



## Informacije o grupama za kampove za nadarene matematičare

### Osnovne napomene

Učenici će na osnovu uzrasta, ranijeg predznanja, te uspjeha na takmičenjima, biti raspoređeni u pet grupa: *Početna, Srednja, Napredna, Predolimpijska i Olimpijska.*

Dosadašnja iskustva su pokazala da učenici često, u neznanju, ne odaberu odgovarajuću grupu, tj. odaberu grupu u kojoj jako teško prate predavanja, a na testovima ne ostvaruju dobre rezultate. Na taj način predavanja i testovi ne pomognu učeniku u punoj mjeri. Zbog toga je naš savjet, ukoliko učenik nije dobro savladao gradivo iz neke grupe, bolje je da ide opet u tu grupu nego da prelazi u narednu.

### Početna grupa

Oblasti koje se planiraju preraditi tokom godine:

- Algebra
  - Ljetni kamp: računanje suma koje se transformacijama svode na zbir prvih  $n$  prirodnih brojeva;
  - Zimski kamp: faktorisanje i manipulacija sa algebarskim izrazima, transformacije naizgled teških suma sa razlomcima u oblik koji se jednostavno izračuna, sume prvih  $n$  kvadrata i kubova prirodnih brojeva, dokazivanje nejednakosti metodom potpunih kvadrata;
- Geometrija
  - Ljetni kamp: odnos uglova i stranica trougla, vanjski ugao trougla, podudarnost trouglova, srednja linija trougla, trouglovi sa karakterističnim uglovima, odnos centralnog i perifernog ugla, ugao između tangente i tetive (TT ugao);
  - Zimski kamp: ugao nad prečnikom, sličnost trouglova, primjena Pitagorine i Talesove teoreme, uvod u tetivne četverouglove;
- Kombinatorika
  - Ljetni kamp: dokazivanje, shvatanje indirektnog dokaza, problemi minimuma i maksimuma, problemi popločavanja, kombinatorne igre i pobjednička strategija, osnovni principi prebrojavanja (permutacije, varijacije i kombinacije);
  - Zimski kamp: pravljenje optimalnih konstrukcija, problemi minimuma i maksimuma, primjena Dirihleovog principa, zadaci na šahovskoj ploči;
- Teorija brojeva
  - Ljetni kamp: djeljivost cijelih brojeva, rješavanje Diofantovih jednačina, pravilno razmatranje slučajeva, ispravno izvođenje zaključaka;
  - Zimski kamp: neke osobine prostih brojeva, korištenje faktorizacije u rješavanju jednačina, razbijanje zadataka na slučajeve u zavisnosti od ostatka dijeljenja pri nekom broju, rješavanje jednačina pomoću djeljivosti i ograničavanja;



Potrebno predznanje: Učenicima iz ove grupe za ljetni kamp je potrebno samo osnovno predznanje, kao što su kriteriji djeljivosti prirodnih brojeva sa 2,3,4,5,8,9, zbir uglova u trouglu, vanjski ugao trougla, pravilno postavljanje jednačina iz teksta zadatka (tekstualni zadaci), te rješavanje jednostavnih jednačina. Mišljenja smo da gradivo u ovoj grupi mogu pratiti učenici devetog razreda kojima dobro ide matematika, učenici osmog razreda koji su ostvarili zapažene rezultate na takmičenjima u sedmom razredu, te eventualno neki izrazito talentovani učenici sedmog razreda (koji bi onda trebali određeno gradivo učiti unaprijed).

**Važna napomena:** Da bi učenik mogao pratiti na zimskom kampu (u januaru), potrebno je da pored gradiva sa redovne nastave osmog razreda iz prvog polugodišta (pojam realnog broja, korijeni, Talesova i Pitagorina teorema) savlada i stepenovanje, osnovne algebarske identitete (kvadrat zbira i razlike, razlika kvadrata, zbir i razlika kubova) kao i faktorisanje algebarskih izraza (npr. učenik treba da zna izraz  $a^2 + ab + ac + bc$  svesti na  $(a + b)(a + c)$ ). Mišljenja smo da većina nastavnika ovo gradivo radi na sekciji u osmom razredu još u prvom polugodištu, tako da za učenike ne bi trebao biti prevelik problem da ga savladaju do zimskog kampa.

