26. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BIH

Banja Luka / Sarajevo, 13.6.2021.

Jezik: bosanski

Napomena: Zadaci nisu poredani po težini, nego po oblastima, i to redom algebra, teorija brojeva, geometrija i kombinatorika.

1. Neka su x, y, z realni brojevi iz intervala $[0,1]$. Odrediti maksimalnu vrijednost izraza

$$W = y \cdot \sqrt{1-x} + z \cdot \sqrt{1-y} + x \cdot \sqrt{1-z}.$$

Rješenje:

Uvedimo smjene: $a = \sqrt{1-x}$, $b = \sqrt{1-y}$, $c = \sqrt{1-z}$, pri čemu vrijedi da $a, b, c \in [0, 1]$. Nakon tih smjena izraz postaje

$$W = a(1-b^2) + b(1-c^2) + c(1-a^2).$$

Ako je $a = 0$, tada je $W = (1-c^2)b + c \leq 1 - c^2 + c = \frac{5}{4} - \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4}$. Analogno se pokaže da ako je $b = 0$ ili $c = 0$ također vrijedi da je $W \leq \frac{5}{4}$. Vrijednost $\frac{5}{4}$ se može dostići npr. za $a = 0, b = 1, c = \frac{1}{2}$, tj. $x = 1, y = 0, z = \frac{3}{4}$.

Ako je $a = 1$, slično je $W = 1 - b^2 + b(1-c^2) \leq 1 - b^2 + b \leq \frac{5}{4}$. Analogno se pokaže da ako je $b = 1$ ili $c = 1$ također vrijedi da je $W \leq \frac{5}{4}$.

Neka je $W = f(a,b,c)$ i pretpostavimo da je $W_{max} = f(a_1, b_1, c_1) > \frac{5}{4}$, pri čemu su $a_1, b_1, c_1 \in (0, 1)$.

Posmatrajmo

$$g(a) = -c_1 a^2 + (1 - b_1^2)a + b_1(1 - c_1^2) + c_1.$$

Ovo je parabola koja maksimum na intervalu $[0,1]$ dostiže u tjemenu ili na krajevima intervala. Kako $a_1 \notin \{0,1\}$, to mora vrijediti $a_1 = \frac{1-b_1^2}{2c_1}$ (inače bi mogli odabrati $a_2 \in (0,1)$ tako da vrijedi $f(a_2, b_1, c_1) > f(a_1, b_1, c_1)$, što je kontradikcija). Dakle, $2a_1c_1 = 1 - b_1^2$ (1).

Analogno se dobije da mora vrijediti $2a_1b_1 = 1 - c_1^2$ (2) i $2b_1c_1 = 1 - a_1^2$ (3).

Sabiranjem ovih jednačina dobijamo $(a_1 + b_1 + c_1)^2 = 3$, tj. $a_1 + b_1 + c_1 = \sqrt{3}$. Oduzimanjem druge jednačine od prve dobijamo da je $2a_1(c_1 - b_1) = (c_1 - b_1)(c_1 + b_1)$, odakle je $c_1 = b_1$ ili $2a_1 = c_1 + b_1$. Analogno dobijamo $a_1 = b_1$ ili $2c_1 = a_1 + b_1$. Ako je $c_1 = b_1$, onda bilo koja od jednačina $a_1 = b_1$ ili $2c_1 = a_1 + b_1$ povlači $a_1 = b_1 = c_1$. Ako je

$2a_1 = c_1 + b_1$, također bilo koja od jednačina $a_1 = b_1$ ili $2c_1 = a_1 + b_1$ povlači $a_1 = b_1 = c_1$. Dakle, $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Međutim, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} < \frac{5}{4}$. Dakle, maksimum traženog izraza je $\frac{5}{4}$.

Primjedba: Maksimum funkcije $f(a, b, c)$, pri čemu $a, b, c \in [0,1]$, postoji jer je funkcija neprekidna i definisana na zatvorenoj kocki, pa se zbog toga moglo pretpostaviti da postoji $W_{max} = f(a_1, b_1, c_1)$.

2. Neka je $p > 2$ prost broj. Dokazati da postoji permutacija $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$ brojeva $1,2, \dots, p-1$ takva da je broj $1^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + (p-1)^{k_{p-1}}$ djeljiv sa p.

