61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Bihać / Mostar / Sarajevo / Tuzla, 22.05.2021. godine

IV RAZRED

Zadatak 1. Odrediti sve vrijednosti realnog parametra m tako da jednačina
$$x^4-(3m+2)x^2+m^2=0$$
ima četiri realna rješenja koja formiraju aritmetičku progresiju.

Rješenje 1

Data jednadžba je bikvadratna. Smjenom $x^2=t$ ona postaje
$$t^2-(3m+2)t+m^2=0.$$
Da bi posljednja jednadžba imala realna rješenja mora vrijediti
$$(3m+2)^2-4m^2\geq 0,\text{ tj.}(m+2)(5m+2)\geq 0.$$
Dakle, mora vrijediti $m\in(-\infty,-2]\cup\left[-\frac{2}{5},+\infty\right)$. Rješenja su data sa
$$t_{1,2}=\frac{3m+2\pm\sqrt{(3m+2)^2-4m^2}}{2}.$$
Iz uslova da polazna jednačina ima četiri realna rješenja vidimo da mora biti $3m+2>0$ što sa ranije uvedenim ograničenjem za m daje da $m\in\left[-\frac{2}{5},+\infty\right)$.
Primijetimo da za $m\in\left[-\frac{2}{5},+\infty\right)$ vrijedi da je $3m+2\geq\sqrt{(3m+2)^2-4m^2}$.

Rješenja polazne jednačine data su sa
$$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{3m+2\pm\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}.$$
Da bi data rješenja formirala aritmetičku progresiju moraju razlike susjednih članova progresije, zapisane u rastućem ili opadajućem poretku, biti jednake. Napišimo rješenja u rastućem poretku
$$-\sqrt{\frac{3m+2+\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}},-\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}},\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}},\sqrt{\frac{3m+2+\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}$$
Kako za prva tri člana mora vrijediti
$$-\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}+\sqrt{\frac{3m+2+\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}=\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}+\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}},$$
to imamo

$$\sqrt{\frac{3m+2+\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}} = 3\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}.$$

Istu jednačinu bismo dobili da smo posmatrali uslov jednakosti razlika za posljednja tri člana.

Rješavanjem posljednje jednačine dobijemo

$$3m+2+\sqrt{5m^2+12m+4} = 9\left(3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}\right).$$

tj. nakon sređivanja

$$25(5m^2+12m+4) = 16(3m+2)^2.$$

Posljednja jednačina se svodi na

$$19m^2-108m-36=0,$$

čija su rješenja $m=6$ i $m=-\frac{6}{19}$ (primijetimo da su oba rješenja veća od $-\frac{2}{5}$).

Dakle, za $m=6$ i $m=-\frac{6}{19}$ polazna jednačina ima četiri realna rješenja koja formiraju aritmetičku progresiju.

Za $m=6$ dobije se aritmetička progresija $-3\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\sqrt{2}$, a za $m=-\frac{6}{19}$ aritmetička progresija glasi $-3\sqrt{\frac{2}{19}}, -\sqrt{\frac{2}{19}}, \sqrt{\frac{2}{19}}, 3\sqrt{\frac{2}{19}}$.

Šema bodovanja

1 bod – dobijanje rješenja po t

2 boda – dobijanje uslova pod kojim su rješenja $x_{1,2,3,4}$ realna

1 bod – dobijanje eksplicitnog izraza za $x_{1,2,3,4}$

1 bod – dobijanje ispravnog poretka rješenja $x_{1,2,3,4}$ u aritmetičkoj progresiji

3 boda – dobijanje uslova $\sqrt{\frac{3m+2+\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}} = 3\sqrt{\frac{3m+2-\sqrt{5m^2+12m+4}}{2}}$

