61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Bihać / Mostar / Sarajevo / Tuzla, 22.05.2021. godine

II RAZRED

Zadatak 1. Naći sve kvadratne polinome $P(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ sa cjelobrojnim koeficijentima a, b, c takve da za sve realne x vrijedi

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2019 \leq P(x) \leq \frac{3}{2}x^2 + 6x + 2023.$$

Rješenje 1

Primijetimo da datu nejednakost možemo zapisati u obliku

$$\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2017 \leq P(x) \leq \frac{3}{2}(x+2)^2 + 2017.$$

Sada za $x = -2$ dobijamo $2017 \leq P(-2) \leq 2017$, tj. $P(-2) = 2017$. S druge strane, kako za svkao x vrijedi $\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2017 \geq 2017$, to je $P(x) \geq 2017$ za sve x, što zbog $P(-2) = 2017$ znači da parabola $y = P(x)$ dostiže minimalnu vrijednost za $x = -2$. Dakle, mora vrijediti $a > 0$ (jer samo tad parabola ima minimum) i tačka $(-2{,}2017)$ je tjeme parabole, pa je $P(x) = a(x+2)^2 + 2017$. Dakle, imamo

$$\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2017 \leq a(x+2)^2 + 2017 \leq \frac{3}{2}(x+2)^2 + 2017.$$

Očigledno je $a = 1$ jedina cjelobrojna vrijednost za koju vrijedi data nejednakost za sve x, pa je $P(x) = (x+2)^2 + 2017 = x^2 + 4x + 2021$, što je jedino rješenje zadatka.

Šema bodovanja

2 boda – dobijanje nejednakosti u obliku $\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2017 \leq P(x) \leq \frac{3}{2}(x+2)^2 + 2017$

1 bod – zaključak da je $P(-2) = 2017$

2 boda – zaključak da parabola $y = P(x)$ mora dostizati minimum za $x = -2$ (tj. da je tjeme parabole u tački $(-2{,}2017)$)

2 boda – zaključak da mora vrijediti $P(x) = a(x+2)^2 + 2017$

2 boda – zaključak da mora vrijediti $a = 1$

1 bod – pravilno izračunavanje $P(x)$

Rješenje 2

Za $a \geq 2$ bi zbog desne strane nejednakosti vrijedilo $\left(a-\frac{3}{2}\right)x^2+(b-6)x+c-2023 \leq 0$ za sve x, što je nemoguće jer ovaj kvadratni polinom nema maksimuma zbog $a-\frac{3}{2}>0$. Slično, za $a \leq 0$ bi zbog lijeve strane nejednakosti vrijedilo $\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+(2-b)x+2019-c \leq 0$, što je nemoguće zbog $\frac{1}{2}-a>0$. Dakle, $a=1$.

Sada je lijeva strana nejednakosti ekvivalentna sa $\frac{x^2}{2}+(b-2)x+c-2019 \geq 0$. Ovo će vrijediti za svako realno x ako je $D_1=(b-2)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot(c-2019) \leq 0$ (1). Slično, desna strana nejednakosti postaje $\frac{x^2}{2}+(6-b)x+2023-c \geq 0$, što vrijedi za sve realne x ako je $D_2=(6-b)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot(2023-c) \leq 0$ (2). Sabiranjem (1) i (2) nakon sređivanja dobijamo $2\cdot(b-4)^2 \leq 0$, pa mora vrijediti $b=4$. Sada se (1) svodi na $4 \leq 2(c-2019)$, odakle je $c \geq 2021$, dok se (2) svodi na $4 \leq 2(2023-c)$, odakle je $c \leq 2021$. Dakle, $c=2021$, pa je $P(x)=x^2+4x+2021$.

Šema bodovanja

2 boda – zaključak da mora vrijediti $a=1$

3 boda – zaključak da lijeva strana nejednakosti vrijedi za svako realno x ako i samo ako je zadovoljena nejednakost (1), a da desna strana nejednakosti vrijedi za svako realno x ako i samo ako je zadovoljena nejednakost (2) (ukoliko učenik ima jednu od prethodne dvije nejednakosti dobija 2 boda)

3 boda – sabiranje nejednakosti (1) i (2) i zaključak da je $b=4$

2 boda – dobijane nejednakosti $c \geq 2021$ i $c \leq 2021$ i zaključak $c=2021$

Zadatak 2. Neka je p prost broj. Odrediti sve parove (a,b) prirodnih brojeva takvih da vrijedi $NZS(a,a+$ p=NZSb,b+p.

(Napomena: $NZS(x,y)$ je oznaka za najmanji zajednički sadržilac, odnosno najmanji zajednički višekratnik, prirodnih brojeva x i y.)