Napomena: Brojevi $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$ su permutacija brojeva $1,2, \dots, p-1$ ako se svaki od brojeva $1,2, \dots, p-1$ pojavljuje tačno jednom među brojevima $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$.

Rješenje:

Označimo sa $p' = \frac{p-1}{2}$. Primijetimo najprije da zbog Male Fermaove teoreme za proizvoljan broj $a \in \{1,2, \dots, p-1\}$ vrijedi $0 \equiv a^{p-1} - 1 = (a^{p'} - 1)(a^{p'} + 1)(mod\, p)$, pa kako je p prost broj, vrijedi $a^{p'} \equiv 1(mod\, p)$ ili $a^{p'} \equiv -1(mod\, p)$.

Dokazat ćemo da je za svaki broj $a \in \{1,2, \dots, p'\}$ moguće odabrati par $(i, j), i, j \in \{1,2, \dots, p-1\}$ takav da vrijedi $|i - j| = p'$ i $a^i + (p-a)^j \equiv 0(mod\, p)$, pri čemu su svi ti parovi disjunktni. Iz ove tvrdnje očigledno slijedi tvrdnja zadatka.

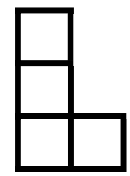
Neka je $p = 4k - 1, k \in \mathbb{N}$. Tada je p' neparan broj, pa vrijedi $a^{p'} \equiv -(p-a)^{p'}(mod\, p)$, tj. jedan od brojeva $a^{p'}, (p-a)^{p'}$ je kongruentan 1, a drugi -1 po modulu p. Uzmimo proizvoljan broj $i \in \{1,2, \dots, p'\}$. Ako je i neparan broj, onda je $a^i \equiv -(p-a)^i\ (mod\, p)$, pa ako je $a^{p'} \equiv 1(mod\, p)$, onda je $a^{i+p'} + (p-a)^i \equiv 0\ (mod\, p)$, a u suprotnom je $(p-a)^{p'} \equiv 1(mod\, p)$, odakle je $a^i + (p-a)^{i+p'} \equiv 0(mod\, p)$. Slično, ako je i paran broj, zbog $a^i \equiv (p-a)^i\ (mod\, p)$ u slučaju $(p-a)^{p'} \equiv -1(mod\, p)$ vrijedi $a^i + (p-a)^{i+p'} \equiv 0(mod\, p)$, a u slučaju $a^{p'} \equiv -1(mod\, p)$ vrijedi $a^{i+p'} + (p-a)^i \equiv 0\ (mod\, p)$. Na ovaj način očigledno možemo konstruisati tražene parove.

Neka je $p = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$. Tada je p' paran broj, pa vrijedi $a^{p'} \equiv (p-a)^{p'}(mod\, p)$. Ako posmatramo slično kao u prethodnom slučaju, primijetimo da brojeve a za koje vrijedi $a^{p'} \equiv 1(mod\, p)$, traženo uparivanje možemo konstruisati samo ukoliko je i (a samim tim i j) neparan broj, a za brojeve a za koje vrijedi $a^{p'} \equiv -1(mod\, p)$, traženo uparivanje možemo konstruisati samo ukoliko je i (a samim tim i j) paran broj. Kako je jednak broj parnih i neparnih brojeva u skupu $\{1,2, \dots, p'\}$, dovoljno je dokazati da je jednak broj brojeva $a \in \{1,2, \dots, p'\}$ takvih da vrijedi $a^{p'} \equiv 1(mod\, p)$ kao i onih za koje vrijedi $a^{p'} \equiv -1(mod\, p)$. Po Ojlerovom kriteriju vrijedi $a^{p'} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)(mod\, p)$, pa je dovoljno dokazati da postoji jednak broj kvadratnih ostataka i neostataka u skupu $\{1,2, \dots, p'\}$. Kako je

$p \equiv 1(mod\ 4)$ to je $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{-a}{p}\right)$, pa je dovoljno dokazati da je jednak broj kvadratnih ostataka i neostataka u skupu $\{1,2,\dots,p-1\}$, što se lako dokazuje (jer za $x, y \in \{1,2,\dots,p-1\}, x \neq y$ iz $x^2 \equiv y^2(mod\ p)$ slijedi $p|(x-y)(x+y)$, tj. $x = p - y$, pa imamo tačno $\frac{p-1}{2}$ kvadratnih ostataka).