2 boda – dobijanje rješenja za m

Rješenje 2

Zadana je jednačina

$$x^4-(3m+2)x^2+m^2=0. \qquad (1)$$

Uvedimo smjenu $x^2=t$. Jednačina sada postaje

$$t^2-(3m+2)t+m^2=0. \qquad (2)$$

S obzirom da rješenja x_1, x_2, x_3, x_4 jednačine (1) moraju biti realni brojevi, rješenja t_1, t_2 jednačine (2) moraju biti nenegativni realni brojevi. Da bi ta rješenja bila realni brojevi, mora biti

$$(3m+2)^2 - 4m^2 \geq 0,$$

odakle je

$$m \in (-\infty, -2] \cup \left[-\frac{2}{5}, +\infty\right).$$

Neka su t_1, t_2 rješenja jednačine (2). Tada su rješenja jednačine (1) brojevi $\pm\sqrt{t_1}, \pm\sqrt{t_2}$. Iz uvjeta da oni čine artimetičku progresiju, jednostavno zaključujemo (bez umanjenja općenitosti jer ništa se ne mijenja ako zamijenimo mjesta t_1 i t_2) da su ta rješenja ovako poredana po veličini:

$$-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}.$$

Neka je d razlika te aritmetičke progresije. Imamo da je

$$d = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_1}, \text{ tj. } \sqrt{t_1} = \frac{d}{2}.$$

Također, s obzirom da je u aritmetičkoj progresiji svaki član niza, počevši od drugog, aritmetička sredina njemu dva susjedna člana niza, zaključujemo da je

$$\frac{-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_1}}{2} = -\sqrt{t_1}, \text{ tj. } \sqrt{t_2} = \frac{3d}{2}.$$

Do istih uvjeta dolazimo posmatranjem posljednja tri člana niza.

Sada, iz Vieteovih formula primijenjenih na jednačinu (2) dobivamo

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3m + 2 \\ t_1 \cdot t_2 = m^2 \end{cases}$$

Zbog $t_1, t_2 \geq 0$ zaključujemo da mora biti $3m + 2 \geq 0$, tj.

$$m \geq -\frac{2}{3}.$$

Dakle, mora vrijediti

$m \in \left[-\frac{2}{5}, +\infty\right).$ (3)

Sada na osnovu gore navedenih jednakosti iz Vieteovih formula i rješenja jednačine (2) izraženih preko razlike d niza, dobivamo

$$\left(\sqrt{t_1 \cdot t_2}\right)^2 = m^2 \Leftrightarrow \left(\frac{d}{2} \cdot \frac{3d}{2}\right)^2 = m^2 \Leftrightarrow 9d^4 = 16m^2 \Leftrightarrow d^2 = \frac{4|m|}{3},$$

$$t_1+t_2=3m+2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}\right)^2-2\sqrt{t_1\cdot t_2}=3m+2 \Leftrightarrow \left(\frac{d}{2}+\frac{3d}{3}\right)^2-2\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{3d}{2}=3m+2$$

$$\Leftrightarrow d^2=\frac{6m+4}{5}.$$

Izjednačavanjem desnih strana gornjih dviju jednakosti, dobivamo

$$\frac{4|m|}{3}=\frac{6m+4}{5},$$

odakle je $m=-6/19$ ili $m=6$.

Obje vrijednosti zadovoljavaju uvjet (3).

Za $m=-6/19$ dobivamo rješenja:

$$-3\sqrt{\frac{2}{19}},-\sqrt{\frac{2}{19}},\sqrt{\frac{2}{19}},3\sqrt{\frac{2}{19}}.$$

Za $m=6$ dobivamo rješenja: $-3\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2},3\sqrt{2}$.

Šema bodovanja

2 boda – dobijanje uvjeta pod kojim su rješenja $x_{1,2,3,4}$ realna

3 boda – izražavanje $\sqrt{t_1}$ i $\sqrt{t_2}$ preko d (ili dobijanje $\sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1}$

3 boda – dobijanje uslova $\frac{4|m|}{3}=\frac{6m+4}{5}$

2 boda – dobijanje rješenja za m

Zadatak 2. Za dva skupa A i B definišemo skup $A+B$ sa $A+B=\{a+b|a\in A,b\in B\}$. Na primjer, ako je $A=\{1,2,3\}$ i $B=\{4,5,6\}$, onda je $A+B=\{5,6,7,8,9\}$.

a) Odrediti najveći prirodan broj m takav da postoje skupovi A i B, oba podskupovi skupa $\mathbb{N}\cup\{0\}$, takvi da i A i B imaju po m elemenata i vrijedi $A+B=\{0,1,2,\dots,2021\}$.

b) Odrediti najmanji prirodan broj n takav da postoje skupovi A i B, oba podskupovi skupa $\mathbb{N}\cup\{0\}$, takvi da i A i B imaju po n elemenata i vrijedi $A+B=\{0,1,2,\dots,2021\}$.

