Izborno takmičenje za IMO i BMO – rješenja zadataka

Banja Luka / Sarajevo, 17.6.2021.

1. Naći sve funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x, y vrijedi

$$f(x^2) \cdot f(y^2) + |x| \cdot f(-xy^2) = 3 \cdot |y| \cdot f(x^2 y).$$

Rješenje:

Označimo sa $P(x, y)$ iskaz $f(x^2) \cdot f(y^2) + |x| \cdot f(-xy^2) = 3 \cdot |y| \cdot f(x^2 y)$. Iz $P(0,0)$ dobijamo da je $f(0)^2 = 0$, tj. $f(0) = 0$. Poređenjem $P(x, y)$ sa $P(x, -y)$ za $y \neq 0$ dobijamo da je $f(x^2 y) = f(-x^2 y)$, pa uvrštavanjem $x = 1$ dobijamo $f(y) = f(-y)$ za sve realne brojeve y (jer ova jednakost vrijedi i za $y = 0$), tj. funkcija f je parna. Sada u iskazu $P(x, y)$ možemo $f(-xy^2)$ zamijeniti sa $f(xy^2)$. Poređenjem $P(x, y)$ i $P(y, x)$ dobijamo da je $|x| \cdot f(xy^2) = |y| \cdot f(x^2 y)(*)$ za sve realne brojeve x, y.

Sada iskaz $P(x, y)$ postaje $f(x^2) \cdot f(y^2) = 2 \cdot |x| \cdot f(xy^2)$. Iz $P(1, y)$ dobijamo da je $f(1) \cdot f(y^2) = 2 \cdot f(y^2)$. Dakle, ili je $f(y^2) = 0$ za sve realne brojeve y ili je $f(1) = 2$. Ako je $f(y^2) = 0$ za sve realne brojeve y, onda je zbog parnosti funkcije f, $f(x) = 0$ za sve realne brojeve x.

Pretpostavimo sada da je $f(1) = 2$. Uvrštavanjem $x > 0$ i $y = \frac{1}{x^2}$ u $(*)$ dobijamo da je $f\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3} \cdot f(1) = \frac{2}{x^3}$, a kako $\frac{1}{x^3}$ prolazi kroz cijeli skup pozitivnih realnih brojeva, imamo da je $f(x) = 2x = f(-x)$ za sve nenegativne realne brojeve (pošto za $x = 0$ ovo također vrijedi), tj. $f(x) = 2 \cdot |x|$ za sve realne brojeve x.

Dakle, jedina dva rješenja su $f(x) = 0$ i $f(x) = 2 \cdot |x|$ za sve realne brojeve x. Lako provjeravamo da ove funkcije zaista zadovoljavaju uslove zadatke.

2. Polinom $P(x)$ sa cjelobrojnim koeficijentima zovemo jednostavan ako su svi njegovi koeficijenti iz skupa $\{-1,0,1\}$. Neka je $n>1$ prirodan broj. Odrediti najmanji mogući broj nenultih koeficijenata jednostavnog polinoma $P(x)$ stepena n takvog da za sve cijele brojeve t vrijedi $n|P(t)$.

Rješenje:

Samo jedan nenulti koeficijent nam nije dovoljan, jer bismo u tom slučaju imali polinom $P(x)=x^n$ ili $P(x)=-x^n$, a u oba slučaja $n\nmid P(1)$.

Dokazaćemo da polinom $P(x)=x^n-x^{n-\varphi(n)}$, gdje je φ Ojlerova fi funkcija ($\varphi(n)$ je broj prirodnih brojeva ne većih od n, koji su uzajamno prosti sa n) ispunjava navedeni uslov, čime ćemo pokazati da je minimalni broj nenultih koeficijenata 2.

Neka je $t\in\mathbb{Z}$ i neka je $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{\alpha_m}$ kanonska forma broja n, pri čemu možemo pretpostaviti, bez gubitka opštosti, da je t djeljiv prostim brojevima $p_1,\ldots,p_l$, a da nije djeljiv prostim brojevima $p_{l+1},\ldots,p_m$. Neka je $u=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_l^{\alpha_l}$ i $v=p_{l+1}^{\alpha_{l+1}}\cdot\ldots\cdot p_m^{\alpha_m}$. Pokažimo da $u|t^{n-\varphi(n)}$ i $v|t^{\varphi(n)}-1$. Kako je $n=uv$, time će biti dokazano da $n|P(t)$, jer je $P(t)=t^n-t^{n-\varphi(n)}=t^{n-\varphi(n)}\cdot\left(t^{\varphi(n)}-1\right)$.