3. Zadatak će naknadno biti objavljen u elektronskom obliku.

4. Figuru u obliku slova L sastavljenu od 4 jedinična kvadrata (kao što je prikazano na slici) nazivamo *L-domina*. Odrediti maksimalan broj L-domina koje je moguće postaviti na tablu dimenzija $n \times n$, gdje je n prirodan broj, tako da se nikoje dvije domine ne preklapaju i da je moguće doći od gornjeg lijevog do donjeg desnog ugla table krećući se samo preko onih kvadrata koji nisu prekriveni dominama. (Kretanjem možemo preći sa nekog kvadrata na njemu susjedni kvadrat, tj. kvadrat sa kojim dijeli stranicu).

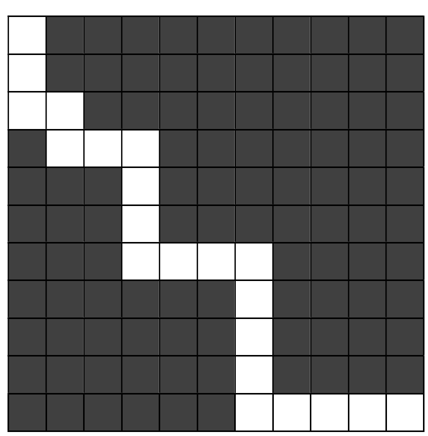


Napomena: L-domine mogu da se rotiraju, kao i da se *prevrnu*, čime se dobija osno simetrična figura u odnosu na ovu koja je prikazana na slici.

Rješenje:

Svaki put od gornjeg desnog do donjeg lijevog polja ploče sadrži barem $n-1$ horizontalnih i barem $n-1$ vertikalnih koraka, pa sadrži barem $2n-1$ polja. Dakle, L-domine ne smiju pokriti više od $n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$ polja, pa broj postavljenih L-domina ne prelazi $\left\lfloor\frac{(n-1)^2}{4}\right\rfloor$, odnosno $\frac{(n-1)^2}{4}$ za neparno n te $\frac{n^2-2n}{4}$ za parno n.

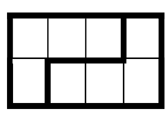
Dokažimo da se za $n \equiv 3\ (mod\ 4)$ ne može na ploču postaviti $\frac{(n-1)^2}{4}$ L-domina tako da je uslov zadovoljen. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji tačno $2n-1$ slobodnih polja, što je najmanji broj polja koji put od jednog ugaonog polja ploče do suprotnog može imati. Taj broj se dostiže ako i samo ako svi koraci na tom putu prelaze ili u desnog ili u donjeg susjeda.



Dakle, ploča ima jedan slobodan put dužine $2n-1$, a sva ostala polja su pokrivena L-dominom (kao u primjeru na slici iznad, gdje su zauzeta polja osjenčena). Put dijeli ploču na dva dijela (pri čemu jedan od dijelova može imati 0 polja). Primijetimo da pomjeranjem svih kvadratića gornjeg dijela za jedno mjesto dijagonalno (dole-lijevo) dobijamo ploču dimenzija $(n-1)\times(n-1)$ sastavljenu od zauzetih polja. Naime, na taj način ostaju prazni prvi red i zadnja kolona, a očigledno ne može doći do preklapanja između gornjeg i donjeg dijela ili izlaženja sa ploče. Budući da su oba dijela popločana L-dominama, i dobijena ploča $(n-1)\times(n-1)$ je popločana L-dominama. Dokazat ćemo da je to nemoguće.

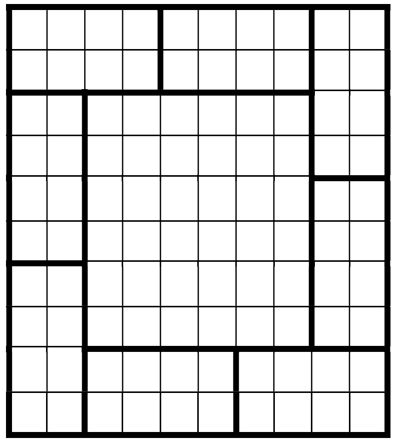
Obojimo polja parnih redova ploče crnom bojom, a neparnih bijelom. Tada svaka L-domina pokriva 3 crna i jedno bijelo (ovakve L-domine nazovimo *tip 1*) ili 3 bijela i jedno crno polje (ovakve L-domine nazovimo *tip 2*). Kako je $n\equiv 3\ (mod\ 4)$, to je $n-1\equiv 2\ (mod\ 4)$, pa ima jednak broj crnih i bijelih polja u svakom redu, a samim tim i ukupno. Slijedi da u popločavanju postoji jednak broj L-domina tipa 1 i tipa 2, pa je ukupni broj L-domina paran. S druge strane, ukupni broj domina je $\frac{(n-1)^2}{4}$ što je za $n-1\equiv 2\ (mod\ 4)$ neparan broj. Dakle, pretpostavka da je za $n\equiv 3\ (mod\ 4)$ moguće postaviti $\frac{(n-1)^2}{4}$ L-domina dovela je do kontradikcije, pa je netačna. Zato se u ovom slučaju ne može postaviti više od $\frac{(n-1)^2}{4}-1$ L-domina.