Rješenje

a) Neka je $A=\{a_1,a_2,\dots a_m\}$ i $B=\{b_1,b_2,\dots b_m\}$, pri čemu vrijedi $a_i<a_{i+1}$ i $b_i<b_{i+1}$ za $i=1,2,\dots,m-1$. Imamo:

$$a_1+b_1<a_1+b_2<a_2+b_2<\cdots<a_{m-1}+b_m<a_m+b_m$$

Svi ovi brojevi su elementi skupa $A+B$ i po parovima su različiti, pa vrijedi $|A+B|\geq 2m-1$, odnosno $2m-1\leq 2022 \Leftrightarrow m\leq 1011$. Ova granica se može dostići:

$$A=\{0,1,2,\dots.1010\}$$
$$B=\{0,1,2,\dots,1009,1011\}$$

pa je traženi broj $m=1011$.

b) Kako je $|A| = |B| = n$, to je $|A+B| \leq n \cdot n = n^2$ jer se svaki element skupa $A+B$ dobija kao zbir jednog elementa A i jednog elementa B. Dakle, $n^2 \geq 2022 \Leftrightarrow n \geq 45$. Ova granica se može dostići:

$$A = \{0, 1, 2, \dots, 44\}$$
$$B = \{0 \cdot 45, 1 \cdot 45, 2 \cdot 45\ \dots 43 \cdot 45, 2021 - 44\}$$

Očigledno se u skupu $A+B$ nalaze svi brojevi iz $\mathbb{N} \cup \{0\}$ manji ili jednaki $43 \cdot 45 + 44$ (mogu se dobiti kao $r + q \cdot 45$ gdje su r, q redom ostatak i količnik pri dijeljenju sa 45), kao i svi brojevi između $2021 - 44$ i 2021. Kako je $43 \cdot 45 + 44 > 2021 - 44$, to se u skupu $A+B$ nalaze svi brojevi $0, 1, 2, \dots, 2021$. Očito je 2021 najveći element ovog skupa, pa je $|A+B| = \{0, 1, \dots, 2021\}$. Dakle, traženi broj je $n = 45$.

Šema bodovanja

Dijelovi pod a) i b) nose po 5 bodova.

2 boda – pronalaženje skupova A i B koji imaju po 1011 elemenata

3 boda – dokaz da skupovi ne mogu imati više od 1011 elemenata

3 boda – pronalaženje skupova A i B koji imaju po 45 elemenata

2 boda – dokaz da skupovi ne mogu imati manje od 45 elemenata

Zadatak 3. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_{2021}, x_{2022}$ različiti prirodni brojevi iz skupa $\{1, 2, 3, \dots, 2021, 2022\}$. Odrediti najmanju i najveću moguću vrijednost izraza

$$\left|\left|\left|\dots\left|\left|\left|x_1 - x_2\right| - x_3\right| - x_4\right| - \dots\right| - x_{2021}\right| - x_{2022}\right|.$$

Rješenje

Dokažimo prvo da je minimalna vrijednost datog izraza 1. Primijetimo da neovisno od toga kako dodijelimo vrijednosti brojevima $x_1, x_2, \dots, x_{2022}$ izraz W je uvijek neparan (apsolutne vrijednosti i predznaci ne utiču na parnost, pa je W iste parnosti kao zbir $x_1 + x_2 + \dots + x_{2022} = 1 + 2 + \dots + 2022 = \frac{2022 \cdot 2023}{2} = 1011 \cdot 2023$, što je neparno). Kako je $W \geq 0$ uvijek, a neparno je, zaključujemo da je $W \geq 1$. Vrijednost $W = 1$ možemo postići sa $x_k = k+2, x_{k+1} = k+3, x_{k+2} = k+5, x_{k+3} = k+4$, za $k = 1,5,9,13, \dots, 2017$ i $x_{2021} = 2, x_{2022} = 1$. Ova konstrukcija nam odgovara jer je $\left|\left|\left|x_k - x_{k+1}\right| - x_{k+2}\right| - x_{k+4}\right| = \left|\left|\left|(k+2) -\right.\right.\right.$ $k+3-k+5-k+4=0$ za svako $k=1,5,9,13,\dots,2017$ pa dobijamo da je $W=0-x2021-x2022=0-2-1=1.$