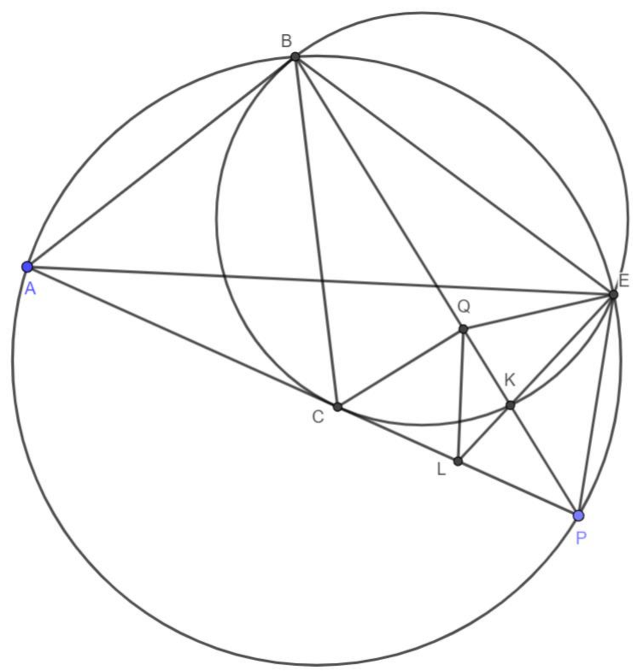
Za dokaz da $u|t^{n-\varphi(n)}$, dovoljno je dokazati da $p_i^{\alpha_i}|t^{n-\varphi(n)}$, za svako $i=1,\ldots,l$, odnosno da je $\alpha_i\leq\ n-\varphi(n)$ (jer po pretpostavci $p_i|t$), a to vrijedi zato što su $p_i,p_i^2,\ldots,p_i^{\alpha_1}$ djelioci broja n pa dakle postoji barem α_i prirodnih brojeva ne većih od n koji nisu uzajamno prosti sa n.

Na osnovu Ojlerove teoreme vrijedi da $v|t^{\varphi(v)}-1$, jer su v i t uzajamno prosti. Kako su i u i v takođe uzajamno prosti, to vrijedi da je $\varphi(n)=\varphi(uv)=\varphi(u)\varphi(v)$, pa $t^{\varphi(v)}-1|t^{\varphi(n)}-1$, odakle slijedi da $v|t^{\varphi(n)}-1$. Ovim je dokaz kompletiran.

3. Neka je A tačka van kružnice k, a AB i AC su tangente te kružnice (B i C su tačke dodira). Na produžetku AC preko C je data tačka P. Kružnica opisana oko trougla ΔABP siječe k ponovo u E. Na duži BP se nalazi tačka Q takva da je $\angle PEQ = 2 \cdot \angle APB$. Dokazati da je CQ okomito na BP.

Rješenje:

Označimo ugao $\measuredangle APB = x$, tada je $\measuredangle PEQ = 2x$. Iz tetivnosti je $\measuredangle BEP = 180° - \measuredangle BAP$. Neka je tačka K drugi presjek kružnice k i duži BP. Imamo da je $\measuredangle BEK = \measuredangle ABK$ (ugao između tangente i tetive), pa dobijamo da je $\measuredangle KEP = \measuredangle BEP - \measuredangle BEK = 180° - \measuredangle BAP - \measuredangle ABK = \measuredangle APB = x$ (zadnja jednakost slijedi iz trougla APB). Pošto je $\measuredangle PEQ = 2x$, zaključujemo da je $\measuredangle QEK = \measuredangle KEP = x$, tj. EK je simetrala ugla $\measuredangle QEP$.



