

19. ЈУНИОРСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БИХ

Бања Лука / Сарајево, 12.6.2021. године

Рјешења задатака

1. Одредити све реалне бројеве a, b, c, d за које вриједи

$$ab + c + d = 3,$$

$$bc + d + a = 5,$$

$$cd + a + b = 2,$$

$$da + b + c = 6.$$

Рјешење 1:

Ако саберемо прву једначину система са другом, а затим трећу са четвртом, добијамо да вриједи $b(a + c) + a + c + 2d = 8$ и $d(a + c) + a + c + 2b = 8$ (*). Одузимањем ове двије релације добијамо $(b - d)(a + c - 2) = 0$. Одавде закључујемо да је $b = d$ или да је $a + c = 2$.

Није могуће да вриједи $b = d$, јер би тада имали $5 = bc + d + a = dc + b + a = 2$, што је очигледна контрадикција. Дакле, мора вриједити $a + c = 2$.

Уврштавањем $a + c = 2$ у неку од релација из (*), добијамо да је $b + d = 3$.

Сабирањем друге и треће једначине добијамо да је $c(b + d) + b + d + 2a = 7$, односно да је $3c + 2a = 4$. Због $2a + 2c = 2(a + c) = 2 \cdot 2 = 4$, добијамо $c = 0$, па је $a = 2$. Сада лако из друге једначине система добијамо $d = 3$, одакле је $b = 0$.

Дакле, једино рјешење система је $a = 2, b = 0, c = 0, d = 3$.

Рјешење 2:

Одузимањем друге једначине система од прве, те треће једначине од четврте добијамо да вриједи $(b - 1)(c - a) = 2$ и $(1 - d)(c - a) = 4$. Одавде закључујемо да је $a \neq c, b \neq 1$ и $d \neq 1$, те добијамо да је $\frac{2}{b-1} = c - a = \frac{4}{1-d}$, што се након сређивања своди на $2b + d = 3$ (**).

Аналогно, одузимањем треће једначине од друге, те прве једначине од четврте, након сређивања добијамо да је $a + c = 2$.

Сабирањем прве двије једначине система $2b + 2d = 6$, па је због (**) $d = 3$ и $b = 0$.

Сада лако из прве једначине система добијамо $c = 0$, па је $a = 2$.

Дакле, једино рјешење система је $a = 2, b = 0, c = 0, d = 3$.

2. Нека су p, q, r прости, а t и n природни бројеви такви да вриједи $p^2 + qt = (p + t)^n$ и $p^2 + qr = t^4$.

а) Доказати да је $n < 3$.

б) Одредити све бројеве p, q, r, t, n који задовољавају дате услове.

Рјешење:

- а) Из друге једначине је $qr = t^4 - p^2 = (t^2 - p)(t^2 + p)$. Како су бројеви q и r прости и вриједи $t^2 - p < t^2 + p$, то имамо следеће случајеве:

1° $t^2 - p = 1$ и $t^2 + p = qr$.

Из $p = t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1)$, слиједи да је $t - 1 = 1$ и $t + 1 = p$ (јер је p прост). Дакле, $t = 2$ и $p = 3$. Међутим, тада је $qr = t^2 + p = 7$, што је немогуће.

2° $t^2 - p = q$ и $t^2 + p = r$

Ако би вриједило $n \geq 3$, тада је $p^3 + 3p^2t + 3pt^2 + t^3 = (p + t)^3 \leq (p + t)^n = p^2 + qt = p^2 + t(t^2 - p) < p^2 + t^3 < p^3 + t^3$, што је очигледно немогуће.

3° $t^2 - p = r$ и $t^2 + p = q$

Ако би вриједило $n \geq 3$, тада је $p^3 + 3p^2t + 3pt^2 + t^3 = (p + t)^3 \leq (p + t)^n = p^2 + qt = p^2 + t(t^2 + p) = p^2 + t^3 + tp < p^3 + t^3 + pt^2$, што је очигледно немогуће.

Видимо да ни у једном случају није могуће да вриједи $n \geq 3$, па је $n < 3$, што је и требало доказати.

- б) За $n = 1$ имамо $p^2 + qt = p + t$, што је немогуће јер је лијева страна очигледно већа од десне. Дакле, $n = 2$, тј. $p^2 + qt = (p + t)^2 = p^2 + 2pt + t^2$, одакле имамо $q = 2p + t$. У првом случају смо добили контрадикцију и без претпоставке $n \geq 3$, тако да ћемо провјерити преостала два случаја.

У другом случају је $t^2 - p = q = 2p + t$, па је $t(t - 1) = 3p$. Лијева страна је производ два узастопна броја па је парна, што значи да мора бити $p = 2$, одакле је $t = 3$. Сада је $q = 2p + t = 7$ и $r = t^2 + p = 11$.

