VII razred

Rješenja zadataka i šema bodovanja

Zadatak 1. Ako je $\frac{a}{b} = 16$ i $\frac{b}{c} = 5$, pri čemu su b i c različiti od nule, izračunati vrijednost izraza $\frac{a+16b+5c}{25a+4b+c}$.

Rješenje:
Iz uslova zadatka slijedi da je $a = 16b$ i $b = 5c$. Odavde dobijemo da je $a = 80c$. Uvrštavanjem $a = 80c$ i $b = 5c$ u dati izraz, imamo

$$\frac{a + 16b + 5c}{25a + 4b + c} = \frac{80c + 80c + 5c}{2000c + 20c + c} = \frac{165c}{2021c} = \frac{165}{2021}.$$

Dakle, tražena vrijednost izraza je $\frac{165}{2021}$.

Šema bodovanja:
1 bod: $a = 16b, b = 5c$
3 boda: izražavanje svih varijabli preko jedne
2 boda: uvrštavanje dobijenog u dati izraz
4 boda: dobijanje tačnog rezultata

Zadatak 2. Za broj kažemo da je *lijep* ako se sastoji samo od cifara 3 i 4, pri čemu se cifra 3 pojavljuje bar jednom, a cifra 4 tačno jednom (npr. brojevi $43, 343, 3334$ su neki od *lijepih* brojeva).

a) Dokazati da *lijep* broj ne može biti djeljiv sa više od dva broja iz skupa $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
b) Odrediti najmanji *lijep* broj koji je djeljiv sa tačno dva broja iz skupa A. Odgovor obrazložiti!

Rješenje:

a) Ako *lijep* broj ima k cifara, tada se cifra 3 javlja $k - 1$ puta i cifra 4 jednom. Zato je zbir cifara takvog broja $3 \cdot (k - 1) + 4 = 3k - 3 + 4 = 3k + 1$. Ovaj broj očito nije djeljiv sa 3. Kako je broj djeljiv sa 3 ako i samo ako mu je zbir cifara djeljiv sa 3, to zaključujemo da *lijep* broj ne može biti djeljiv sa 3, pa slijedi da ne može biti djeljiv ni sa 6 ni sa 9 (jer ako je broj djeljiv sa 6 ili 9, onda je on djeljiv i sa 3).
Dvocifreni završeci koje *lijep* broj može imati su $33, 34, 43$. Kako je broj djeljiv sa 4 ako i samo ako mu je dvocifreni završetak djeljiv sa 4, to zaključujemo da *lijep* broj ne može biti djeljiv sa 4, pa samim tim ni sa 8 (jer ako je broj djeljiv sa 8, onda je on djeljiv i sa 4). Kako je broj djeljiv sa 5 ako i samo ako mu je posljednja cifra 0 ili 5, i kako *lijep* broj ne sadrži ove cifre, to *lijep* broj ne može biti djeljiv ni sa 5.
Dakle, *lijep* broj ne može biti djeljiv ni sa jednim od brojeva $3, 4, 5, 6, 8, 9$, pa su jedini brojevi iz skupa A sa kojima može biti djeljiv brojevi 2 i 7, tj. može biti djeljiv sa najviše dva broja iz ovog skupa.

b) Iz dijela a) vidimo da, ako je *lijep* broj djeljiv sa dva broja iz skupa A, tada to moraju biti brojevi 2 i 7. Da bi bio djeljiv sa 2, posljednja cifra mu mora biti parna, odnosno posljednja cifra mora biti 4. Dakle, traženi broj je oblika $33 \dots 34$. Potrebno je od brojeva ovog oblika naći najmanji koji je djeljiv sa 7.
Direktnom provjerom dobijamo da brojevi $34, 334, 3334$ nisu djeljivi sa 7, a da 33334 jeste, pa je to najmanji broj sa traženom osobinom.

