61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Bihać / Mostar / Sarajevo / Tuzla, 22.05.2021. godine

III RAZRED

Zadatak 1. Odrediti sve vrijednosti realnog parametra k za koji jednačina

$$\log(kx) = 2\log(x+1)$$

ima tačno jedno rješenje u skupu realnih brojeva**.**

Rješenje

Primijetimo da ne može biti $k = 0$ jer tada $\log(kx)$ nije definisan. Definiciono područje date jednačine je:

(1) za $k > 0, x > 0$,
(2) za $k < 0, -1 < x < 0$.

Uz uslove (1) i (2) data jednačina je ekvivalentna jednačini (jer je $2\log(x+1) = \log\left((x+1)^2\right)$)

(3) $x^2 + (2-k)x + 1 = 0$.

Pošto nas zanimaju samo realna rješenja ove jednačine, potrebno je da je njena diskriminanta veća ili jednaka 0. Diskriminanta ove jednačine je $D = (2-k)^2 - 4$. Pošto mora biti $k \neq 0$, jedino je za $k = 4$ diskriminanta $D = 0$. Tada jednačina (3) ima jedinstveno rješenje $x = 1$, koje je ujedno i jedinstveno rješenje polazne jednačine (jer je $k > 0$ i $x > 0$).

Ako je $D > 0$, tj. ako je $k < 0$ ili $k > 4$ tada iz (3) slijedi da je

$$x_{1,2} = -1 + \frac{k}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)},$$

pri čemu uzimamo da je $x_1 < x_2$.

Razmatrajmo dva slučaja:

$1°$ $k < 0$. Vidimo da x_1 ne zadovoljava uslov (2), pa ono nije rješenje polazne jednačine (jer je $-1 + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)} \leq -1$). S druge strane, uslov $-1 < -1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)} < 0$ je ekvivalentan sa uslovima $-k < \sqrt{k^2 - 4k}$ i $\sqrt{k^2 - 4k} < 2 - k$. Kako je $k < 0$, posljednje dvije nejednakosti smijemo kvadrirati, nakon čega dobijamo tačne nejednakosti $0 < -4k$ i $0 < 4$. Dakle, za $k < 0$, postoji tačno jedno rješenje polazne jednačine.

2° $k > 4$. Tada je očigledno $x_2 > 0$, a uslov $x_1 > 0$ je ekvivalentan sa $k - 2 > \sqrt{k^2 - 4k}$, što je nakon kvadriranja (zbog $k - 2 > 0$) ekvivalentno sa $4 > 0$, što je očigledno tačno. Dakle, u ovom slučaju polazna jednačina ima dva različita realna rješenja (jer oba zadovoljavaju uslov (1)).

Dakle, jednačina ima tačno jedno rješenje samo za $k = 4$ i $k < 0$ i to rješenje je:

$$x = \frac{1}{2}(k - 2 + \sqrt{k(k-4)})$$

Šema bodovanja

1 bod – postavljanje uslova (1) i (2) (ne dobijaju se bodovi ukoliko je postavljen samo jedan od uslova)
1 bod – dobijanje jednakosti (3)
2 boda – rješavanje slučaja $D = 0$
1 bod – zaključak da u slučaju $D > 0$ vrijedi $k < 0$ ili $k > 4$
3 boda – rješavanje slučaja $k < 0$
2 boda – rješavanje slučaja $k > 4$

Zadatak 2. Neka je a prirodan broj. Dokazati da su sljedeće dvije tvrdnje ekvivalentne:

i) postoji prirodan broj d takav da svaka od jednačina $x^2 - ax + d = 0$ i $x^2 - ax - d = 0$ ima bar jedno cjelobrojno rješenje;
ii) postoje prirodni brojevi b i c takvi da je $a^2 = b^2 + c^2$.