Produžimo EK do presjeka sa AP i označimo tu tačku presjeka sa L. Pošto je $\measuredangle QEL = \measuredangle QPL = x$, zaključujemo da je četverougao $LPEQ$ tetivan. Kako je EL simetrala ugla QEP, to onda zaključujemo da je $QL = LP$. Pošto je $\measuredangle LPK = \measuredangle PEK = x$, tj. LP je tangenta na kružnicu opisanu oko trougla KPE, iz potencije imamo da je $LP^2 = LK \cdot LE$. Kako je $LK \cdot LE$ ujedno i potencija tačke L na kružnicu k to vrijedi $LK \cdot LE = LC^2$ (pošto je LC tangenta na kružnicu k). Sada zaključujemo da je $LP = LQ = LC$, pa je trougao CQP pravougli, tj. $CQ \perp BP$, $q.e.d.$

4. Data je riječ $w_1 w_2 \dots w_n$ u kojoj se slova mogu ponavljati, ali ne postoji više od 10 različitih slova. Dokazati da je moguće svakom slovu dodijeliti neku cifru (različitim slovima odgovaraju različite cifre, a istim iste) tako da je broj koji se dobije kada slova zamijenimo sa odgovarajućim ciframa djeljiv sa 9 (taj broj ne smije počinjati sa 0).

Rješenje:

Kako je broj djeljiv sa 9 ako i samo ako mu je zbir cifara djeljiv sa 9, redoslijed cifara nije bitan. Zato bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je riječ oblika

$$W = a_1 a_1 \dots a_1 a_2 a_2 \dots a_2 \dots a_{10} a_{10} \dots a_{10},$$

pri čemu su $a_1, a_2, \dots a_{10}$ slova. Neka se slovo a_i pojavljuje $b_i \in \mathbb{N}_0$ puta, za $i = 1, \dots 10$. Tada ova riječ ima dužinu $l = b_1 + b_2 + \cdots + b_{10}$. Također, možemo se osloboditi zahtjeva da broj ne počinje cifrom 0. Naime, ukoliko dobijemo broj koji počinje sa 0, dovoljno je u njemu zamijeniti sve cifre 0 sa 9 i obratno.

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po dužini riječi (za $l = 1$ tvrdnja očigledno vrijedi). Razlikujemo dva slučaja:

1° $b_1 \equiv b_2 \equiv \cdots \equiv b_{10} \equiv l \ (mod\ 3)$. Stavimo $u_i = \frac{b_i - r}{3}$ gdje je r ostatak pri dijeljenju l sa 3. Po induktivnoj pretpostavci, postoji zamjena slova $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ ciframa za riječ

$$W' = a_1 a_1 \dots a_1 a_2 a_2 \dots a_2 \dots a_{10} a_{10} \dots a_{10},$$

gdje se a_i pojavljuje u_i puta. Tada vrijedi $S(W) = 3 \cdot S(W') + (0 + 1 + \cdots + 9) \cdot r = 3 \cdot S(W') + 45 \cdot r$, gdje je $S(W)$ suma cifara riječi W nakon zamjene slova ciframa. Dakle, kako $9 | S(W')$, to $9 | S(W)$.

2° Postoji i takvo da je $b_i \not\equiv l \ (mod\ 3)$. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da $k = l - b_{10} = b_1 + \cdots + b_9$ nije djeljivo sa 3. Posmatrajmo sume

$$\begin{gathered} s_1 = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 2 + \cdots + b_8 \cdot 8 + b_9 \cdot 9 \\ s_2 = b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 3 + \cdots + b_8 \cdot 9 + b_9 \cdot 1 \\ \dots \\ s_9 = b_1 \cdot 9 + b_2 \cdot 1 + \cdots + b_8 \cdot 7 + b_9 \cdot 8 \end{gathered}$$

Sve ove sume predstavljaju sumu cifara riječi W nakon zamjene slova $a_1, a_2, \dots a_9$ ciframa $1, 2, \dots, 9$ u nekom poretku i slova a_{10} cifrom 0. Očigledno je $s_i \equiv s_1 + (i-1)(b_1 + \cdots + b_9) \equiv s_1 + (i-1)k \ (mod\ 9)$ za sve i. Kako 3 ne dijeli k, to $s_1, s_2, \dots, s_9$ čini potpun sistem ostataka po mod 9. Dakle, $9 | S_i$ za neko $i. q. e. d.$