Dokažimo sada da je maksimalna vrijednost izraza W jednaka 2021. Prvo dokažimo matematičkom indukcijom da je $W_k = \left|\left|\left|\dots\left|\left|\left|x_1 - x_2\right| - x_3\right| - x_4\right| - \dots\right| - x_{k-1}\right| - x_k\right| \leq 2022$ za $k = 3, \dots, 2022$.

i) Baza indukcije vrijedi, jer je $W_3 = \left|\left|x_1 - x_2\right| - x_3\right| \leq \max\{|x_1 - x_2|, x_3\} \leq 2022$ (jer je $0 < |x_1 - x_2| \leq 2022 - 1 = 2021$, a $0 < x_3 \leq 2022$).

ii) Pretpostavimo da za neko $2021 \geq k \geq 3$ vrijedi

$$W_k = \Big|\Big|\big|\ldots\big|\big||x_1 - x_2| - x_3\big| - x_4\big| - \cdots\big| - x_{k-1}\Big| - x_k\Big| \leq 2022.$$

iii) Dokažimo tvrdnju za $k+1$. Imamo da je

$$W_{k+1} = \Big|\Big|\big|\ldots\big|\big||x_1 - x_2| - x_3\big| - x_4\big| - \cdots\big| - x_k\Big| - x_{k+1}\Big| = |W_k - x_{k+1}| \leq \max(W_k, x_{k+1}) \leq 2022$$

(jer vrijedi $0 \leq W_k \leq 2022$ po induktivnoj pretpostavci, a svakako vrijedi i $0 < x_{k+1} \leq 2022$).

Sada za $k = 2022$ imamo da je $W = W_{2022} \leq 2022$, a kako je W neparno zaključujemo da je $W \leq 2021$. Vrijednost 2021 se može dostići sa $x_k = k+1, x_{k+1} = k+2, x_{k+2} = k+4, x_{k+3} = k+3$, za $k = 1,5,9,13,\ldots,2017$ i $x_{2021} = 1, x_{2022} = 2022$. Ova konstrukcija nam odgovara jer je $\big||x_k - x_{k+1}| -$ *xk+2−xk+4=(k+1)−k+2−k+4−k+3=0* za svako *k=1,5,9,13,…,2017* pa dobijamo da je $W = \big||0 - x_{2021}| - x_{2022}\big| = \big||0-1| - 2022\big| = 2021.$

Dakle, minimalna vrijednost datog izraza je 1, a maksimalna 2021.

Šema bodovanja

2 boda – dokaz da se može postići vrijednost $W = 1$

2 boda – dokaz da se ne može postići vrijednost $W < 1$

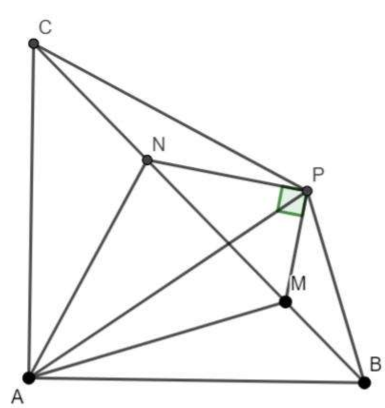
2 boda – dokaz da se može postići vrijednost $W = 2021$

4 boda – dokaz da se ne može postići vrijednost $W > 2021$

Zadatak 4. Neka je ΔABC trougao u kojem je $\overline{AB} = \overline{AC}$ i $\angle CAB = 90^\circ$. Ako su M i N tačke na hipotenuzi $\overline{BC}$ takve da je $\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, odrediti $\angle MAN$.