Rješenje

i) Dokažimo prvo da ako traženo d postoji onda postoje i brojevi b i c. Da bi date jednačine imale bar jedno cjelobrojno rješenje njihove diskriminante moraju biti potpuni kvadrati. Diskriminante ovih jednačina su $D_1 = a^2 - 4d$ i $D_2 = a^2 + 4d$. Neka je $D_1 = x^2$, a $D_2 = y^2$ za neke nenegativne cijele brojeve x i y. Zbog $d > 0$ vrijedi $x > y \geq 0$. Sabiranjem dobijamo da je $D_1 + D_2 = x^2 + y^2 = 2a^2$, pa je $a^2 = \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{2(x^2+y^2)}{4} = \frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{4} = (\frac{x+y}{2})^2 + (\frac{x-y}{2})^2$. Primijetimo da su brojevi x i y iste parnosti zbog $x^2 + y^2 = 2a^2$, pa su brojevi $\frac{x+y}{2}$ i $\frac{x-y}{2}$ prirodni, te možemo uzeti $b = \frac{x+y}{2}$ i $c = \frac{x-y}{2}$.

ii) Dokažimo sada drugi smjer, tj. ako postoje prirodni brojevi b i c takvi da je $a^2 = b^2 + c^2$ (1), onda postoji i traženo d. Primijetimo da je nemoguće da su oba broja b i c neparna, jer bi onda jednačina (1) bila nemoguća po modulu 4 (desna strana bi bila kongruentna 2 po modulu 4, a kvadrat a^2 ne može biti kongruentan 2 po modulu 4). Dakle, bar jedan od brojeva b i c je paran. Uzmimo da je $d = \frac{bc}{2}$ (ovo je sada prirodan broj). Sada su rješenja prve jednačine jednaka

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2bc}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{(b-c)^2}}{2} = \frac{a \pm |b - c|}{2},$$

i ona su cijeli brojevi, jer su brojevi a i $b - c$ iste parnosti iz jednačine (1).
Slično, rješenja druge jednačine jednaka su

$$y_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-2bc}}{2}=\frac{a\pm\sqrt{b^2+c^2+2bc}}{2}=\frac{a\pm\sqrt{(b+c)^2}}{2}=\frac{a\pm(b+c)}{2},$$

i ona su također cijeli brojevi, jer su brojevi a i $b+c$ iste parnosti iz jednačine (1). Sada je dokaz završen.

Šema bodovanja

Prvi smjer vrijedi 6 bodova, a drugi smjer 4 boda.

Prvi smjer:

1 bod – zaključak da se broj $2a^2$ može napisati kao x^2+y^2, gdje je $x^2=a^2+4d$ i $y^2=a^2-4d$.

3 boda – dobijanje jednakosti $a^2=(\frac{x+y}{2})^2+(\frac{x-y}{2})^2$

2 boda – zaključak da su $b=\frac{x+y}{2}$ i $c=\frac{x-y}{2}$ prirodni brojevi koji zadovoljavaju uslov zadatka

Drugi smjer:

1 bod – dokaz da je bar jedan od brojeva b i c paran

3 boda – dokaz da za $d=\frac{bc}{2}$ jednačine imaju rješenje u skupu cijelih brojeva

Zadatak 3. Neka su $x_1,x_2,\dots,x_{2021},x_{2022}$ različiti prirodni brojevi iz skupa $\{1,2,3,\dots,2021,2022\}$. Odrediti najmanju i najveću moguću vrijednost izraza

$$\left|\left|\left|\dots\left|\left|\left|x_1-x_2\right|-x_3\right|-x_4\right|-\dots\right|-x_{2021}\right|-x_{2022}\right|.$$