Šema bodovanja:
Dijelovi a) i b) nose redom 6 i 4 bodova.

a) Za svaki od brojeva $3, 4, 5, 6, 8, 9$ dokaz da *lijepi* brojevi ne mogu biti djeljiivi s njim nosi po 1 bod
b) 1 bod: zaključak da traženi broj mora biti djeljiv sa 2 i 7, te da zbog toga cifra 4 mora biti na kraju
2 boda: konstatacija da brojevi $34, 334, 3334$ nisu djeljivi sa 7
1 bod: dobijanje tačnog rezultata 33334

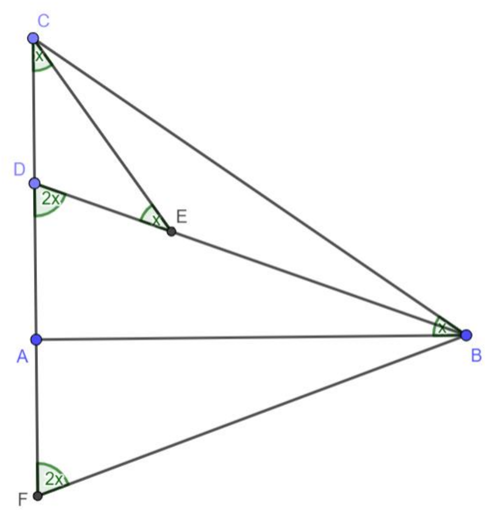
Zadatak 3. Neka je ΔABC pravougli trougao sa pravim uglom u vrhu A, pri čemu je $\overline{AB} > \overline{AC}$. Tačka D je na duži $\overline{AC}$, a tačka E na duži $\overline{BD}$, tako da vrijedi $\angle ABC = \angle ECD = \angle CED$. Neka je F tačka na produžetku stranice $\overline{AC}$ preko vrha A takva da vrijedi $\angle BFA = 2 \cdot \angle ABC$.

a) Dokazati da je trougao ΔFBC jednakokraki.
b) Dokazati da je dužina duži $\overline{BE}$ dvostruko veća od dužine duži $\overline{AD}$.

Rješenje:

a) Označimo ugao $\angle ABC = \angle ECD = \angle CED = x$. Sada je $\angle ACB = 90° - x$. Kako je $\angle AFB = 2x$ i $\angle FCB = \angle ACB = 90° - x$ iz trougla ΔFBC dobijamo da je $\angle FBC = 180° - 2x - (90° - x) = 90° - x$. Sada vidimo da je $\angle FCB = \angle FBC = 90° - x$, pa je trougao ΔFBC jednakokraki (u njemu je $\overline{FB} = \overline{FC}$).

b) Kako je $\angle DCE = \angle DEC = x$, to je trougao ΔDEC jednakokraki i vrijedi $\overline{ED} = \overline{DC}$. Također imamo da je $\angle ADB = \angle DCE + \angle DEC = 2x = \angle AFB$ pa je trougao ΔBDF jednakokraki, tj. $\overline{DB} = \overline{FB}$. Kako u jednakokrakom trouglu visina polovi suprotnu stranicu, to je $\overline{AD} = \overline{AF}$. Konačno, imamo da je $\overline{BE} = \overline{BD} - \overline{DE} = \overline{FB} - \overline{DE} = \overline{FC} - \overline{DE} = \overline{FC} - \overline{DC} = \overline{FD} = \overline{AD} + \overline{AF} = 2 \cdot \overline{AD}$, što je i trebalo dokazati.