Dokazat ćemo da je moguće postaviti $\frac{n^2-2n}{4}$ L-domina za parno n, $\frac{(n-1)^2}{4}$ L-domina za $n\equiv 1\ (mod\ 4)$ i $\frac{(n-1)^2}{4}-1$ L-domina za $n\equiv 3\ (mod\ 4)$, i to tako da je slobodan put koji se sastoji od prve kolone i zadnjeg reda ploče. Primijetimo najprije da dvije L-domine mogu pokriti 2×4 pravougaonik:



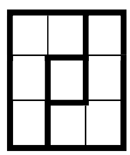
Za $n\equiv 1\ (mod\ 4)$ gornja desna $(n-1)\times(n-1)$ ploča može se podijeliti na 2×4 pravougaonike, pa se može popločati L-dominama.

Za $n\equiv 3\ (mod\ 4)$ gornja desna $(n-1)\times(n-1)$ ploča može biti popločana tako da je centralni 2×2 kvadrat slobodan, a ostala polja pokrivena. Za $n=3$ ovo je trivijalno. Za $n>3$, kako je $n-1\equiv 2(mod\ 4)$ moguće je popločati okvir ploče širine 2 polja na sljedeći način (na slici su označeni 2×4 pravougaonici koji se L-dominama popločavaju na već opisani način):

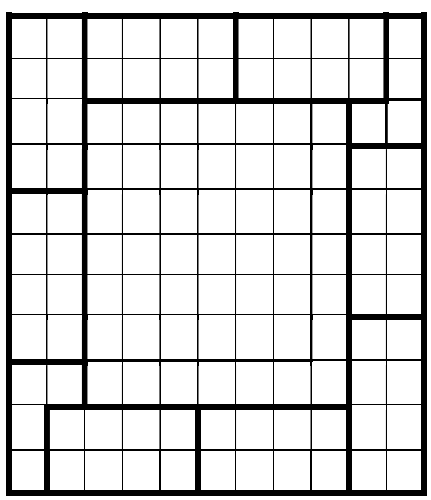


Na ovaj način nepopločani dio ima dimenzije za 4 manje od početne ploče, pa se postupak može nastaviti dok u centru ne ostane ploča 2×2.

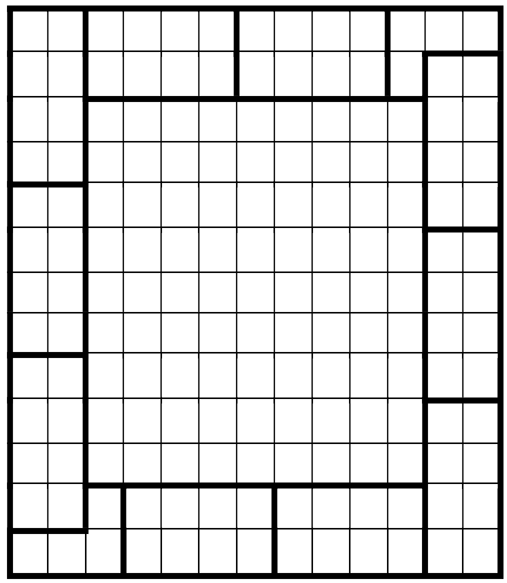
Za parno n moguće je popločati gornju desnu $(n-1) \times (n-1)$ ploču tako da samo centralno polje ostane slobodno. Za $n = 2$ ovo je trivijalno, a za $n = 4$ to možemo uraditi na sljedeći način:



Za $n \equiv 0 \ (mod\ 4)$ je $n - 1 \equiv 3 (mod\ 4)$ pa se okvir može popločati na sljedeći način:



Nepopločani dio ima dimenzije za 4 manje od početne ploče, pa se postupak može nastaviti dok u centru ne ostane ploča 3×3 koja se popločava na ranije opisani način. Za $n \equiv 2\ (mod\ 4)$ je $n - 1 \equiv 1 (mod\ 4)$ pa se okvir može popločati na sljedeći način:



Slično kao u prethodnim slučajevima, postupak je moguće nastaviti dok se ne dobije samo jedno slobodno polje u centru.

26. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БИХ

Бања Лука / Сарајево, 13.6.2021.

Језик: српски

Напомена: Задаци нису поредани по тежини, него по областима, и то редом алгебра, теорија бројева, геометрија и комбинаторика.

1. Нека су x, y, z реални бројеви из интервала $[0,1]$. Одредити максималну вриједност израза

$$W = y \cdot \sqrt{1-x} + z \cdot \sqrt{1-y} + x \cdot \sqrt{1-z}.$$

Рјешење:

Уведимо смјене: $a = \sqrt{1-x}$, $b = \sqrt{1-y}$, $c = \sqrt{1-z}$, при чему вриједи да $a, b, c \in [0, 1]$. Након тих смјена израз постаје

$$W = a(1-b^2) + b(1-c^2) + c(1-a^2).$$

Ако је $a = 0$, тада је $W = (1-c^2)b + c \leq 1 - c^2 + c = \frac{5}{4} - \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4}$. Аналогно се покаже да ако је $b = 0$ или $c = 0$ такођер вриједи да је $W \leq \frac{5}{4}$. Вриједност $\frac{5}{4}$ се може достићи нпр. за $a = 0, b = 1, c = \frac{1}{2}$, тј. $x = 1, y = 0, z = \frac{3}{4}$.

Ако је $a = 1$, слично је $W = 1 - b^2 + b(1-c^2) \leq 1 - b^2 + b \leq \frac{5}{4}$. Аналогно се покаже да ако је $b = 1$ или $c = 1$ такођер вриједи да је $W \leq \frac{5}{4}$.

Нека је $W = f(a, b, c)$ и претпоставимо да је $W_{max} = f(a_1, b_1, c_1) > \frac{5}{4}$, при чему су $a_1, b_1, c_1 \in (0, 1)$.

Посматрајмо

$$g(a) = -c_1 a^2 + (1 - b_1^2)a + b_1(1 - c_1^2) + c_1.$$

Ово је парабола која максимум на интервалу $[0,1]$ достиже у тјемену или на крајевима интервала. Како $a_1 \notin \{0,1\}$, то мора вриједити $a_1 = \frac{1-b_1^2}{2c_1}$ (иначе би могли одабрати $a_2 \in (0,1)$ тако да вриједи $f(a_2, b_1, c_1) > f(a_1, b_1, c_1)$, што је контрадикција). Дакле, $2a_1c_1 = 1 - b_1^2$ (1).

Аналогно се добије да мора вриједити $2a_1b_1 = 1 - c_1^2$ (2) и $2b_1c_1 = 1 - a_1^2$ (3).

Сабирањем ових једначина добијамо $(a_1 + b_1 + c_1)^2 = 3$, тј. $a_1 + b_1 + c_1 = \sqrt{3}$. Одузимањем друге једначине од прве добијамо да је $2a_1(c_1 - b_1) = (c_1 - b_1)(c_1 +$

b_1), одакле је $c_1 = b_1$ или $2a_1 = c_1 + b_1$. Аналогно добијамо $a_1 = b_1$ или $2c_1 = a_1 + b_1$. Ако је $c_1 = b_1$, онда било која од једначина $a_1 = b_1$ или $2c_1 = a_1 + b_1$ повлачи $a_1 = b_1 = c_1$. Ако је $2a_1 = c_1 + b_1$, такођер било која од једначина $a_1 = b_1$ или $2c_1 = a_1 + b_1$ повлачи $a_1 = b_1 = c_1$. Дакле, $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Међутим, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} < \frac{5}{4}$. Дакле, максимум траженог израза је $\frac{5}{4}$.

Примједба: Максимум функције $f(a, b, c)$, при чему $a, b, c \in [0,1]$, постоји јер је функција непрекидна и дефинисана на затвореној коцки, па се због тога могло претпоставити да постоји $W_{max} = f(a_1, b_1, c_1)$.