Rješenje

Dokažimo prvo da je minimalna vrijednost datog izraza 1. Primijetimo da neovisno od toga kako dodijelimo vrijednosti brojevima $x_1,x_2,\dots,x_{2022}$ izraz W je uvijek neparan (apsolutne vrijednosti i predznaci ne utiču na parnost, pa je W iste parnosti kao zbir $x_1+x_2+\dots+x_{2022}=1+2+\dots+2022=\frac{2022\cdot 2023}{2}=1011\cdot 2023$, što je neparno). Kako je $W\geq 0$ uvijek, a neparno je, zaključujemo da je $W\geq 1$. Vrijednost $W=1$ možemo postići sa $x_k=k+2, x_{k+1}=k+3, x_{k+2}=k+5, x_{k+3}=k+4$, za $k=1,5,9,13,\dots,2017$ i $x_{2021}=2, x_{2022}=1$. Ova konstrukcija nam odgovara jer je $\left|\left||x_k-x_{k+1}|-x_{k+2}\right|-x_{k+4}\right|=\left|\left||(k+2)-\right.\right.$ $k+3-k+5-k+4=0$ za svako $k=1,5,9,13,\dots,2017$ pa dobijamo da je $W=0-x2021-x2022=0-2-1=1$.

Dokažimo sada da je maksimalna vrijednost izraza W jednaka 2021. Prvo dokažimo matematičkom indukcijom da je $W_k=\left|\left|\left|\dots\left|\left|\left|x_1-x_2\right|-x_3\right|-x_4\right|-\dots\right|-x_{k-1}\right|-x_k\right|\leq 2022$ za $k=3,\dots,2022$.

i) Baza indukcije vrijedi, jer je $W_3=\left||x_1-x_2|-x_3\right|\leq\max\{|x_1-x_2|,x_3\}\leq 2022$ (jer je $0<|x_1-x_2|\leq 2022-1=2021$, a $0<x_3\leq 2022$).

ii) Pretpostavimo da za neko $2021\geq k\geq 3$ vrijedi

$$W_k=\left|\left|\left|\dots\left|\left|\left|x_1-x_2\right|-x_3\right|-x_4\right|-\dots\right|-x_{k-1}\right|-x_k\right|\leq 2022.$$

iii) Dokažimo tvrdnju za $k+1$. Imamo da je

$$W_{k+1} = \left|\left|\left|\ldots\left|\left||x_1 - x_2| - x_3\right| - x_4\right| - \cdots\right| - x_k\right| - x_{k+1}\right| = |W_k - x_{k+1}| \leq \max(W_k, x_{k+1}) \leq 2022$$

(jer vrijedi $0 \leq W_k \leq 2022$ po induktivnoj pretpostavci, a svakako vrijedi i $0 < x_{k+1} \leq 2022$).

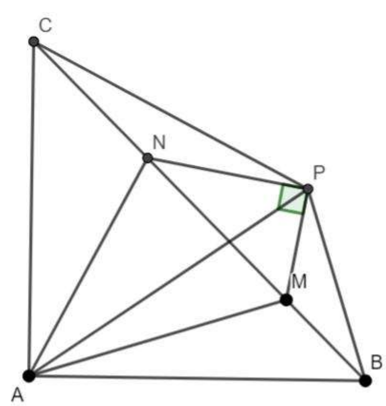
Sada za $k = 2022$ imamo da je $W = W_{2022} \leq 2022$, a kako je W neparno zaključujemo da je $W \leq 2021$. Vrijednost 2021 se može dostići sa $x_k = k+1, x_{k+1} = k+2, x_{k+2} = k+4, x_{k+3} = k+3$, za $k = 1,5,9,13,\ldots,2017$ i $x_{2021} = 1, x_{2022} = 2022$. Ova konstrukcija nam odgovara jer je $\left|\left||x_k - x_{k+1}\right| -\right.$ *xk+2−xk+4=(k+1)−k+2−k+4−k+3=0* za svako *k=1,5,9,13,...,2017* pa dobijamo da je $W = \left||0 - x_{2021}| - x_{2022}\right| = \left||0-1| - 2022\right| = 2021$.

Dakle, minimalna vrijednost datog izraza je 1, a maksimalna 2021.

Šema bodovanja
2 boda – dokaz da se može postići vrijednost $W = 1$
2 boda – dokaz da se ne može postići vrijednost $W < 1$
2 boda – dokaz da se može postići vrijednost $W = 2021$
4 boda – dokaz da se ne može postići vrijednost $W > 2021$

Zadatak 4. Neka je ΔABC trougao u kojem je $\overline{AB} = \overline{AC}$ i $\angle CAB = 90^\circ$. Ako su M i N tačke na hipotenuzi $\overline{BC}$ takve da je $\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, odrediti $\angle MAN$.

