19. JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA BIH

Banja Luka / Sarajevo, 12.6.2021. godine

Rješenja zadataka

1. Odrediti sve realne brojeve a, b, c, d za koje vrijedi

$$ab + c + d = 3,$$
$$bc + d + a = 5,$$
$$cd + a + b = 2,$$
$$da + b + c = 6.$$

Rješenje 1:

Ako saberemo prvu jednačinu sistema sa drugom, a zatim treću sa četvrtom, dobijamo da vrijedi $b(a + c) + a + c + 2d = 8$ i $d(a + c) + a + c + 2b = 8$ $(*)$. Oduzimanjem ove dvije relacije dobijamo $(b - d)(a + c - 2) = 0$. Odavde zaključujemo da je $b = d$ ili da je $a + c = 2$.

Nije moguće da vrijedi $b = d$, jer bi tada imali $5 = bc + d + a = dc + b + a = 2$, što je očigledna kontradikcija. Dakle, mora vrijediti $a + c = 2$.

Uvrštavanjem $a + c = 2$ u neku od relacija iz $(*)$, dobijamo da je $b + d = 3$.

Sabiranjem druge i treće jednačine dobijamo da je $c(b + d) + b + d + 2a = 7$, odnosno da je $3c + 2a = 4$. Zbog $2a + 2c = 2(a + c) = 2 \cdot 2 = 4$, dobijamo $c = 0$, pa je $a = 2$. Sada lako iz druge jednačine sistema dobijamo $d = 3$, odakle je $b = 0$.

Dakle, jedino rješenje sistema je $a = 2, b = 0, c = 0, d = 3$.

Rješenje 2:

Oduzimanjem druge jednačine sistema od prve, te treće jednačine od četvrte dobijamo da vrijedi $(b - 1)(c - a) = 2$ i $(1 - d)(c - a) = 4$. Odavde zaključujemo da je $a \neq c, b \neq 1 \; i \; d \neq 1$, te dobijamo da je $\frac{2}{b-1} = c - a = \frac{4}{1-d}$, što se nakon sređivanja svodi na $2b + d = 3$ $(**)$.

Analogno, oduzimanjem treće jednačine od druge, te prve jednačine od četvrte, nakon sređivanja dobijamo da je $a + c = 2$.

Sabiranjem prve dvije jednačine sistema $2b + 2d = 6$, pa je zbog $(**)$ $d = 3$ i $b = 0$. Sada lako iz prve jednačine sistema dobijamo $c = 0$, pa je $a = 2$.

Dakle, jedino rješenje sistema je $a = 2, b = 0, c = 0, d = 3$.

2. Neka su p, q, r prosti, a t i n prirodni brojevi takvi da vrijedi $p^2 + qt = (p+t)^n$ i $p^2 + qr = t^4$.

a) Dokazati da je $n < 3$.

b) Odrediti sve brojeve p, q, r, t, n koji zadovoljavaju date uslove.

Rješenje:

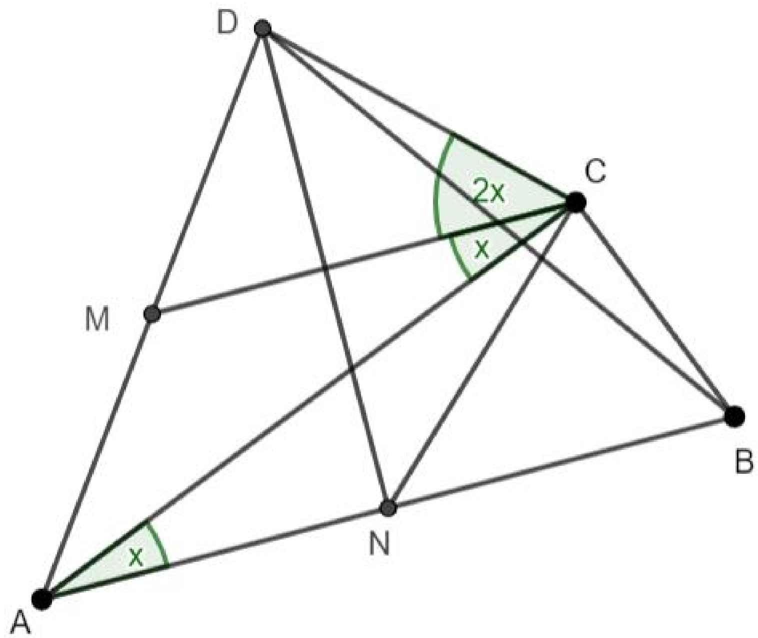
a) Iz druge jednačine je $qr = t^4 - p^2 = (t^2 - p)(t^2 + p)$. Kako su brojevi q i r prosti i vrijedi $t^2 - p < t^2 + p$, to imamo sljedeće slučajeve:
$1°$ $t^2 - p = 1$ i $t^2 + p = qr$.
Iz $p = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$, slijedi da je $t - 1 = 1$ i $t + 1 = p$ (jer je p prost). Dakle, $t = 2$ i $p = 3$. Međutim, tada je $qr = t^2 + p = 7$, što je nemoguće.
$2°$ $t^2 - p = q$ i $t^2 + p = r$
Ako bi vrijedilo $n \geq 3$, tada je $p^3 + 3p^2t + 3pt^2 + t^3 = (p+t)^3 \leq (p+t)^n = p^2 + qt = p^2 + t(t^2 - p) < p^2 + t^3 < p^3 + t^3$, što je očigledno nemoguće.
$3°$ $t^2 - p = r$ i $t^2 + p = q$
Ako bi vrijedilo $n \geq 3$, tada je $p^3 + 3p^2t + 3pt^2 + t^3 = (p+t)^3 \leq (p+t)^n = p^2 + qt = p^2 + t(t^2 + p) = p^2 + t^3 + tp < p^3 + t^3 + pt^2$, što je očigledno nemoguće.
Vidimo da ni u jednom slučaju nije moguće da vrijedi $n \geq 3$, pa je $n < 3$, što je i trebalo dokazati.