Prema dosadašnjem iskustvu, učenici osmog (devetog) razreda koji osvoje značajan broj bodova (preko 50%) na testovima u ovoj grupi bi trebali biti u mogućnosti ostvariti odlične (dobre) rezultate na federalnom/republičkom takmičenju, te zapažen rezultat na Juniorskoj matematičkoj olimpijadi BiH. Ako neki učenik sedmog razreda osvoji značajan broj bodova u ovoj grupi, za očekivati je da ostvaruje vrhunske rezultate na takmičenjima u svojoj kategoriji.

## Srednja grupa

Oblasti koje se planiraju preraditi tokom godine:

- Algebra
  - Ljetni kamp: nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, dokazivanje nejednakosti koristeći nejednakosti između brojevnih sredina, osnovne osobine polinoma i faktorizacija;
  - Zimski kamp: primjena nejednakosti između brojevnih sredina na različite vrste zadataka, CSB nejednakost, neki trikovi prilikom dokazivanja nejednakosti;
- Geometrija
  - Ljetni kamp: osnovne geometrijske konstrukcije, tetivni i tangenti četverouglovi, standardne ideje pri doctavanju tačaka, računске geometrije;
  - Zimski kamp: zadaci sa nestandardnim idejama pri doctavanju tačaka, primjena sličnosti trouglova, Ojlerova i pripisana kružnica, Ojlerova prava;
- Kombinatorika
  - Ljetni kamp: invarijante i monovarijante, osnovni problemi optimizacija, zadaci sa skupovima, turnirski problemi;
  - Zimski kamp: osnove kombinatorne geometrije, binomni koeficijent i binomna formula, princip ekstrema;
- Teorija brojeva
  - Ljetni kamp: kongruencije, rješavanje jednačina svođenjem na kontradikciju po modulu, ekspancijalne jednačine sa cijelim brojevima;
  - Zimski kamp: razne metode ograničavanja, osnovne osobine raspodjele prostih brojeva, ukļeštenje između dva potpuna stepena, neke osobine relativno prostih brojeva, najveći



zajednički djelilac i primjena, funkcija broja djelilaca prirodnog broja, djelioци prirodnih brojeva;

Potrebno predznanje: Učenici ove grupe treba da dobro vladaju gradivom iz prethodne grupe.

Prema dosadašnjem iskustvu, učenici osnovnih škola koji osvoje značajan broj bodova (preko 50%) na testovima u ovoj grupi bi, pored odličnih rezultata na federalnom/republičkom takmičenju trebali ostvariti i dobar rezultat na Juniorskoj matematičkoj olimpijadi BiH, te konkurisati bar za bronzanu medalju na JBMO (Junior Balkan Mathematical Olympiad). Učenici prvog (drugog) razreda srednje škole koji osvoje značajan broj bodova na testovima u ovoj grupi bi trebali biti u mogućnosti ostvariti dobre (solidne) rezultate na federalnom/republičkom takmičenju.

### **Napredna grupa**

Oblasti koje se planiraju preraditi tokom godine:

- **Algebra**
  - Ljetni kamp: kvadratni trinom, kvadratna jednačina, Vijetova pravila, parametarske jednačine i nejednačine, primjena matematičke indukcije, nestandardna algebra, sistemi jednačina, primjena algebarskih identiteta;
  - Zimski kamp: Vijetova pravila za polinome višeg stepena, osnovne osobine polinoma, polinomi sa cjelobrojnim koeficijentima, kompleksni brojevi, nestandardne nejednakosti;
- **Geometrija**
  - Ljetni kamp: neke pomoćne leme iz geometrije, potencija tačke, osobine koje u potpunosti određuju tačke;
  - Zimski kamp: geometrijsko mjesto tačaka, Čevina i Menelajeva teorema, neke osobine upisane i pripisane kružnice;
- **Kombinatorika**
  - Ljetni kamp: metod bojenja, optimizacije, problemi sa minimumom i maksimumom;
  - Zimski kamp: teorija grafova, teorija igara, pobjednička i gubitnička pozicija, složenija kombinatorna prebrojavanja, primjena matematičke indukcije u kombinatorici;
- **Teorija brojeva**
  - Ljetni kamp: Mala Fermaova i Vilsonova teorema (dokazi i primjene), pojam inverza i potpunog sistema ostataka, polje  $\mathbb{Z}_p$ ;
  - Zimski kamp: metod beskonačnog spusta, Pitagorine trojke, Euklidov algoritam, neke osobine eksponencijalnih kongruencija;

Potrebno predznanje: Učenici ove grupe treba da dobro vladaju gradivom iz prethodnih grupa.