Rješenje 1
Kako je $(\overline{BM} + \overline{CN})^2 > \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, to se kružnica sa centrom u M i poluprečnikom $\overline{MB}$ i kružnica sa centrom u N i poluprečnikom $\overline{NC}$ sijeku u dvije tačke. Jedna od tačaka presjeka je sa jedne strane prave BC, a druga sa druge. Onu koja je sa suprotne strane prave BC u odnosu na tačku A označimo sa P. Iz uslova zadatka $\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, pa je $\angle MPN = 90^\circ$ (tačku P smo mogli definisti i na način da van trougla ΔABC, a nad $\overline{MN}$ kao hipotenuzom konstruišemo pravougli trougao sa stranicama $\overline{BM}, \overline{CN}, \overline{MN}$, a takav trougao postoji po uslovu zadatka).



Trouglovi ΔBMP i ΔCNP su jednakokraki, pa je $\angle CPN = \angle PCN = \frac{\angle PNM}{2}$ u $\angle MPB = \angle MBP = \frac{\angle PMN}{2}$, pa je $\angle CPB = \angle CPN + \angle NPM + \angle MPB = \frac{\angle PNM + \angle PMN}{2} + \angle NPM = \frac{90^\circ}{2} + 90^\circ = 135^\circ$. Kako je $\overline{AB} = \overline{AC}$ i pri tome su A i P sa različitih strana prave BC i vrijedi $\angle BAC = 90^\circ = 2 \cdot (180^\circ - \angle CPB)$, to je tačka A centar opisane kružnice trougla ΔCPB. Sada lako uočavamo da su trouglovi ΔABM i ΔAPM podudarni (pravilo SSS), odakle je $\angle PAM = \angle BAM = \frac{\angle BAP}{2}$. Slično je i $\angle PAN = \frac{\angle PAC}{2}$, pa je $\angle MAN = \angle MAP + \angle PAN = \frac{\angle BAP + \angle PAC}{2} = \frac{\angle BAC}{2} = 45^\circ$.

Šema bodovanja

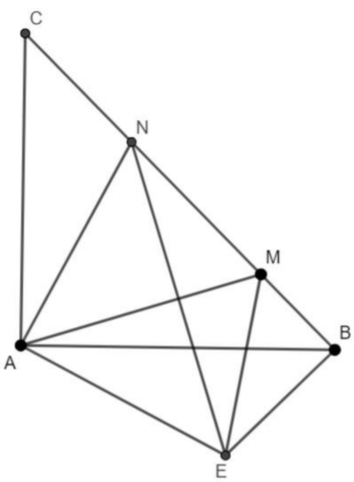
2 boda – konstrukcija tačke P tako da se zaključi i da su trouglovi ΔBMP i ΔCNP jednakokraki i da je $\angle MPN = 90°$

1 bod – dokaz da je $\angle BPC = 135°$

3 boda – zaključak da je A centar opisane kružnice trougla ΔBPC

1 bod – dokazivanje podudarnosti trouglova ΔABM i ΔAPM

3 boda – dokazivanje $\angle MAN = 45°$.



Rješenje 2

Neka je tačka E na pravoj koja prolazi kroz B i okomita je na BC, takva da vrijedi $\overline{BE} = \overline{CN}$ i tačke E i A su sa iste strane prave BC. Tada je $\overline{ME}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MN}^2$, pa je $\overline{ME} = \overline{MN}$. S druge strane, kako je $\angle ABE = 90° - \angle ABC = 45° = \angle BCA$, to su trouglovi ΔAEB i ΔANC podudarni (pravilo SUS). Zbog toga je $\overline{AE} = \overline{AN}$ i $\angle EAB = \angle CAN$. Sada primjećujemo da su trouglovi ΔAEM i ΔANM podudarni (pravilo SSS), pa je $\angle MAN = \angle MAE = \frac{\angle NAE}{2} = \frac{\angle NAB + \angle EAB}{2} = \frac{\angle 90° - \angle CAN + \angle EAB}{2} = 45°$.