2. Нека је $p > 2$ прост број. Доказати да постоји пермутација $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$ бројева $1,2, \dots, p-1$ таква да је број $1^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + (p-1)^{k_{p-1}}$ дјељив са p.
Напомена: Бројеви $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$ су пермутација бројева $1,2, \dots, p-1$ ако се сваки од бројева $1,2, \dots, p-1$ појављује тачно једном међу бројевима $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$.

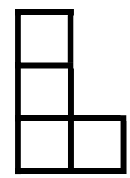
Рјешење:

Означимо са $p' = \frac{p-1}{2}$. Примијетимо најприје да због Мале Фермаове теореме за произвољан број $a \in \{1,2, \dots, p-1\}$ вриједи $0 \equiv a^{p-1} - 1 = (a^{p'} - 1)(a^{p'} + 1)(mod\ p)$, па како је p прост број, вриједи $a^{p'} \equiv 1(mod\ p)$ или $a^{p'} \equiv -1(mod\ p)$.
Доказат ћемо да је за сваки број $a \in \{1,2, \dots, p'\}$ могуће одабрати пар $(i, j), i, j \in \{1,2, \dots, p-1\}$ такав да вриједи $|i-j| = p'$ и $a^i + (p-a)^j \equiv 0(mod\ p)$, при чему су сви ти парови дисјунктни. Из ове тврдње очигледно слиједи тврдња задатка.
Нека је $p = 4k-1, k \in \mathbb{N}$. Тада је p' непаран број, па вриједи $a^{p'} \equiv -(p-a)^{p'}(mod\ p)$, тј. један од бројева $a^{p'}, (p-a)^{p'}$ је конгруентан 1, а други -1 по модулу p. Узмимо произвољан број $i \in \{1,2, \dots, p'\}$. Ако је i непаран број, онда је $a^i \equiv -(p-a)^i\ (mod\ p)$, па ако је $a^{p'} \equiv 1(mod\ p)$, онда је $a^{i+p'} + (p-a)^i \equiv 0\ (mod\ p)$, а у супротном је $(p-a)^{p'} \equiv 1(mod\ p)$, одакле је $a^i + (p-a)^{i+p'} \equiv 0(mod\ p)$. Слично, ако је i паран број, због $a^i \equiv (p-a)^i\ (mod\ p)$ у случају $(p-a)^{p'} \equiv -1(mod\ p)$ вриједи $a^i + (p-a)^{i+p'} \equiv 0(mod\ p)$, а у случају $a^{p'} \equiv -1(mod\ p)$ вриједи $a^{i+p'} + (p-a)^i \equiv 0\ (mod\ p)$. На овај начин очигледно можемо конструисати тражене парове.
Нека је $p = 4k+1, k \in \mathbb{N}$. Тада је p' паран број, па вриједи $a^{p'} \equiv (p-a)^{p'}(mod\ p)$. Ако посматрамо слично као у претходном случају, примијетимо да бројеве a за које вриједи $a^{p'} \equiv 1(mod\ p)$, тражено упаривање можемо конструисати само уколико је i (а самим тим и j) непаран број, а за бројеве a за које вриједи $a^{p'} \equiv -1(mod\ p)$, тражено упаривање можемо конструисати само уколико је i (а самим тим и j) паран број. Како је једнак број парних и непарних бројева у скупу $\{1,2, \dots, p'\}$, довољно је доказати да је једнак број бројева $a \in \{1,2, \dots, p'\}$ таквих да

вриједи $a^{p'} \equiv 1(mod\, p)$ као и оних за које вриједи $a^{p'} \equiv -1(mod\, p)$. По Ојлеровом критерију вриједи $a^{p'} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)(mod\, p)$, па је довољно доказати да постоји једнак број квадратних остатака и неостатака у скупу $\{1,2,\ldots,p'\}$. Како је $p \equiv 1(mod\, 4)$ то је $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{-a}{p}\right)$, па је довољно доказати да је једнак број квадратних остатака и неостатака у скупу $\{1,2,\ldots,p-1\}$, што се лако доказује (јер за $x, y \in \{1,2,\ldots,p-1\}, x \neq y$, из $x^2 \equiv y^2(mod\, p)$ слиједи $p|(x-y)(x+y)$, тј. $x = p - y$, па имамо тачно $\frac{p-1}{2}$ квадратних остатака).

3. Задатак ће накнадно бити објављен у електронском облику.