Rješenje

Neka je $d=NZD(a,a+p)$ (NZD je oznaka za najveći zajednički djelilac). Tada imamo da $d|a$ i $d|a+p$, iz čega zaključujemo da $d|(a+p)-a=p$. Pošto je p prost broj, zaključujemo da d može biti ili jednako p (u slučaju kada p dijeli a) ili jednako 1 (u slučaju kada p ne dijeli a). Pošto je $NZS(a,a+p)=\frac{a(a+p)}{NZD(a,a+p)}$, zaključujemo da je $NZS(a,a+p)=\frac{a}{p}(a+p)$ ukoliko p dijeli a, odnosno $NZS(a,a+p)=a(a+p)$ ukoliko p ne dijeli a. Analogno imamo da je $NZS(b,b+p)=\frac{b}{p}(b+p)$ ukoliko je b djeljiv sa p i $NZS(b,b+p)=b(b+p)$ u suprotnom.

Ukoliko je jedan od brojeva a,b djeljiv sa p, a drugi nije (npr. $p|a, p\nmid b$), tada $p|NZS(a,a+p)$, a $p\nmid NZS(b,b+p)$ (jer ako $p\nmid b$ onda $p\nmid b+p$), pa je nemoguće da vrijedi $NZS(a,a+p)=NZS(b,b+$ p.

Dakle, ili su oba broja a,b djeljiva sa p ili nije nijedan. U oba slučaja jednakost NZS-ova se svodi na

$$a(a+p)=b(b+p)\Leftrightarrow$$

$$a^2-b^2=bp-ap\Leftrightarrow$$

$$(a-b)(a+b+p)=0.$$

Ova jednačina može vrijediti jedino ukoliko je $a=b$, jer ako je $a-b\neq 0$, dobijamo da je $a+b+p=0$, što nije moguće jer su a,b,p prirodni brojevi.

Dakle, jedina rješenja su parovi (a,b) gdje je $a=b$.

Šema bodovanja

2 boda – zaključak da je NZD brojeva a i $a+p$ (ili b i $b+p$) jednak 1 (ako $p\nmid a$) ili p (ako $p|a$)
2 boda – zaključak da je $NZS(a,a+p)=a(a+p)$ u slučaju da $p\nmid a$, odnosno $NZS(a,a+p)=\frac{a(a+p)}{p}$ u slučaju $p|a$ (i isto to za b)
2 boda – zaključak da su ili oba broja a,b djeljivi sa p ili nije nijedan
2 boda – ispravno rješavanje slučaja kad nijedan od brojeva a,b nije djeljiv sa p
2 boda – ispravno rješavanje slučaja kada su oba broja a,b djeljivi sa p

Zadatak 3. Riješiti jednačinu u skupu realnih brojeva

$$\frac{1}{\sqrt{2020}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2021}-\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2022}-\sqrt{x+2}}=\frac{1}{\sqrt{2021-x}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2022-x}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2023-x}-\sqrt{3}}.$$

Rješenje

Primijetimo da mora biti $0\leq x\leq 2021$ i $x\neq 2020$.
Racionalizacijom dobijamo

$$\frac{\sqrt{2020}+\sqrt{x}}{2020-x}+\frac{\sqrt{2021}+\sqrt{x+1}}{2021-(x+1)}+\frac{\sqrt{2022}-\sqrt{x+2}}{2022-(x+2)}=\frac{\sqrt{2021-x}+\sqrt{1}}{2021-x-1}+\frac{\sqrt{2022-x}+\sqrt{2}}{2022-x-2}+\frac{\sqrt{2023-x}+\sqrt{3}}{2023-x-3}.$$

Množenjem sa $2020-x\neq 0$ dobijamo ekvivalentnu jednačinu

$$\sqrt{2020}+\sqrt{x}+\sqrt{2021}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2022}-\sqrt{x+2}=\sqrt{2021-x}+\sqrt{1}+\sqrt{2022-x}+\sqrt{2}+\sqrt{2023-x}+\sqrt{3}.\quad (*)$$

Lako vidimo da je $x=1$ rješenje jednačine $(*)$.

Ako je $x>1$, onda je

$$\sqrt{2020}>\sqrt{2021-x},\sqrt{2021}>\sqrt{2022-x},\sqrt{2022}>\sqrt{2023-x},$$

$$\sqrt{x}>\sqrt{1},\sqrt{x+1}>\sqrt{2},\sqrt{x+2}>\sqrt{3},$$

pa vrijedi da je

$$\sqrt{2020}+\sqrt{x}+\sqrt{2021}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2022}-\sqrt{x+2}> \\ >\sqrt{2021-x}+\sqrt{1}+\sqrt{2022-x}+\sqrt{2}+\sqrt{2023-x}+\sqrt{3}.$$

Dakle, jednačina $(*)$ ne može imati rješenje veće od 1.