Rješenje 1

Kako je $(\overline{BM} + \overline{CN})^2 > \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, to se kružnica sa centrom u M i poluprečnikom $\overline{MB}$ i kružnica sa centrom u N i poluprečnikom $\overline{NC}$ sijeku u dvije tačke. Jedna od tačaka presjeka je sa jedne strane prave BC, a druga sa druge. Onu koja je sa suprotne strane prave BC u odnosu na tačku A označimo sa P. Iz uslova zadatka $\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, pa je $\angle MPN = 90^\circ$ (tačku P smo mogli definisti i na način da van trougla ΔABC, a nad $\overline{MN}$ kao hipotenuzom konstruišemo pravougli trougao sa stranicama $\overline{BM}, \overline{CN}, \overline{MN}$, a takav trougao postoji po uslovu zadatka).



Trouglovi ΔBMP i ΔCNP su jednakokraki, pa je $\angle CPN = \angle PCN = \frac{\angle PNM}{2}$ u $\angle MPB = \angle MBP = \frac{\angle PMN}{2}$, pa je $\angle CPB = \angle CPN + \angle NPM + \angle MPB = \frac{\angle PNM + \angle PMN}{2} + \angle NPM = \frac{90^\circ}{2} + 90^\circ = 135^\circ$. Kako je

$\overline{AB} = \overline{AC}$ i pri tome su A i P sa različitih strana prave BC i vrijedi $\angle BAC = 90° = 2 \cdot (180° - \angle CPB)$, to je tačka A centar opisane kružnice trougla ΔCPB. Sada lako uočavamo da su trouglovi ΔABM i ΔAPM podudarni (pravilo SSS), odakle je $\angle PAM = \angle BAM = \frac{\angle BAP}{2}$. Slično je i $\angle PAN = \frac{\angle PAC}{2}$, pa je $\angle MAN = \angle MAP + \angle PAN = \frac{\angle BAP + \angle PAC}{2} = \frac{\angle BAC}{2} = 45°$.

Šema bodovanja

2 boda – konstrukcija tačke P tako da se zaključi i da su trouglovi ΔBMP i ΔCNP jednakokraki i da je $\angle MPN = 90°$

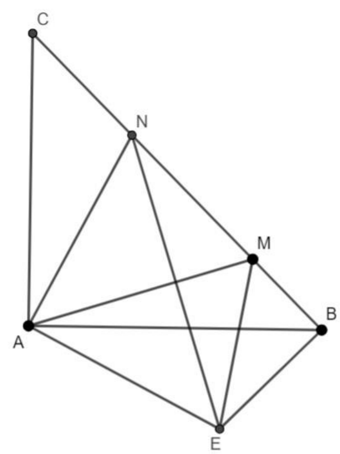
1 bod – dokaz da je $\angle BPC = 135°$

3 boda – zaključak da je A centar opisane kružnice trougla ΔBPC

1 bod – dokazivanje podudarnosti trouglova ΔABM i ΔAPM

3 boda – dokazivanje $\angle MAN = 45°$.

Rješenje 2



Neka je tačka E na pravoj koja prolazi kroz B i okomita je na BC, takva da vrijedi $\overline{BE} = \overline{CN}$ i tačke E i A su sa iste strane prave BC. Tada je $\overline{ME}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, pa je $\overline{ME} = \overline{MN}$. S druge strane, kako je $\angle ABE = 90° - \angle ABC = 45° = \angle BCA$, to su trouglovi ΔAEB i ΔANC podudarni (pravilo SUS). Zbog toga je $\overline{AE} = \overline{AN}$ i $\angle EAB = \angle CAN$. Sada primjećujemo da su trouglovi ΔAEM i ΔANM podudarni (pravilo SSS), pa je $\angle MAN = \angle MAE = \frac{\angle NAE}{2} = \frac{\angle NAB + \angle EAB}{2} = \frac{\angle 90° - \angle CAN + \angle EAB}{2} = 45°$.