4. Фигуру у облику слова L састављену од 4 јединична квадрата (као што је приказано на слици) називамо *L-домина*. Одредити максималан број L-домина које је могуће поставити на таблу димензија $n \times n$, гдје је n природан број, тако да се никоје двије домине не преклапају и да је могуће доћи од горњег лијевог до доњег десног угла табле крећући се само преко оних квадрата који нису прекривени доминама. (Кретањем прелазимо са неког квадрата на њему сусједни квадрат, тј. квадрат са којим дијели страницу).

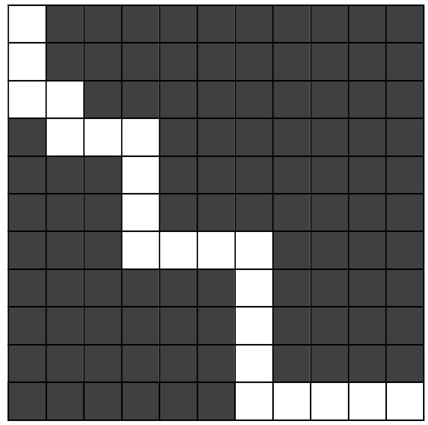


Напомена: L-домине могу да се ротирају, као и да се *преврну*, чиме се добија осно симетрична фигура у односу на ову која је приказана на слици.

Рјешење:

Сваки пут од горњег десног до доњег лијевог поља плоче садржи барем $n-1$ хоризонталних и барем $n-1$ вертикалних корака, па садржи барем $2\text{н}-1$ поља. Дакле, L-домине не смију покрити више од $n^2-(2n-1)=(n-1)^2$ поља, па број постављених L-домина не прелази $\left\lfloor\frac{(n-1)^2}{4}\right\rfloor$, односно $\frac{(n-1)^2}{4}$ за непарно n те $\frac{n^2-2n}{4}$ за парно n.

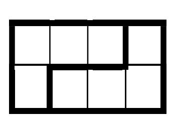
Докажимо да се за $n \equiv 3\ (mod\ 4)$ не може на плочу поставити $\frac{(n-1)^2}{4}$ L-домина тако да је услов задовољен. Претпоставимо супротно. Тада постоји тачно $2n-1$ слободних поља, што је најмањи број поља који пут од једног угаоног поља плоче до супротног може имати. Тај број се достиже ако и само ако сви кораци на том путу прелазе или у десног или у доњег сусједа.



Дакле, плоча има један слободан пут дужине $2n-1$, а сва остала поља су покривена L-домином (као у примјеру на слици изнад, гдје су заузета поља осјенчена). Пут дијели плочу на два дијела (при чему један од дијелова може имати 0 поља). Примијетимо да помјерањем свих квадратића горњег дијела за једно мјесто дијагонално (доле-лијево) добијамо плочу димензија $(n-1)\times(n-1)$ састављену од заузетих поља. Наиме, на тај начин остају празни први ред и задња колона, а очигледно не може доћи до преклапања између горњег и доњег дијела или излажења са плоче. Будући да су оба дијела поплочана L-доминама, и добијена плоча $(n-1)\times(n-1)$ је поплочана L-доминама. Доказат ћемо да је то немогуће.

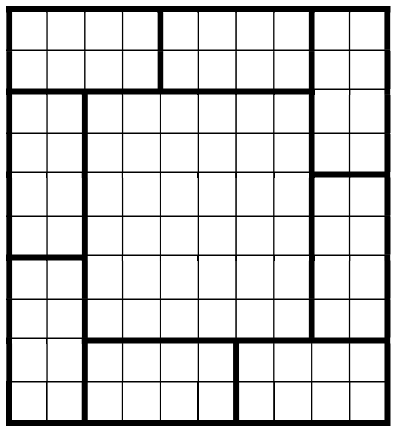
Обојимо поља парних редова плоче црном бојом, а непарних бијелом. Тада свака L-домина покрива 3 црна и једно бијело (овакве L-домине назовимо *тип* 1) или 3 бијела и једно црно поље (овакве L-домине назовимо *тип* 2). Како је $n \equiv 3\ (mod\ 4)$, то је $n-1 \equiv 2\ (mod\ 4)$, па има једнак број црних и бијелих поља у сваком реду, а самим тим и укупно. Слиједи да у поплочавању постоји једнак број L-домина типа 1 и типа 2, па је укупни број L-домина паран. С друге стране, укупни број домина је $\frac{(n-1)^2}{4}$ што је за $n-1 \equiv 2\ (mod\ 4)$ непаран број. Дакле, претпоставка да је за $n \equiv 3\ (mod\ 4)$ могуће поставити $\frac{(n-1)^2}{4}$ L-домина довела је до контрадикције, па је нетачна. Зато се у овом случају не може поставити више од $\frac{(n-1)^2}{4}-1$ L-домина.

