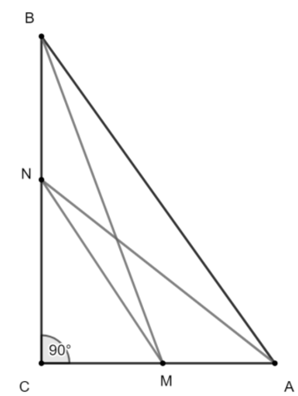
VIII razred

Rješenja zadataka i šema bodovanja

Zadatak 1. U pravouglom trouglu ΔABC na katetama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ date su redom tačke M i N. Dokazati da vrijedi jednakost:

$$\overline{AN}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{AB}^2.$$

Rješenje:



Pošto je, prema uslovima zadatka, ugao kod vrha C pravi, to iz pravouglih trouglova ΔABC, ΔANC, ΔMBC i ΔMNC, sa pravim uglom kod vrha C, dobijemo, redom,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2,$$
$$\overline{AC}^2 + \overline{NC}^2 = \overline{AN}^2,$$
$$\overline{BC}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{BM}^2,$$
$$\overline{MC}^2 + \overline{NC}^2 = \overline{MN}^2.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\overline{AN}^2 + \overline{BM}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{NC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{MC}^2 = (\overline{MC}^2 + \overline{NC}^2) + (\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2)\\ &= \overline{MN}^2 + \overline{AB}^2,\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

2 boda na činjenicu da su trouglovi ΔANC, ΔMBC i ΔMNC pravougli
4 boda za primjenu Pitagorine teoreme na trouglove ΔABC, ΔANC, ΔMBC i ΔMNC
4 boda za dobijanje tražene jednakosti

Zadatak 2. Odrediti sve trocifrene brojeve $\overline{abc}$ (pri čemu cifre a, b i c ne moraju nužno biti međusobno različite) takve da se pri dijeljenju tog broja sa dvocifrenim brojem $\overline{bc}$ dobije količnik 7 i ostatak 20.

Rješenje:

Iz uslova imamo da vrijedi $\overline{abc} = 7 \cdot \overline{bc} + 20$. Kako je $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 100a + \overline{bc}$, iz uslova imamo

$$100a + \overline{bc} = 7 \cdot \overline{bc} + 20 \Leftrightarrow$$
$$6 \cdot \overline{bc} = 100a - 20 \Leftrightarrow$$
$$6 \cdot \overline{bc} = 20(5a - 1) \Leftrightarrow$$
$$3 \cdot \overline{bc} = 10(5a - 1).$$

Iz posljednje jednakosti vidimo da je broj $3 \cdot \overline{bc}$ djeljiv sa 10, što znači da je broj $\overline{bc}$ djeljiv s 10, tj. mora biti $c = 0$. Uvrštavajući $c = 0$ dobijamo $\overline{bc} = \overline{b0} = 10b$, pa imamo

$$6 \cdot 10b = 20(5a - 1) \Leftrightarrow$$
$$60b = 20(5a - 1) \Leftrightarrow$$
$$3b = 5a - 1 \Leftrightarrow$$
$$5a = 3b + 1$$

Slijedi da je $3b + 1$ djeljivo s 5. Direktnom provjerom dobijamo da su jedine cifre koje zadovoljavaju ovaj uslov 3 i 8, pa $b \in \{3, 8\}$.
Za $b = 3$ imamo $a = \frac{3 \cdot 3 + 1}{5} = 2$ i dobijamo broj $\overline{abc} = 230$, a za $b = 8$ je $a = \frac{3 \cdot 8 + 1}{5} = 5$ i dobijamo broj $\overline{abc} = 580$. To su traženi trocifreni brojevi.

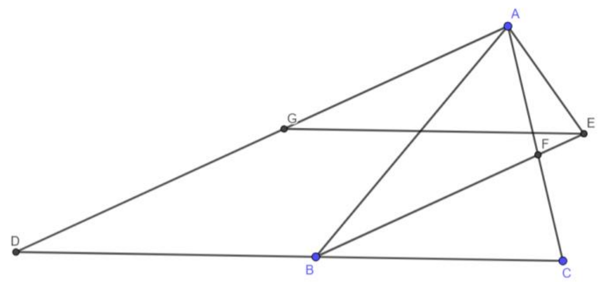
Šema bodovanja:

2 boda za dobijanje jednakosti $100a + \overline{bc} = 7 \cdot \overline{bc} + 20$ ili njoj ekvivalentne jednakosti
1 bod za dobijanje $3 \cdot \overline{bc} = 10(5a - 1)$ ili njoj ekvivalentne jednakosti