b) Za $n = 1$ imamo $p^2 + qt = p + t$, što je nemoguće jer je lijeva strana očigledno veća od desne. Dakle, $n = 2$, tj. $p^2 + qt = (p+t)^2 = p^2 + 2pt + t^2$, odakle imamo $q = 2p + t$. U prvom slučaju smo dobili kontradikciju i bez pretpostavke $n \geq 3$, tako da ćemo provjeriti preostala dva slučaja.
U drugom slučaju je $t^2 - p = q = 2p + t$, pa je $t(t-1) = 3p$. Lijeva strana je proizvod dva uzastopna broja pa je parna, što znači da mora biti $p = 2$, odakle je $t = 3$. Sada je $q = 2p + t = 7$ i $r = t^2 + p = 11$.
U trećem slučaju je $t^2 + p = q = 2p + t$, pa je $t(t-1) = p$. Lijeva strana je proizvod dva uzastopna broja pa je parna, što znači da mora biti $p = 2$, odakle je $t = 2$. Sada je $q = 2p + t = 6$, što nije prost broj, pa ovaj slučaj otpada.
Dakle, jedino rješenje je $p = 2, q = 7, r = 11, t = 3, n = 2$.

3. U konveksnom četverouglu $ABCD$ vrijedi $AD = BD$ i $\angle ACD = 3 \cdot \angle BAC$. Neka je tačka M sredina stranice AD. Ako su prave CM i AB paralelne, dokazati da je $\angle ACB = 90°$.

Rješenje:

Označimo $\angle BAC = x$. Tada je $\angle ACD = 3x$. Kako je zbog uglova na transferzali (jer je $CM || AB$) $\angle MCA = \angle BAC = x$, to je $\angle MCD = \angle ACD - \angle ACM = 2x$ $(*)$.



Neka je N sredina stranice AB. Zbog $AD = BD$ je DN okomito na AB, pa je DN okomito i na CM (jer je $CM || AB$). S druge strane, M je centar opisane kružnice pravouglog trougla ΔAND, pa je $MN = MD$, što znači da je prava CM ustvari simetrala duži DN. Zbog toga je trougao ΔDCN jednakokraki i vrijedi $\angle MCN = \angle MCD = 2x$, pa je $\angle ACN = x$. Međutim, kako je $\angle BAC = x$, to je trougao ΔANC jednakokraki. Dakle, vrijedi $CN = AN = NB$, pa je N centar opisane kružnice trougla ΔABC, odakle slijedi da je taj trougao pravougli sa pravim uglom u vrhu C (periferijski ugao nad prečnikom). Dakle, $\angle ACB = 90°$, što je i trebalo dokazati.

4. Neka je n prirodan broj i neka je $S = \{1,2, \dots, n\}$. Tabela formata $3 \times n$ se zove *lijepa* ako je u nju moguće upisati brojeve iz skupa S tako da su zadovoljeni sljedeći uslovi:

- u svakom redu je svaki broj iz skupa S upisan tačno jednom;
- u svakoj koloni zbir proizvoda po dva broja je djeljiv sa n (tj. ako su u koloni upisani brojevi a, b, c, tada je broj $ab + bc + ca$ djeljiv sa n).

Za koje prirodne brojeve n postoji lijepa tabela, a za koje ne postoji? Odgovor obrazložiti.

Rješenje:

Dokažimo najprije da za parne brojeve n ne postoji *lijepa* tabela. Pretpostavimo suprotno, da za paran broj n postoji lijepa tabela. Neka su a, b, c brojevi u nekoj koloni. Kako vrijedi $n | ab + bc + ca,$ to je broj $ab + bc + ca$ paran. Primijetimo da ako su sva tri broja a, b, c neparni, tada je i broj $ab + bc + ca$ neparan, što je kontradikcija. Također, ako su dva broja neparna (npr. a i b), a treći paran, lako dobijamo da je broj $ab + bc + ca = ab + c(a + b)$ neparan, što je nemoguće. Dakle, u svakoj koloni može biti maksimalno jedan neparan broj, pa ukupno u tabeli ima najviše n neparnih brojeva. Međutim, u svakom redu je jednak broj parnih i neparnih brojeva (po $\frac{n}{2}$), pa ukupno u tabeli imamo $3 \cdot \frac{n}{2}$ neparnih brojeva, a kako je $3 \cdot \frac{n}{2} > n$, dobili smo kontradikciju. Dakle, za parne brojeve ne postoji *lijepa* tabela.

Dokažimo sada da za neparne brojeve $n = 2k + 1$ postoji lijepa tabela. U prvi red upišimo redom brojeve $2k, 2k - 1, \dots, 2, 1, 2k + 1$, a u drugi i treći red ćemo upisati iste brojeve, i to redom $2,4,6, \dots ,2k - 2,2k, 1,3,5, \dots ,2k - 1,2k + 1.$ Primijetimo da je broj u prvom redu i $i -$toj koloni kongruentan $-i$ po modulu $n,$ a broj u drugom (ili trećem) redu i $i -$toj koloni kongruentan $2 \cdot i$ po modulu $n.$ Zbog toga je odgovarajući zbir proizvoda u $i -$toj koloni kongruentan $(-i) \cdot (2i) + (-i) \cdot (2i) + (2i) \cdot (2i) = -2i^2 - 2i^2 + 4i^2 = 0$ po modulu $n.$ Kako ovo vrijedi za svaku kolonu, to je ova tabela *lijepa*, pa za svaki neparan broj postoji *lijepa* tabela.