Slično, za $x<1$ je

$$\sqrt{2020}<\sqrt{2021-x}, \sqrt{2021}<\sqrt{2022-x}, \sqrt{2022}<\sqrt{2023-x},$$

$$\sqrt{x}<\sqrt{1}, \sqrt{x+1}<\sqrt{2}, \sqrt{x+2}<\sqrt{3},$$

pa vrijedi da je

$$\sqrt{2020}+\sqrt{x}+\sqrt{2021}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2022}-\sqrt{x+2} \\ <\sqrt{2021-x}+\sqrt{1}+\sqrt{2022-x}+\sqrt{2}+\sqrt{2023-x}+\sqrt{3},$$

i jednačina $(*)$ ne može imati rješenje manje od 1.

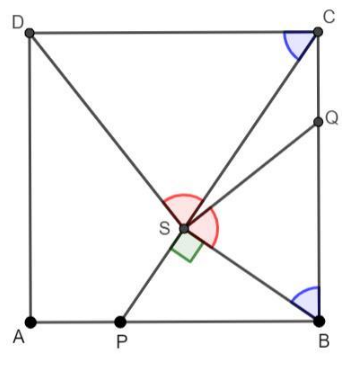
Dakle, jedino rješenje jednačine je $x=1$.

Šema bodovanja
2 boda – dobijanje jednačine $(*)$
1 bod – konstatacija da je $x=1$ rješenje jednačine
4 boda – dokazivanje da je nemoguće da vrijedi $x>1$ (ili dokazivanje da je nemoguće da vrijedi $x<1$)
3 boda – dokazivanje slučaja koji nije dokazan u gornjem koraku
Napomena: Da bi učenik dobio svih 10 bodova, potrebno je da konstatuje da je jednačina $(*)$ ekvivalentna sa polaznom jednačinom za $x\neq 2020$ ili da provjeri da rješenje $x=1$ zadovoljava početnu jednačinu (inače gubi jedan bod).

Zadatak 4. Date su tačke P i Q na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ kvadrata $ABCD$, redom, tako da vrijedi $\overline{BP}=\overline{BQ}$. Ako je tačka S na $\overline{PC}$ takva da je $BS\perp PC$, izračunati $\angle QSD$.

Rješenje 1

Zbog $\angle PBS=90°-\angle CBS=\angle BCS$, pravougli trouglovi ΔPBS i ΔBSC su slični odakle je $\frac{\overline{BS}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BQ}}{\overline{CD}}$, tj. $\frac{\overline{BS}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$, odakle su zbog $\angle QBS=90°-\angle BCS=\angle SCD$ trouglovi ΔBSQ i ΔCSD slični (pravilo SUS). Zbog toga je $\angle CSD=\angle BSQ$, pa dobijamo $\angle QSD=\angle QSC+\angle CSD=90°-\angle BSQ+\angle CSD=90°$.



Šema bodovanja

2 boda – zaključak da je za $\angle QSD = 90°$ dovoljno dokazati sličnost trouglova ΔBSQ i ΔCSD

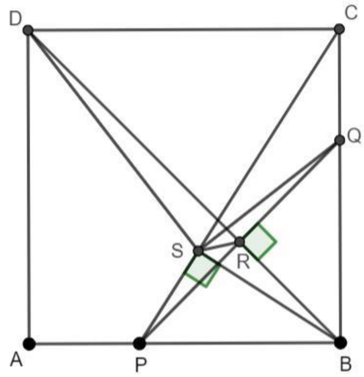
2 boda – zaključak da je za tu sličnost dovoljno dokazati $\frac{\overline{BS}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}$

4 boda – zaključak da su pravougli trouglovi ΔPBS i ΔBSC i da odatle slijedi $\frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}$

2 boda – zaključak da su prethodne dvije jednakosti ekvivalentne, te da odatle slijedi $\angle QSD = 90°$

Rješenje 2

Kako je $\angle PBD = \angle CBD = 45°$, to su trouglovi ΔPBD i ΔCBD podudarni (pravilo SUS), tj. $\overline{PD} = \overline{DQ}$, pa je četverougao $PBQD$ deltoid. Zbog toga je $BD \perp PQ$. Neka je $\{R\} = BD \cap PQ$. Kako je $\angle QCD + \angle QRD = 90° + 90° = 180°$, to je četverougao $DRQC$ tetivan. S druge strane, iz sličnosti pravouglih trouglova ΔPBS i ΔPBC slijedi $\frac{\overline{PB}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$, tj. $\overline{PB}^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PS}$. Također, na isti način iz sličnosti trouglova ΔPBR i ΔPBQ slijedi $\overline{PB}^2 = \overline{PR} \cdot \overline{PQ}$. Iz posljednje dvije jednakosti je $\overline{PC} \cdot \overline{PS} = \overline{PR} \cdot \overline{PQ}$, što znači da je četverougao $SRQC$ tetivan (iz potencije tačke P ili iz sličnosti trouglova ΔPSR i ΔPQC). Dakle, tačke S, R, Q, C, D pripadaju jednoj kružnici, zbog čega je $\angle QSD = \angle QRD = 90°$.