Šema bodovanja

2 boda – konstrukcija tačke E tako da se zaključi da je trougao ΔNME jednakokraki

2 boda – dokaz da je $AE = AN$

1 bod – dokaz da je $\angle EAB = \angle CAN$

3 boda – dokaz da je $\angle MAN = \angle MAE$

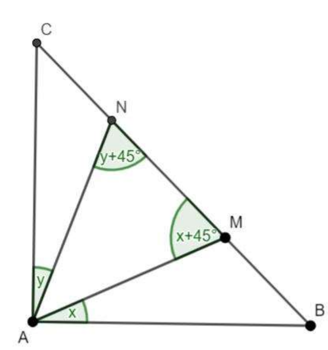
2 boda – dokaz da je $\angle MAN = 45°$.

Rješenje 3

Iz uslova zadatka imamo

$$\begin{aligned}\overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 &= \overline{MN}^2 = (\overline{BC} - \overline{BM} - \overline{CN})^2 \\ &= \overline{BC}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CN}^2 - 2 \cdot (\overline{BC} \cdot \overline{BM} + \overline{BC} \cdot \overline{CN} - \overline{CN} \cdot \overline{BM}),\end{aligned}$$

odakle je $\overline{BC}^2 + 2 \cdot \overline{CN} \cdot \overline{BM} = 2 \cdot \overline{BC} \cdot (\overline{BM} + \overline{CN})$ $(*)$.



Neka je $\angle BAM = x$ i $\angle CAN = y$. Kao vanjske uglove dobijamo $\angle AMN = x + 45°$ i $\angle ANM = y + 45°$.

Iz sinusnih teorema lako dobijamo $\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2}, \overline{BM} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin x}{\sin(135° - x)} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin x}{\sin(x + 45°)} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 + ctg\, x}, \overline{CN} = \overline{AC} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 + ctg} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1 + ctg\, y}$. Ako prethodne jednakosti uvrstimo u $(*)$, uz oznake $ctg\, x = m, ctg\, y = n$ (očigledno je $m > 0$ i $n > 0$, jer su x i y oštri uglovi), nakon skraćivanja sa $2 \cdot \overline{AB}^2$ dobijamo:

$$1 + \frac{2}{(1+m)(1+n)} = 2 \cdot \left(\frac{1}{1+m} + \frac{1}{1+n}\right) \Rightarrow$$

$$1 + m + n + mn + 2 = 4 + 2m + 2n \quad \Longrightarrow$$

$$mn - 1 = m + n \quad \Longrightarrow$$

$$1 = \frac{mn-1}{m+n} = \frac{ctg\,x \cdot ctg\,y - 1}{ctg\,x + ctg\,y} = ctg(x+y).$$

Kako je $0° < x + y < 90°$, to je $x + y = 45°$, odakle je $\angle MAN = 45°$.

Šema bodovanja

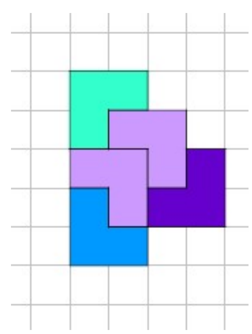
1 bod – dobijanje jednakosti $(*)$

3 boda – svođenje na jednakost u kojoj se pojavljuju samo $ctg\,x$ i $ctg\,y$

5 bodova – dobijanje $ctg(x+y) = 1$

1 boda – dokaz da je $\angle MAN = 45°$.