Šema bodovanja

2 boda – konstrukcija tačke E tako da se zaključi da je trougao ΔNME jednakokraki

2 boda – dokaz da je $AE = AN$

1 bod – dokaz da je $\angle EAB = \angle CAN$

3 boda – dokaz da je $\angle MAN = \angle MAE$

2 boda – dokaz da je $\angle MAN = 45°$.

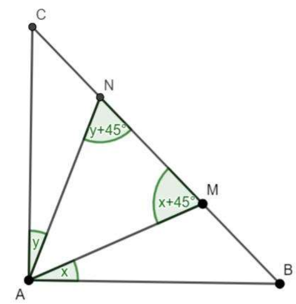
Rješenje 3

Iz uslova zadatka imamo

$$\begin{aligned} \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 &= \overline{MN}^2 = (\overline{BC} - \overline{BM} - \overline{CN})^2 \\ &= \overline{BC}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 - 2 \cdot (\overline{BC} \cdot \overline{BM} + \overline{BC} \cdot \overline{CN} - \overline{CN} \cdot \overline{BM}), \end{aligned}$$

odakle je $\overline{BC}^2 + 2 \cdot \overline{CN} \cdot \overline{BM} = 2 \cdot \overline{BC} \cdot (\overline{BM} + \overline{CN})$ $(*)$.

Neka je $\angle BAM = x$ i $\angle CAN = y$. Kao vanjske uglove dobijamo $\angle AMN = x + 45°$ i $\angle ANM = y + 45°$.



Iz sinusnih teorema lako dobijamo $\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2}, \overline{BM} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin x}{\sin(135°-x)} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin x}{\sin(x+45°)} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1+ctg\, x}, \overline{CN} = \overline{AC} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1+ctg} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1+ctg\, y}$. Ako prethodne jednakosti uvrstimo u $(*)$, uz oznake $ctg\, x = m, ctg\, y = n$ (očigledno je $m > 0$ i $n > 0$, jer su x i y oštri uglovi), nakon skraćivanja sa $2 \cdot \overline{AB}^2$ dobijamo:

$$1 + \frac{2}{(1+m)(1+n)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{1+m} + \frac{1}{1+n}\right) \Rightarrow$$

$$1 + m + n + mn + 2 = 4 + 2m + 2n \quad \Longrightarrow$$

$$mn - 1 = m + n \quad \Longrightarrow$$

$$1 = \frac{mn-1}{m+n} = \frac{ctg\, x \cdot ctg\, y - 1}{ctg\, x + ctg\, y} = ctg(x+y).$$

Kako je $0° < x + y < 90°$, to je $x + y = 45°$, odakle je $\angle MAN = 45°$.

Šema bodovanja

1 bod – dobijanje jednakosti $(*)$

3 boda – svođenje na jednakost u kojoj se pojavljuju samo $ctg\, x$ i $ctg\, y$

5 bodova – dobijanje $ctg(x+y) = 1$

1 boda – dokaz da je $\angle MAN = 45°$.

Zadatak 5. Ako su m, n, r prirodni brojevi takvi da vrijedi

$$1 + m + n\sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{2r-1},$$

dokazati da je broj m potpun kvadrat.

Rješenje 1

Najprije primijetimo da je m neparan broj. Naime, svi članovi u stepenovanju $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2r-1}$ osim posljednjeg su parni, a posljednji je $3^{r-1}\sqrt{3}$, pa ne pripada racionalnom dijelu izraza. Zato je racionalni dio izraza paran, odnosno $1 + m$ je paran, odnosno m je neparan. Dalje, iz binomne formule direktno slijedi da, ako je $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2r-1} = A + B\sqrt{3}$, tada je $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2r-1} = A - B\sqrt{3}$. Zato imamo

$$1 + m + n\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{2r-1} \Rightarrow$$
$$1 + m - n\sqrt{3} = \left(2-\sqrt{3}\right)^{2r-1}$$

Množenjem ovih jednakosti dobijamo

$$(1+m)^2-\left(n\sqrt{3}\right)^2=\left(\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^{2r-1} \Leftrightarrow$$
$$(m+1)^2-3n^2=\left(2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^{2r-1} \Leftrightarrow$$
$$(m+1)^2-3n^2=1 \Leftrightarrow$$
$$m(m+2)=3n^2$$