Šema bodovanja

1 bod – zaključak da je $BD \perp PQ$

1 bod – uvođenje tačke R i dokaz da su tačke R, Q, C, D konciklične

1 bod – zaključak da je za $\angle QSD = 90°$ dovoljno dokazati da i tačka S pripada toj kružnici

2 boda – zaključak da je dovoljno dokazati $\overline{PC} \cdot \overline{PS} = \overline{PR} \cdot \overline{PQ}$

4 boda – dobijanje jednakosti $\overline{PB}^2 = \overline{PC} \cdot \overline{PS}$ i $\overline{PB}^2 = \overline{PR} \cdot \overline{PQ}$ (po 2 boda za svaku, pri čemu se ovi bodovi ne dobijaju ukoliko učenik ranije nije konstatovao da je dovoljno dokazati $\overline{PC} \cdot \overline{PS} = \overline{PR} \cdot \overline{PQ}$)

1 bod – zaključak da zbog prethodnih jednakosti vrijedi $\angle QSD = 90°$

Zadatak 5. U svako polje tabele formata 2020×2021 treba upisati po jedan broj iz skupa $\{0,1,2\}$. Koliko maksimalno možemo upisati jedinica u tu tabelu tako da zbir brojeva u svakom redu i zbir brojeva u svakoj koloni bude djeljiv sa 3? Odgovor obrazložiti!

Rješenje

Pretpostavimo da je u tabelu upisano n nula i d dvica. Pošto u jednom redu imamo 2021 polja, da bi zbir brojeva u tom redu bio djeljiv sa 3 moramo u njemu imati bar jednu dvicu ili bar dvije nule. Dakle, mora vrijediti $d + \frac{n}{2} \geq 2020$. Slično, kako u jednoj koloni imamo 2020 polja, da bi zbir brojeva u toj koloni bio djeljiv sa 3 ona mora sadržavati bar jednu nulu ili bar dvije dvice. Dakle, vrijedi $n + \frac{d}{2} \geq 2021$. Sabiranjem dvije dobivene nejednakosti i dijeljenjem sa $\frac{3}{2}$ dobijamo da je $d + n \geq 2694$, pa je broj jedinica u tabeli sigurno manji ili jednak od $2020 \cdot 2021 - 2694$.

Sada ćemo konstruisati primjer tabele sa tačno toliko jedinica. Uzet ćemo da je $n = 1348$ i $d = 1346$. Rasporedimo 1348 nula u horizontalnim parovima počev od gornjeg lijevog ćoška (u 674 redova i 1348 kolona) i 1346 dvica u vertikalnim parovima počev od donjeg desnog ćoška (u 1346 redova i 673 kolone), a ostala polja popunimo jedinicama (pogledati sliku ispod). Kako je $674 + 1346 = 2020$ i $1348 + 673 = 2021$, to će u prvih 674 redova biti po dvije nule, dok će u preostalim redovima biti po jedna dvica, a u prvih 1348 kolona će biti po jedna nula, dok će u ostalim kolona biti po dvije dvice, čime smo zadovoljili uslov da je zbir brojeva u svakom redu i svakoj koloni djeljiv sa 3. Dakle, maksimalan broj jedinica je jednak $2020 \cdot 2021 - 2694 = 4079726$.

0	**0**	1	1	1	1	...	1	1	1
1	1	**0**	**0**	1	1	...	1	1	1
1	1	1	1	**0**	**0**	...	1	1	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	1	1	1	...	**2**	1	1
1	1	1	1	1	1	...	**2**	1	1
1	1	1	1	1	1	...	1	**2**	1
1	1	1	1	1	1	...	1	**2**	1
1	1	1	1	1	1	...	1	1	**2**
1	1	1	1	1	1	...	1	1	**2**

Šema bodovanja

4 boda – pronalaženje optimalne konstrukcije sa $2020 \cdot 2021 - 2694$ jedinica

1 bod – zaključak da u svakom redu mora biti bar jedna dvica ili bar dvije nule, i da u svakoj koloni mora biti bar jedna nula ili bar dvije dvice

3 boda – dobijanje nejednakosti $d + \frac{n}{2} \geq 2020$ i $n + \frac{d}{2} \geq 2021$ (dobijanje samo jedne od ovih nejednakosti vrijedi 2 boda)

2 boda – zaključak da je $d + n \geq 2694$

Napomena:

Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.