Prema dosadašnjem iskustvu, učenici osnovnih škola koji osvoje značajan broj bodova (preko 50%) na testovima u ovoj grupi bi, pored odličnih rezultata na federalnom/republičkom takmičenju i Juniorskoj matematičkoj olimpijadi BiH, trebali biti u mogućnosti osvojiti srebrnu ili zlatnu medalju na JBMO (Junior Balkan Mathematical Olympiad). Učenici prvog (drugog) razreda srednje škole koji osvoje značajan broj bodova na testovima u ovoj grupi bi trebali biti u mogućnosti ostvariti odlične rezultate na federalnom/republičkom takmičenju te dobar rezultat na Matematičkoj olimpijadi BiH. Učenici starijih razreda koji osvoje značajan broj



bodova bi trebali ostvariti dobar rezultat na federalnom/republičkom takmičenju i Matematičkoj olimpijadi BiH.

### **Predolimpijska grupa**

Oblasti koje se planiraju preraditi tokom godine:

- Algebra
  - Ljetni kamp: neprekidnost i nule polinoma, polinomi u polju  $\mathbb{Z}_p$ , nestandardni zadaci iz algebre, pojam homogenosti i naprednije nejednakosti, nizovi brojeva, rješavanje rekurentnih relacija;
  - Zimski kamp: polinomske jednačine, funkcionalne jednačine;
- Geometrija
  - Ljetni kamp: homotetija, teži konstruktivni zadaci, radikalne osi;
  - Zimski kamp: primjena trigonometrije u geometriji, neke naprednije leme u geometriji, drugačije definisanje tačaka;
- Kombinatorika
  - Ljetni kamp: prebrojavanje postavljanjem rekurentnih jednačina, kombinatorna geometrija;
  - Zimski kamp: dvostruko prebrojavanje, prebrojavanje konstruisanjem bijekcije;
- Teorija brojeva
  - Ljetni kamp: red elementa po modulu, Ojlerova teorema, Kineski teorem o ostacima, osnove kvadratnih ostataka, potencije prostog broja;
  - Zimski kamp: kombinatorna teorija brojeva, funkcionalne jednačine sa elementima teorije brojeva, primitivni korijeni, LTE lema, Ležandrov simbol;

Potrebno predznanje: Učenici ove grupe treba da dobro vladaju gradivom iz prethodnih grupa, te za zimski kamp treba da znaju osnovne trigonometrijske identitete, kao i sinusnu i kosinusnu teoremu.

Prema dosadašnjem iskustvu, učenici koji osvoje značajan broj bodova (preko 50%) na testovima u ovoj grupi bi trebali biti u mogućnosti ostvariti odlične rezultate na federalnom/republičkom takmičenju, te biti konkurentni za ulazak u tim BiH na IMO (International Mathematical Olympiad) i BMO (Balkan Mathematical Olympiad).

### **Olimpijska grupa**

U ovoj grupi nema fiksnog plana, već se prerađuju sljedeće oblasti:

- Algebra
  - osnove analize, osnove linearne algebre, napredne tehnike u dokazivanju nejednakosti, funkcionalne jednačine, polinomi, nestandardna algebra, komplikovane algebarske transformacije, nizovi;
- Geometrija:
  - inverzija i polare, Paskalova teorema, projektivna geometrija, spiralna simetrija, računске metode u geometriji (trigonometrija, analitička geometrija), granični slučajevi u geometriji;



- Teorija brojeva
  - kvadratni ostaci, eksponencijalne kongruencije, LTE lema, Pelova jednačina, Vieta jumping, polinomi sa cjelobrojnim koeficijentima, razne osobine binomnih koeficijenata, razni načini konstrukcije rješenja;
- Kombinatorika
  - teorija grafova, algoritamske tehnike, različita predstavljanja raznih struktura, npr. permutacija ili particija, vjerovatnoća, primjena linearne algebre u kombinatorici, komplikovaniji načini bojenja, dvostruko prebrojavanje, funkcije generatriše;

Smatra se da su učenici iz ove grupe dovoljno matematički zreli da mogu sami učiti iz raznih knjiga ili materijala na internetu.

Potrebno predznanje: Učenici ove grupe treba da dobro vladaju gradivom iz prethodnih grupa.

Prema dosadašnjem iskustvu, učenici koji osvoje značajan broj bodova (preko 50%) na testovima u ovoj grupi bi, pored odličnih rezultata na federalnom/republičkom takmičenju i Matematičkoj olimpijadi BiH, trebali biti u mogućnosti osvojiti barem bronzanu medalju na IMO (International Mathematical Olympiad) i BMO (Balkan Mathematical Olympiad).