Kako je m neparan, to je $nzd(m,m+2)=1$, pa je $m=3x^2$ i $m+2=y^2$ ili $m=x^2$ i $n=3y^2$ za cijele brojeve x,y. Prvi slučaj otpada jer je tada $m\equiv 0\ (mod\ 3) \Rightarrow m+2\equiv 2\ (mod\ 3) \Rightarrow y^2\equiv 2\ (mod\ 3)$, što je nemoguće. Dakle, vrijedi drugi slučaj, pa je m potpun kvadrat, $q.e.d.$

Šema bodovanja

1 bod – dobijanje jednakosti $1+m-n\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{2r-1}$
4 boda – dobijanje jednakosti $m(m+2)=3n^2$
1 bod – zaključak da je m neparan, te da su m i $m+2$ relativno prosti
2 boda – zaključak da je jedan od brojeva m i $m+2$ kvadrat, a drugi trostruki kvadrat
2 boda – zaključak da je nemoguće da je $m+2$ kvadrat, a m trostruki kvadrat

Rješenje 2

Neka su $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ i $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ nizovi takvi da vrijedi $1+m_i+n_i\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{2i-1}, \forall i\in\mathbb{N}$ i neka je $t_i=1+m_i$, $i\in\mathbb{N}$. Drugim riječima, t_i i n_i su redom racionalni i iracionalni dio izraza $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2i-1}$.
Imamo

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2i+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{2i-1}=\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(t_i+n_i\sqrt{3}\right)=(7t_i+12n_i)+(4t_i+7n_i)\sqrt{3}$$

odnosno

$$t_{i+1}=7t_i+12n_i \quad n_{i+1}=4t_i+7n_i$$

Množenjem prve relacije sa 7, druge sa 12 i oduzimanjem dobijamo

$$7t_{i+1}-12n_{i+1}=t_i \Leftrightarrow$$
$$12n_{i+1}=7t_{i+1}-t_i \Leftrightarrow$$
$$12n_i=7t_i-t_{i-1}$$

Uvrštavajući ovo u prvu rekurzivnu relaciju dobijamo

$$t_{i+1}=14t_i-t_{i-1}$$

Rješavanjem ove rekurzivne relacije (početni uslovi su $t_1=2$ i $t_2=26$) dobijamo

$$t_i=\frac{1}{2}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(7-4\sqrt{3}\right)^i+\frac{1}{2}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(7+4\sqrt{3}\right)^i$$

Nakon sređivanja koristeći činjenicu $7\pm 4\sqrt{3}=\left(2\pm\sqrt{3}\right)^2$ dobijamo

$$t_i=\frac{1}{2}\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^{2i-1}+\left(2+\sqrt{3}\right)^{2i-1}\right)$$

Posmatrajmo niz $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ definisan sa $u_1=1, u_2=5$ i $u_{j+1}=4u_j-u_{j-1}$. Rješavanjem rekurzivne relacije dobijamo

$$u_j=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(-1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^j-\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^j\right)$$

Direktnim uvrštavanjem dobijamo da je $t_i = u_i^2 + 1$, odnosno $m_i = u_i^2$. Kako su po definiciji niza $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ njegovi članovi cijeli brojevi, dobijamo da je m_i potpun kvadrat za sve $i \in \mathbb{N}$, pa specijalno i za $i = r$, $q.e.d.$

(Napomena: Jednakost $t_i = u_i^2 + 1$ je moguće dokazati i koristeći matematičku indukciju)

Šema bodovanja

1 boda – uvođenje nizova m_i i n_i
2 boda – dobijanje rekurzivnih relacija ekvivalentnih sa $t_{i+1} = 7t_i + 12n_i,\ n_{i+1} = 4t_i + 7n_i$
2 boda – dobijanje vrijednosti t_i u zatvorenoj formi
2 boda – uvođenje niza u_i
3 boda – dokaz da je $u_i^2 + 1$

Napomena:

Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.