61. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Bihać / Mostar / Sarajevo / Tuzla, 22.05.2021. godine

I RAZRED

Zadatak 1. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da vrijedi

$$ab - c = 22,$$
$$bc - a = 5,$$
$$ca - b = -27.$$

Dokazati da je $a + b + c \neq 0$.

Rješenje

Sabiranjem datih jednakosti dobijemo

$$ab + bc + ca - (a + b + c) = 0,$$

odakle slijedi

$$ab + bc + ca = a + b + c.$$

Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da vrijedi $a + b + c = 0$. Tada bi vrijedilo

$$ab + bc + ca = 0.$$

Sada imamo

$$0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2.$$

U skupu realnih brojeva ovo je jedino moguće ako je $a = b = c = 0$, ali onda ne vrijede date jednakosti iz uslova zadatka.

Dakle, pretpostavka da je $a + b + c = 0$ nas je dovela do kontradikcije, pa mora vrijediti $a + b + c \neq 0$.

Šema bodovanja

2 boda – dobijanje jednakosti $ab + bc + ca = a + b + c$

2 boda – zaključak da iz pretpostavke $a + b + c = 0$ slijedi da je $ab + bc + ca = 0$

3 boda – zaključak da iz prethodne dvije jednakosti slijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 0$

1 bod – zaključak da iz prethodne jednakosti slijedi $a = b = c = 0$

2 boda – zaključak da je $a = b = c = 0$ u kontradikciji sa uslovima zadatka, te da mora biti $a + b + c \neq 0$

Zadatak 2. Dokazati da je broj $1 + 2^{2021^{2022}} + 3^{2021^{2022}} + \cdots + 2020^{2021^{2022}}$ djeljiv sa 2021.

(Napomena: a^{b^c} znači $a^{(b^c)}$, a ne $(a^b)^c$.)

Rješenje 1

Neka je $n = 2021^{2022}$ i $S = 1 + 2^n + 3^n + \cdots + 2020^n$.

S ima paran broj sabiraka i može se napisati u obliku

$$S = (1 + 2020^n) + (2^n + 2019^n) + \cdots + (1010^n + 1011^n).$$

Izrazi u zagradama su oblika $p^n + (2021 - p)^n$, gdje je $p = 1,2, \ldots ,1010$.

Kako za neparan prirodan broj m vrijedi faktorizacija

$$a^m + b^m = (a + b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + \cdots - ab^{m-2} + b^{m-1}),$$

i kako je $n = 2021^{2022}$ neparan broj, to je

$$p^n + (2021 - p)^n = (p + (2021 - p))(p^{n-1} - p^{n-2}(2021 - p) + \cdots - p(2021 - p)^{n-2} + (2021 - p)^{n-1}).$$

Dakle, $p^n + (2021 - p)^n$ je djeljivo sa $p + (2021 - p) = 2021$ za sve $p = 1,2, \ldots ,1010$, pa je i S djeljivo sa 2021.

Šema bodovanja

3 boda – uparivanje sabiraka p^n i $(2021 - p)^n$ u sumi S

4 boda – faktorizacija izraza $p^n + (2021 - p)^n$ iz koje se može zaključiti djeljivost sa 2021

3 boda – zaključak da su svi sabirci u sumi S djeljivi sa 2021, te da je zbog toga i suma S djeljiva sa 2021

Napomena: Učenik može dobiti 1 bod ako zaključi da sabirak 2020^n daje ostatak -1 pri djeljenju sa 2021

Rješenje 2

Kao i u prethodnom rješenju dobijamo da je S zbir sabiraka oblika $p^n + (2021 - p)^n$, $p = 1,2, \ldots ,1010$.

Kako je za n neparno

$$(2021 - p)^n \equiv (-p)^n \equiv -p^n \pmod{2021},$$

to je

$$p^n + (2021 - p)^n \equiv p^n - p^n \equiv 0 \pmod{2021},$$

za sve $p = 1,2, \ldots ,1010$, pa je i $S \equiv 0 \pmod{2021}$. Dakle, S je djeljivo sa 2021.