Zadatak 5. Beskonačna ploča je podijeljena na jedinične kvadratiće. Figuru koja se dobije izbacivanjem jednog kvadratića iz kvadrata formata 2×2 zovemo $L - figurom$. Konfiguracijom ćemo zvati svaki raspored $L - figura$ na ploči takav da nikoje dvije $L - figure$ ne pokrivaju isti kvadratić. Ako za svaku $L - figuru$ u konfiguraciji vrijedi da je kvadratić koji zajedno sa tom $L - figurom$ gradi kvadrat formata 2×2 pokriven drugom $L - figurom$, tu konfiguraciju zovemo *savršenom* (na slici je dat primjer *savršene* konfiguracije sa pet $L - figura$). Neka je data *savršena* konfiguracija sa 2021-om $L - figurom$. Dokazati da se nekoliko $L - figura$ (barem jedna, ali ne i sve) iz te *savršene* konfiguracije može ukloniti sa ploče tako da na ploči i dalje ostane *savršena* konfiguracija.



Rješenje

Primijetimo da, ukoliko postoje dvije $L - figure$ postavljene tako da prekrivaju 2×3 pravougaonik, uklanjanjem preostalih 2019 uglova ispunjavamo uslov zadatka. Nadalje pretpostavljamo da takva dvije $L - figure$ ne postoje.

Posmatrajmo proizvoljnu $L - figuru$ u sa ploče. Postoji jedinstven kvadrat 2×2 koji sadrži sva njena polja. Po uslovu zadatka postoji $L - figura$ v koja pokriva preostalo polje ovog kvadrata. Tada ćemo reći da $L - figura$ v *nadopunjuje* $L - figuru$ u. Konstruišimo usmjeren graf G čiji su čvorovi $L - figure$ ploče, i grana iz figure u u figuru v postoji ako i samo ako v nadopunjuje u.

Očigledno u grafu G svaki čvor ima tačno jednu izlaznu granu. Ako postoji čvor koji nema ulaznu granu, on ne nadopunjuje nijednu $L - figuru$, pa njenim uklanjanjem osobina i dalje važi. Pretpostavimo zato da takav čvor ne postoji. Tada svaki čvor ima barem jednu ulaznu i tačno jednu izlaznu granu. Međutim, kako je zbir ulaznih stepena jednak zbiru izlaznih stepena, svaki čvor mora imati tačno jednu ulaznu granu. Odatle se lako dobija da je G unija disjunktnih ciklusa. Ako postoji više od jednog ciklusa, tada oni imaju manje od 2021 čvorova, pa uklanjanjem svih ciklusa osim jednog ispunjavamo uslov zadatka.

Ostaje da pokažemo da ne može postojati tačno jedan ciklus, tj. da svih 2021 čvorova pripada istom ciklusu. Pretpostavimo suprotno. *Centrom* $L-figure$ nazivamo centar 2×2 kvadrata koji sadrži sva njegova polja (drugim riječima, centar $L-figure$ je zajedničko tjeme tri jedinična kvadrata koji je grade). Kako smo pretpostavili da ne postoji 2×3 pravougaonik pokriven sa dva $L-figure$, direktnom provjerom dobijamo da, ako jedna figura nadopunjuje drugu, tada se njihovi centri razlikuju za 1 i po x-koordinati i po y-koordinati (odnosno, njihovi centri su naspramna tjemena nekog polja ploče). Slijedi da u ciklusu parnost koordinata centara čvorova alternira, pa broj čvorova u ciklusu mora biti paran. Ovo je kontradikcija s pretpostavkom da postoji ciklus sa 2021 čvorova, pa je ona netačna.

Dakle, može se ukloniti nekoliko $L-figura$ (barem jedna, ali ne i sve) iz *savršene* konfiguracije sa 2021-om $L-figurom$ tako da na ploči i dalje ostane *savršena* konfiguracija.

Šema bodovanja

1 bod – zaključak da je tvrdnja tačna ukoliko dvije $L-figure$ prekrivaju 2×3 pravougaonik i ukoliko ne postoji čvor koji nema ulaznu granu (ili neka ekvivalentna tvrdnja)

2 boda – zaključak da ukoliko nema čvora sa ulaznim stepenom 0, ulazni stepen svakog čvora je 1

2 boda – zaključak da je graf unija disjunktnih ciklusa

1 bod – zaključak da je tvrdnja tačna ukoliko se graf sastoji od više od jednog ciklusa

4 boda – dokaz da se graf ne može sastojati od samo jednog ciklusa

Napomena:

Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.