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 11 | Elmas Hamidović | Srednja tehnička škola Zavidovići | 8 | 0 | 0 | 2 | 0 | 10 |
| 11 | Emina Džajić | Srednja škola Konjic | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 11 | Hanis Đonko | Druga gimnazija Mostar | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 18 | Davud Ćuprija | Druga gimnazija Sarajevo | 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 9 |
| 19 | Tarik Gutlić | MSŠ "Bosanski Petrovac" | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| 19 | Vedad Karić | MS Elektrotehnička škola Tuzla | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| 21 | Sarah Mrakić | MSŠ "Travnik" | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 7 |
| 22 | Ajla Sudžuka | Gimnazija "Visoko" | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| 23 | Hamza Bubalo | Srednja škola Konjic | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| 24 | Nadža Ganić | MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 24 | Osman Puščul | Gimnazija "Visoko" | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 26 | Edis Gutlić | MSŠ "Bosanski Petrovac" | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Mirza Bašić | Srednja tehnička škola Bugojno | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Ejla Zelić Voloder | MSŠ "Travnik" | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Sara Sefić | Gimnazija "Velika Kladuša" | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Amir Džafić | MSŠ "Enver Pozderović" Goražde | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Dino Imširović | Richmond Park ISS Tuzla | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Sani Bašić | MSŠ "Enver Pozderović" Goražde | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Tarik Faković | MS Elektrotehnička Škola Tuzla | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Sadin Halilović | MS Elektrotehnička škola Tuzla | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Naida Habibović | Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Nermina Ćurović | MSŠ "Enver Pozderović" Goražde | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Učenici Ilma Čeljo, Harun Alibegović, Rastko Stanković, Emina Hasanbegović, Asja Ćatić i Ahmed Spahić su se plasirali i na Matematičku olimpijadu BiH i na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olipmijadu, dok su se učenici Husein Jašić i Naida Gavranović plasirali na Matematičku olimpijadu BiH.**

## Konačni rezultati federalnog takmičenja iz matematike učenika IV razreda

| Rang | Ime i prezime | Škola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Ervin Macić | Druga gimnazija Sarajevo | 10 | 10 | 5 | 10 | 9 | 44 |
| 2 | Emira Ibrahimović | Druga gimnazija Sarajevo | 10 | 10 | 10 | 2 | 0 | 32 |
| 3 | Admir Zatega | Druga gimnazija Sarajevo | 10 | 10 | 10 | 0 | 0 | 30 |
| 4 | Mirnes Fehrić | Druga gimnazija Sarajevo | 10 | 10 | 5 | 3 | 0 | 28 |
| 5 | Armin Kadić | Druga gimnazija Sarajevo | 10 | 10 | 0 | 1 | 0 | 21 |
| 6 | Dženan Midžić | JU Gimnazija "Bihać" | 10 | 3 | 0 | 1 | 0 | 14 |
| 7 | Ilhan Erović | Druga gimnazija Sarajevo | 10 | 3 | 0 | 0 | 0 | 13 |
| 7 | Emin Begić | MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko | 10 | 3 | 0 | 0 | 0 | 13 |
| 9 | Adian Krivić | Druga gimnazija Sarajevo | 8 | 4 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| 10 | Tajra Čavčić | Druga gimnazija Sarajevo | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 11 |
| 10 | Enis Adilović | MSŠ "Hazim Šabanović" Visoko | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 11 |
| 12 | Dominik Ivančević | Srednja škola Prozor | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 12 | Ismar Hamzić | Gimnazija "Dr. Mustafa Novalić" Gradačac | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 12 | Esmir Zoletić | Gimnazija Živinice | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 12 | Aldin Velić | Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 16 | Rubina Rekić | JU "Gimnazija" Cazin | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 16 | Elmir Kevilj | Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 18 | Maida Biber | Srednja škola Konjic | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 18 | Emina Sarajlić | Gimnazija "Dr. Mustafa Kamarić" Gračanica | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 18 | Merjem Nuhić | Richmond Park College Bihać | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 18 | Aid Ajkunić | Srednja tehnička škola Bugojno | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 18 | Ilma Karahodža | MSŠ "Travnik" | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 18 | Eldin Osmanović | Medicinska škola Tuzla | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 18 | Hana Zaimović | Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 18 | Haris Sadiković | Srednja tehnička škola Bugojno | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 26 | Vedran Selimović | Richmond Park ISS Tuzla | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Damir Borčak | MSŠ "Enver Pozderović" Goražde | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Lamija Dženetić | Srednja škola Konjic | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Lejla Nuhić | Druga gimnazija Mostar | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Muhamed Sinanović | Gimnazija "Dr. Mustafa Novalić" Gradačac | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | Tarik Mujkanović | Gimnazija "Dr. Mustafa Novalić" Gradačac | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Učenici Ervin Macić, Admir Zatega i Mirnes Fehrić su se plasirali i na Matematičku olimpijadu BiH i na Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olipmijadu, dok su se učenici Emira Ibrahimović, Armin Kadić i Dženan Midžić plasirali na Matematičku olimpijadu BiH.**

**Napomena: Učenica Emira Ibrahimović nije bila u mogućnosti prisustvovati Izbornom takmičenju za Balkansku matematičku olimpijadu.**