Šema bodovanja

3 boda – uparivanje sabiraka p^n i $(2021 - p)^n$ u sumi S

2 boda – zaključak da je $(2021 - p)^n \equiv (-p)^n \pmod{2021}$

2 boda – zaključak da je $(-p)^n \equiv -p^n \pmod{2021}$ zbog toga što je n neparan broj

3 boda – zaključak da su svi sabirci u sumi S djeljivi sa 2021, te da je zbog toga i suma S djeljiva sa 2021

Napomena: Učenik može dobiti 1 bod ako zaključi da je $2020^n \equiv -1 \pmod{2021}$

Zadatak 3. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{44}$ prirodni brojevi takvi da je $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{44} \le 125$. Dokazati da među 43 razlike $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots, a_{44} - a_{43}$, postoji barem 10 jednakih.

Rješenje

Neka je $d_j = a_{j+1} - a_j$ $(j \in \{1,2, \ldots ,43\})$. Imamo da je

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_{43} = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots (a_{44} - a_{43}) = a_{44} - a_1 \le 125 - 1 = 124$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da se među ovim razlikama svaka vrijednost pojavljuje najviše 9 puta.

Najmanja vrijednost koju navedena suma može uzeti je tada

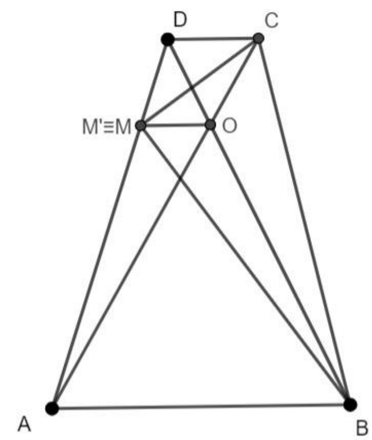
$$9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 125 > 124,$$

što je očigledna kontradikcija. Do kontradikcije nas je dovela pretpostavka da se svaka vrijednost pojavljuje najviše 9 puta, pa je ona netačna. Dakle, postoji razlika koja se pojavljuje barem 10 puta.

Šema bodovanja
4 boda – zaključak da je $d_1 + d_2 + \cdots + d_{43} \leq 124$
4 boda – zaključak da u slučaju kada se nijedna razlika ne pojavljuje 10 puta vrijedi da je najmanja vrijednost koju suma $d_1 + d_2 + \cdots + d_{43}$ može uzeti jednaka $9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 7 \cdot 5$
1 bod – računanje vrijednosti sume $9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 7 \cdot 5$
1 bod – zaključak da nas je pretpostavka dovela do kontradikcije i da postoji razlika koja se pojavljuje barem 10 puta.

Zadatak 4. U trapezu $ABCD$ $(AB||CD)$ vrijedi $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{CD}$. Prava paralelna osnovicama trapeza koja prolazi kroz tačku presjeka dijagonala trapeza siječe krak $\overline{AD}$ u tački M. Odrediti $\angle BMC$.

Rješenje
Neka je tačka M' na kraku $\overline{AD}$ takva da je $\overline{AM'} = \overline{AD}$. Tada je $\overline{DM'} = \overline{DC}$. Kako je zbog paralelnosti $\angle BAD + \angle ADC = 180°$, to je $\angle AM'B + \angle DM'C = \frac{180° - \angle BAD}{2} + \frac{180° - \angle ADC}{2} = 180° - \frac{\angle BAD + \angle ADC}{2} = 90°$, zbog čega je $\angle BM'C = 90°$.



Neka je O presjek dijagonala trapeza. Dokazat ćemo da vrijedi $OM'||AB$, odakle će slijediti da se tačke M i M' poklapaju. Zbog sličnosti trouglova ΔAOB i ΔCOD (ili iz Talesove teoreme) vrijedi $\frac{\overline{DO}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DM'}}{\overline{AM'}}$. Na osnovu obrata Talesove teoreme vrijedi $M'O||AB$, pa se tačke M' i M poklapaju, pa je $\angle BMC = \angle BM'C = 90°$.