Šema bodovanja:
Dijelovi a) i b) nose redom 2 i 8 bodova

a) 1 bod: izračunavanje uglova koji mogu dovesti do tražene tvrdnje
1 bod: dokaz tvrdnje
c) 1 bod: izračunavanje ugla $\angle FDB$
1 bod: zaključak $\overline{BF} = \overline{BD}$
2 boda: zaključak da je $2 \cdot \overline{AD} = \overline{DF}$, te da je dovoljno dokazati $\overline{DF} = \overline{BE}$
1 bod: zaključak $\overline{BD} = \overline{FC}$
3 boda: dokaz tvrdnje

Zadatak 4. Na policu u školskoj bibiloteci treba rasporediti dvije vrste knjiga, udžbenike iz matematike i udžbenike iz fizike. Udžbenici iz istog predmeta su iste debljine. Ako se na policu slažu samo udžbenici iz matematike, poznato je da ih može stati 9, ali ne može 10, a ako se na policu slažu samo udžbenici iz fizike, onda ih može stati 15, ali ne može 16.

a) Može li na policu istovremeno stati 6 udžbenika iz matematike i 5 udžbenika iz fizike?

b) Može li na policu istovremeno stati 7 udžbenika iz matematike i 5 udžbenika iz fizike?

Odgovore obrazložiti!

Rješenje:

Neka je m debljina udžbenika iz matematike, f debljina udžbenika iz fizike i P dužina police. Kako na policu može stati 9 udžbenika iz matematike, vrijedi $9m \leq P$. Kako ih ne može stati 10, vrijedi $P < 10m$. Iz prve nejednakosti dobijamo $m \leq \frac{1}{9}P$, a iz druge $m > \frac{1}{10}P$.

Slično, za udžbenike iz fizike dobijamo $15f \leq P$ i $P < 16f$, odnosno $f \leq \frac{1}{15}P$ i $f > \frac{1}{16}P$.

a) Imamo

$$6m + 5f \leq 6 \cdot \frac{1}{9}P + 5 \cdot \frac{1}{15}P = \frac{6}{9}P + \frac{5}{15}P = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}P = P$$

Kako je ukupna debljina navedenih udžbenika manja ili jednaka dužini police, to ovi udžbenici mogu stati na policu.

b) Imamo

$$7m + 5f > 7 \cdot \frac{1}{10}P + 5 \cdot \frac{1}{16}P = \frac{7}{10}P + \frac{5}{16}P = \frac{56P + 25P}{80} = \frac{81P}{80} = 1\frac{1}{80}P > P$$

Dakle, ukupna debljina navedenih udžbenika veća je od dužine police, pa oni ne mogu stati na policu.

Šema bodovanja:

Dijelovi a) i b) nose redom 4 i 6 bodova

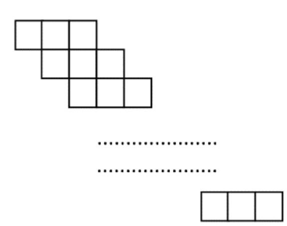
a) 2 boda: dobivanje gornjih granica za debljine udžbenika u odnosu na debljinu police ($m \leq \frac{1}{9}P$ i $f \leq \frac{1}{15}P$

2 boda: dokaz da je $6m + 5f \leq P$

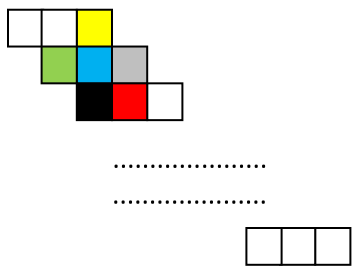
b) 3 boda: dobivanje donjih granica za debljine udžbenika u odnosu na debljinu police ($m > \frac{1}{10}P$ i $f > \frac{1}{16}P$)

3 bod: dokaz da je $7m + 5f > P$

Zadatak 5. Figuru na slici, koja se sastoji od 12 redova sa po 3 kvadratića (ukupno 36 kvadratića), pri čemu je svaki red „pomjeren“ jedno mjesto udesno u odnosu na prethodni, zovemo stepenicama. Na koliko je načina moguće brojeve $1,2,3,\ldots,36$ upisati u kvadratiće od kojih su napravljene stepenice (svaki broj treba upisati tačno jednom), tako da je u svakom kvadratiću upisan jedan broj i da za svaki kvadratić vrijedi da je broj upisan u njemu manji i od broja u kvadratiću koji je desno od njega (ukoliko takav kvadratić postoji) i od broja u kvadratiću ispod njega (ukoliko takav kvadratić postoji)?