3 boda za zaključak da je $c=0$
1 bod za dobijanje jednakosti $5a = 3b + 1$
3 boda za dobijanje traženih trocifrenih brojeva i dokaz da drugih nema

Zadatak 3. U trouglu ΔABC vrijedi $\angle BAC < \angle ACB$. Tačka D je tačka na produžetku stranice $\overline{BC}$ preko vrha B takva da vrijedi $\overline{BD} = \overline{AB}$. Tačka F je tačka presjeka simetrale ugla $\angle ABC$ sa stranicom $\overline{AC}$, a tačka E je tačka na polupravoj BF takva da vrijedi $\angle BAE = \angle ACB$. Tačka G je tačka na duži $\overline{AD}$ takva da vrijedi $EG||BC$. Dokazati da vrijedi $\overline{AG} = \overline{BF}$.

Rješenje:



Označimo uglove $\measuredangle BAC = \alpha, \measuredangle ACB = \gamma$ i $\measuredangle ABC = \beta$. Sada je $\measuredangle ABE = \measuredangle CBE = \frac{\beta}{2}$. Pošto je $\overline{BD} = \overline{BA}$ i $\measuredangle DBA = 180° - \beta$, to je onda i $\measuredangle BDA = \measuredangle BAD = \frac{\beta}{2}$. Kako je $GE||DC$, to je $\measuredangle EGA = \measuredangle CDA = \frac{\beta}{2}$. Sada imamo da je $\measuredangle CBE = \measuredangle CDA = \frac{\beta}{2}$, pa zaključujemo da je $BE||AD$.

Primijetimo sada da je četverougao $DBEG$ paralelogram ($DB||GE$ i $BE||DG$), pa je $\overline{GE} = \overline{DB} = \overline{AB}$. Ako posmatramo trougao ΔGAE, imamo da je

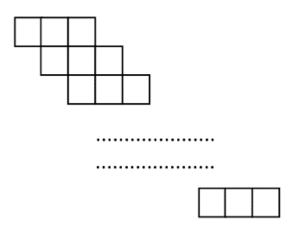
$$\measuredangle GEA = 180° - \measuredangle EGA - \measuredangle EAG = 180° - \frac{\beta}{2} - (\measuredangle EAB + \measuredangle BAG) = 180° - \frac{\beta}{2} - \gamma - \frac{\beta}{2}$$
$$= 180° - \beta - \gamma = \alpha.$$

Sada vidimo da su trouglovi ΔABF i ΔEGA podudarni (na osnovu stava USU, jer je $\overline{AB} = \overline{EG}$, $\measuredangle ABF = \measuredangle EGA = \frac{\beta}{2}$ i $\measuredangle BAF = \measuredangle GEA = \alpha$) iz čega slijedi da je $\overline{BF} = \overline{AG}$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

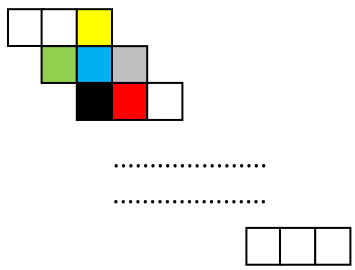
Podudarnost trouglova ΔABF i ΔEGA se može dokazati na više načina (npr. moguće je i na osnovu pravila SUS).
6 bodova na pokazivanje jednakosti elemenata odgovarajućih trouglova koji su dovoljni za podudarnost (svaki element po 2 boda)
3 boda za zaključivanje da su trouglovi ΔABF i ΔEGA podudarni
1 bod zaključak jednakosti stranica $\overline{AG} = \overline{BF}$

Zadatak 4. Figuru na slici, koja se sastoji od 12 redova sa po 3 kvadratića (ukupno 36 kvadratića), pri čemu je svaki red „pomjeren" jedno mjesto udesno u odnosu na prethodni, zovemo stepenicama. Na koliko je načina moguće brojeve 1,2,3, … ,36 upisati u kvadratiće od kojih su napravljene stepenice (svaki broj treba upisati tačno jednom), tako da je u svakom kvadratiću upisan jedan broj i da za svaki kvadratić vrijedi da je broj upisan u njemu manji i od broja u kvadratiću koji je desno od njega (ukoliko takav kvadratić postoji) i od broja u kvadratiću ispod njega (ukoliko takav kvadratić postoji)?



Rješenje: Primijetimo da nam uslov znači da u svakom redu brojevi rastu s lijeva na desno, te da u svakoj koloni brojevi rastu odozgo prema dole. Numerišimo redove odozgo prema dole brojevima od 1 do 12 (svaki red ima 3 kvadratića), a kolone s lijeva na desno brojevima od 1 do 14 (1. i 14. kolona imaju po jedan kvadratić, 2. i 13. kolona po dva, a preostale kolone po tri kvadratića).