Šema bodovanja
3 boda – definisinje tačke M' te dokazivanje da za nju vrijedi $\angle BM'C = 90°$
2 boda – zaključak da je za poklapanje tačaka M i M' dovoljno pokazati da je OM' paralelno osnovicama trapeza
1 bod – zaključak da je za prethodno navedenu paralelnost dovoljno pokazati odnos $\frac{\overline{DO}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{DM'}}{\overline{AM'}}$
3 boda – dokaz prethodnog odnosa
1 bod – zaključak da zbog poklapanja tačaka M i M' vrijedi da je $\angle BMC = \angle BM'C = 90°$

Zadatak 5. U svako polje tabele formata 2020×2021 treba upisati po jedan broj iz skupa $\{0,1,2\}$. Koliko maksimalno možemo upisati jedinica u tu tabelu tako da zbir brojeva u svakom redu i zbir brojeva u svakoj koloni bude djeljiv sa 3? Odgovor obrazložiti!

Rješenje
Pretpostavimo da je u tabelu upisano n nula i d dvica. Pošto u jednom redu imamo 2021 polja, da bi zbir brojeva u tom redu bio djeljiv sa 3 moramo u njemu imati bar jednu dvicu ili bar dvije nule. Dakle, mora vrijediti $d + \frac{n}{2} \geq 2020$. Slično, kako u jednoj koloni imamo 2020 polja, da bi zbir brojeva u toj koloni bio

djeljiv sa 3 ona mora sadržavati bar jednu nulu ili bar dvije dvice. Dakle, vrijedi $n+\frac{d}{2}\geq 2021$. Sabiranjem dvije dobivene nejednakosti i dijeljenjem sa $\frac{3}{2}$ dobijamo da je $d+n\geq 2694$, pa je broj jedinica u tabeli sigurno manji ili jednak od $2020\cdot 2021-2694$.

Sada ćemo konstruisati primjer tabele sa tačno toliko jedinica. Uzet ćemo da je $n=1348$ i $d=1346$. Rasporedimo 1348 nula u horizontalnim parovima počev od gornjeg lijevog ćoška (u 674 redova i 1348 kolona) i 1346 dvica u vertikalnim parovima počev od donjeg desnog ćoška (u 1346 redova i 673 kolone), a ostala polja popunimo jedinicama (pogledati sliku ispod). Kako je $674+1346=2020$ i $1348+673=2021$, to će u prvih 674 redova biti po dvije nule, dok će u preostalim redovima biti po jedna dvica, a u prvih 1348 kolona će biti po jedna nula, dok će u ostalim kolona biti po dvije dvice, čime smo zadovoljili uslov da je zbir brojeva u svakom redu i svakoj koloni djeljiv sa 3. Dakle, maksimalan broj jedinica je jednak $2020\cdot 2021-2694=4079726$.

0	**0**	1	1	1	1	...	1	1	1
1	1	**0**	**0**	1	1	...	1	1	1
1	1	1	1	**0**	**0**	...	1	1	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	1	1	1	...	**2**	1	1
1	1	1	1	1	1	...	**2**	1	1
1	1	1	1	1	1	...	1	**2**	1
1	1	1	1	1	1	...	1	**2**	1
1	1	1	1	1	1	...	1	1	**2**
1	1	1	1	1	1	...	1	1	**2**

Šema bodovanja

4 boda – pronalaženje optimalne konstrukcije sa $2020\cdot 2021-2694$ jedinica

1 bod – zaključak da u svakom redu mora biti bar jedna dvica ili bar dvije nule, i da u svakoj koloni mora biti bar jedna nula ili bar dvije dvice

3 boda – dobijanje nejednakosti $d+\frac{n}{2}\geq 2020$ i $n+\frac{d}{2}\geq 2021$ (dobijanje samo jedne od ovih nejednakosti vrijedi 2 boda)

2 boda – zaključak da je $d+n\geq 2694$

Napomena:

Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.