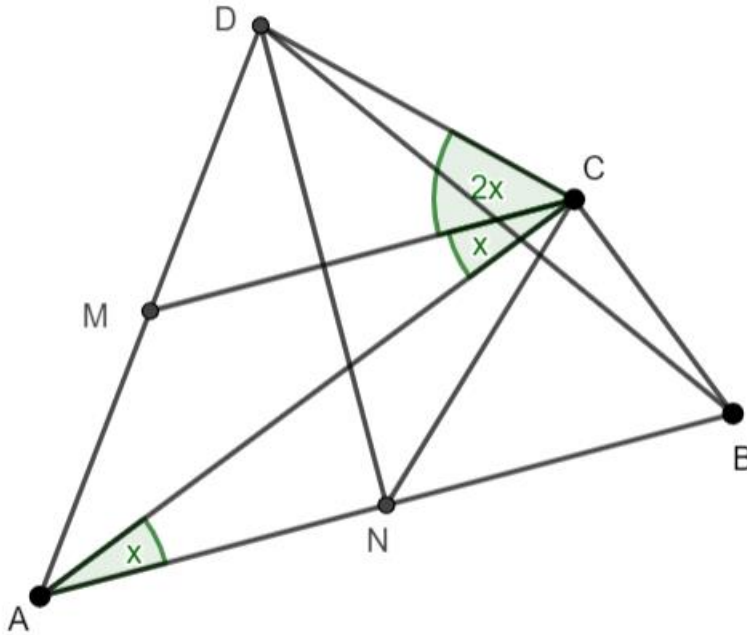
У трећем случају је $t^2 + p = q = 2p + t$, па је $t(t - 1) = p$. Лијева страна је производ два узастопна броја па је парна, што значи да мора бити $p = 2$, одакле је $t = 2$. Сада је $q = 2p + t = 6$, што није прост број, па овај случај отпада.

Дакле, једино рјешење је $p = 2, q = 7, r = 11, t = 3, n = 2$.

3. У конвексном четвороуглу $ABCD$ вриједи $AD = BD$ и $\angle ACD = 3 \cdot \angle BAC$. Нека је тачка M средина странице AD . Ако су праве CM и AB паралелне, доказати да је $\angle ACB = 90^\circ$.

Рјешење:

Означимо $\angle BAC = x$. Тада је $\angle ACD = 3x$. Како је због углова на трансферзали (јер је $CM \parallel AB$) $\angle MCA = \angle BAC = x$, то је $\angle MCD = \angle ACD - \angle ACM = 2x$ (*).



Нека је N средина странице AB . Због $AD = BD$ је DN окомито на AB , па је DN окомито и на CM (јер је $CM \parallel AB$). С друге стране, M је центар описане кружнице правоуглог троугла $\triangle AND$, па је $MN = MD$, што значи да је права CM уствари симетрала дужи DN . Због тога је троугао $\triangle DCN$ једнакокраки и вриједи $\angle MCN = \angle MCD = 2x$, па је $\angle ACN = x$. Међутим, како је $\angle BAC = x$, то је троугао $\triangle ANC$ једнакокраки. Дакле, вриједи $CN = AN = NB$, па је N центар описане кружнице троугла $\triangle ABC$, одакле слиједи да је тај троугао правоугли са правим углом у врху C (периферијски угао над пречником). Дакле, $\angle ACB = 90^\circ$, што је и требало доказати.

4. Нека је n природан број и нека је $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Табела формата $3 \times n$ се зове *лијена* ако је у њу могуће уписати бројеве из скупа S тако да су задовољени следећи услови:
- у сваком реду је сваки број из скупа S уписан тачно једном;
 - у свакој колони збир производа по два броја је дјелљив са n (тј. ако су у колони уписани бројеви a, b, c , тада је број $ab + bc + ca$ дјелљив са n).

За које природне бројеве n постоји лијена табела, а за које не постоји? Одговор образложити.

Рјешење:

Докажимо најприје да за парне бројеве n не постоји *лијена* табела. Претпоставимо супротно, да за паран број n постоји *лијена* табела. Нека су a, b, c бројеви у некој колони. Како вриједи $n | ab + bc + ca$, то је број $ab + bc + ca$ паран. Примијетимо да ако су сва три броја a, b, c непарни, тада је и број $ab + bc + ca$ непаран, што је контрадикција. Такође, ако су два броја непарна (нпр. a и b), а трећи паран, лако добијамо да је број $ab + bc + ca = ab + c(a + b)$ непаран, што је немогуће. Дакле, у свакој колони може бити максимално један непаран број, па укупно у табели има највише n непарних бројева. Међутим, у сваком реду је једнак број парних и непарних бројева (по $\frac{n}{2}$), па укупно у табели имамо $3 \cdot \frac{n}{2}$ непарних бројева, а како је $3 \cdot \frac{n}{2} > n$, добили смо контрадикцију. Дакле, за парне бројеве не постоји *лијена* табела.

Докажимо сада да за непарне бројеве $n = 2k + 1$ постоји *лијена* табела. У први ред упишимо редом бројеве $2k, 2k - 1, \dots, 2, 1, 2k + 1$, а у други и трећи ред ћемо уписати исте бројеве, и то редом $2, 4, 6, \dots, 2k - 2, 2k, 1, 3, 5, \dots, 2k - 1, 2k + 1$. Примијетимо да је број у првом реду и i -тој колони конгруентан $-i$ по модулу n , а број у другом (или трећем) реду и i -тој колони конгруентан $2 \cdot i$ по модулу n . Због тога је одговарајући збир производа у i -тој колони конгруентан $(-i) \cdot (2i) + (-i) \cdot (2i) + (2i) \cdot (2i) = -2i^2 - 2i^2 + 4i^2 = 0$ по модулу n . Како ово вриједи за сваку колону, то је ова табела *лијена*, па за сваки непаран број постоји *лијена* табела.