Доказат ћемо да је могуће поставити $\frac{n^2-2n}{4}$ L-домина за парно n, $\frac{(n-1)^2}{4}$ L-домина за $n \equiv 1\ (mod\ 4)$ и $\frac{(n-1)^2}{4}-1$ L-домина за $n \equiv 3\ (mod\ 4)$, и то тако да је слободан пут који се састоји од прве колоне и задњег реда плоче. Примијетимо најприје да двије L-домине могу покрити 2×4 правоугаоник:



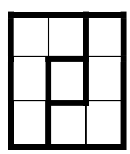
За $n \equiv 1\ (mod\ 4)$ горња десна $(n-1)\times(n-1)$ плоча може се подијелити на 2×4 правоугаонике, па се може поплочати L-доминама.

За $n \equiv 3\ (mod\ 4)$ горња десна $(n-1)\times(n-1)$ плоча може бити поплочана тако да је централни 2×2 квадрат слободан, а остала поља покривена. За $n=3$ ово је тривијално. За $n>3$, како је $n-1\equiv 2 (mod\ 4)$ могуће је поплочати оквир плоче ширине 2 поља на сљедећи начин (на слици су означени 2×4 правоугаоници који се L-доминама поплочавају на већ описани начин):

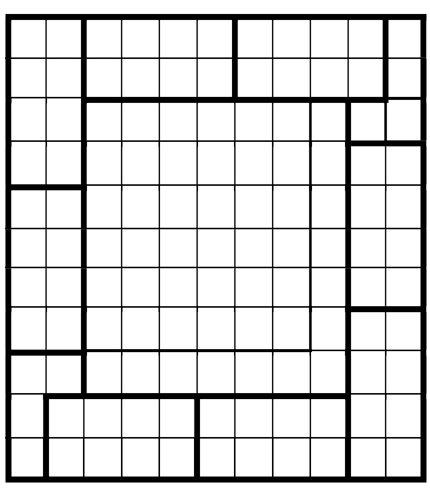


На овај начин непоплочани дио има димензије за 4 мање од почетне плоче, па се поступак може наставити док у центру не остане плоча 2×2.

За парно n могуће је поплочати горњу десну $(n-1)\times(n-1)$ плочу тако да само централно поље остане слободно. За $n=2$ ово је тривијално, а за $n=4$ то можемо урадити на сљедећи начин:

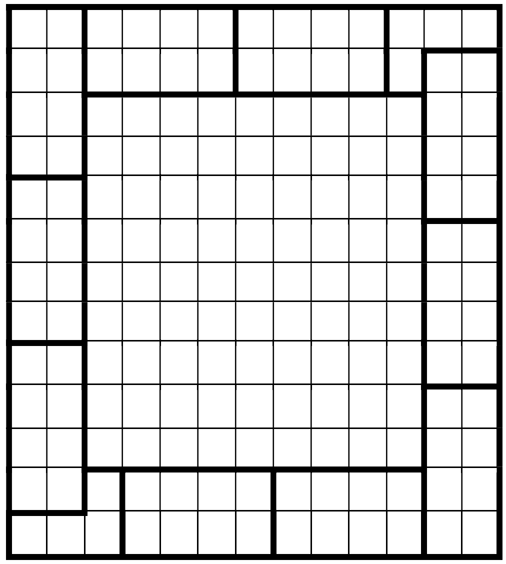


За $n \equiv 0\ (mod\ 4)$ је $n-1\equiv 3\ (mod\ 4)$ па се оквир може поплочати на сљедећи начин:



Непоплочани дио има димензије за 4 мање од почетне плоче, па се поступак може наставити док у центру не остане плоча 3×3 која се поплочава на раније описани начин.

За $n \equiv 2\ (mod\ 4)$ је $n - 1 \equiv 1(mod\ 4)$ па се оквир може поплочати на сљедећи начин:



Слично као у претходним случајевима, поступак је могуће наставити док се не добије само једно слободно поље у центру.