Rješenje:
Primijetimo da nam uslov znači da u svakom redu brojevi rastu s lijeva na desno, te da u svakoj koloni brojevi rastu odozgo prema dole. Numerišimo redove odozgo prema dole brojevima od 1 do 12 (svaki red ima 3 kvadratića), a kolone s lijeva na desno brojevima od 1 do 14 (1. i 14. kolona imaju po jedan kvadratić, 2. i 13. kolona po dva, a preostale kolone po tri kvadratića).
Za dva različita kvadratića A i B reći ćemo da je A *bolji* od B ako red u kojem je kvadratić A ima manji ili jednak redni broj od reda u kojem je kvadratić B i kolona u kojoj je kvadratić A ima manji ili jednak redni broj od kolone u kojoj je kvadratić B (primijetimo da je moguće da niti je A *bolji* od B niti je B *bolji* od A, npr. ako je A u redu sa manjim rednim brojem, a B u koloni sa manjim rednim brojem). Sada lako vidimo da ako je A *bolji* od B, onda je broj u kvadratiću A manji od broja u kvadratiću B (jer možemo doći od A do B krećući se kvadratićima tako da u svakom koraku idemo desno ili dole, a na taj način brojevi uvijek rastu).
Kako je broj iz prvog reda i prve kolone bolji od svih ostalih kvadratića, u njemu mora biti broj 1. Od preostalih kvadratića, broj iz prvog reda i druge kolone je *bolji* od svih preostalih kvadratića, pa se u njemu nalazi broj 2.



Posmatrajmo kvadratić u prvom redu i trećoj koloni (žuti kvadratić). Ako zanemarimo dva kvadratića u kojima smo već odredili koji brojevi su upisani, on je *bolji* od svih preostalih kvadratića osim zelenog. Slično, zeleni kvadratić je *bolji* od svih preostalih kvadratića osim žutog. To znači da su brojevi 3 i 4 upisani u žuti i zeleni kvadratić, što možemo uraditi na dva načina. Međutim, kako je plavi kvadratić *bolji* od svih preostalih kvadratića, to u njemu mora biti broj 5. Sada slično zaključujemo da je crni kvadratić *bolji* od svih preostalih kvadratića osim sivog, a sivi je također *bolji* od svih preostalih kvadratića osim crnog, to su u ta dva kvadratića upisani brojevi 6 i 7, što opet možemo uraditi na dva načina. Kako je crveni kvadratić *bolji* od svih preostalih kvadratića, u njemu mora biti upisan broj 8. Nastavljajući ovaj postupak, mi u stvari za svaku od trojki $(3,4,5), (6,7,8), \ldots (33,34,35)$ dobijamo da se prva dva elementa trojke mogu rasporediti na dva načina, a trećem elementu je određena pozicija. Naravno, na kraju ćemo dobiti da se broj 36 mora nalaziti u posljednjem kvadratiću 12. reda. Kako imamo 11 trojki, a u svakoj nezavisno biramo kako ćemo upisati prva dva elementa, to je broj načina da se upišu brojevi jednak $2^{11} = 2048$.

Šema bodovanja:

1 bod: zaključak da je pozicija brojeva 1 i 2 određena (ili 35 i 36)
2 boda: zaključak da za brojeve 3 i 4, ili brojeve 33 i 34 postoje dva moguća načina raspoređivanja
1 bod: zaključak da je pozicija broja 5 određena
3 boda: zaključak da se proces može nastaviti i za ostale trojke, te da za svaku postoje dvije opcije
3 boda: dobijanje tačnog rezutata

Napomena:
Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.