Za dva različita kvadratića A i B reći ćemo da je A *bolji* od B ako red u kojem je kvadratić A ima manji ili jednak redni broj od reda u kojem je kvadratić B i kolona u kojoj je kvadratić A ima manji ili jednak redni broj od kolone u kojoj je kvadratić B (primijetimo da je moguće da niti je A *bolji* od B niti je B *bolji* od A, npr. ako je A u redu sa manjim rednim brojem, a B u koloni sa manjim rednim brojem). Sada lako vidimo da ako je A *bolji* od B, onda je broj u kvadratiću A manji od broja u kvadratiću B (jer možemo doći od A do B krećući se kvadratićima tako da u svakom koraku idemo desno ili dole, a na taj način brojevi uvijek rastu).
Kako je broj iz prvog reda i prve kolone bolji od svih ostalih kvadratića, u njemu mora biti broj 1. Od preostalih kvadratića, broj iz prvog reda i druge kolone je *bolji* od svih preostalih kvadratića, pa se u njemu nalazi broj 2.



Posmatrajmo kvadratić u prvom redu i trećoj koloni (žuti kvadratić). Ako zanemarimo dva kvadratića u kojima smo već odredili koji brojevi su upisani, on je *bolji* od svih preostalih kvadratića osim zelenog. Slično, zeleni kvadratić je *bolji* od svih preostalih kvadratića osim žutog. To znači da su brojevi 3 i 4 upisani u žuti i zeleni kvadratić, što možemo uraditi na dva načina. Međutim, kako je plavi kvadratić *bolji* od svih preostalih kvadratića, to u njemu mora biti broj 5. Sada slično zaključujemo da je crni kvadratić *bolji* od svih preostalih kvadratića osim sivog, a sivi je također *bolji* od svih preostalih kvadratića osim crnog, to su u ta dva kvadratića upisani brojevi 6 i 7, što opet možemo uraditi na dva načina. Kako je crveni kvadratić *bolji* od svih preostalih kvadratića, u njemu mora biti upisan broj 8. Nastavljajući ovaj postupak, mi u stvari za svaku od trojki $(3,4,5),(6,7,8),\ldots(33,34,35)$ dobijamo da se prva dva elementa trojke mogu rasporediti na dva načina, a trećem elementu je određena pozicija. Naravno, na kraju ćemo dobiti da se broj 36 mora nalaziti u posljednjem kvadratiću 12. reda. Kako imamo 11 trojki, a u svakoj nezavisno biramo kako ćemo upisati prva dva elementa, to je broj načina da se upišu brojevi jednak $2^{11} = 2048$.

Šema bodovanja:

1 bod: zaključak da je pozicija brojeva 1 i 2 određena (ili 35 i 36)
2 boda: zaključak da za brojeve 3 i 4, ili brojeve 33 i 34 postoje dva moguća načina raspoređivanja
1 bod: zaključak da je pozicija broja 5 određena
3 boda: zaključak da se proces može nastaviti i za ostale trojke, te da za svaku postoje dvije opcije
3 boda: dobijanje tačnog rezutata

Zadatak 5. Za pozitivne realne brojeve x i y označimo sa s najmanji od brojeva: $x, \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x}$. Odrediti najveću moguću vrijednost broja s.

Rješenje:

Iz činjenice da je s najmanji od datih brojeva, slijedi da je

$$s \leq x, s \leq \frac{1}{y}, s \leq y + \frac{1}{x}.$$

Iz prve i druge nejednakosti, kako su x i y pozitivni brojevi, slijedi $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{x}$ i $\frac{1}{s} \geq y$.

Sabiranjem posljednje dvije nejednakosti dobijamo

$$\frac{2}{s} \geq y + \frac{1}{x}.$$

Ova i treća nejednakost sa početka rješenja zadatka daju

$$s \leq y + \frac{1}{x} \leq \frac{2}{s},$$

odakle je $s^2 \leq 2$, tj. $s \leq \sqrt{2}$. Jednakost se postiže kada je $x = \sqrt{2}$ i $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pa najveća moguća vrijednost broja s iznosi $\sqrt{2}$.

Šema bodovanja:

3 boda za pokazivanje da je moguće dobiti vrijednost $\sqrt{2}$
7 bodova na dokaz da je nemoguće dobiti veću vrijednost od $\sqrt{2}$ (ukoliko učenik razdvaja slučajeve koji broj je najmanji, slučajevi da je najmanji neki od brojeva x ili $\frac{1}{y}$ nose po 2 boda, dok slučaj u kojem je $y + \frac{1}{x}$ najmanji nosi 3 boda)

Napomena:
Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.