IX razred

Rješenja zadataka i šema bodovanja

Zadatak 1. Riješiti sistem jednačina u skupu realnih brojeva

$$\frac{1}{15-x}+\frac{(y-5)^2}{2021}=-1$$
$$\frac{(y-5)^2}{2021}+\frac{1}{z^2-2020}=1$$
$$\frac{1}{15-x}+\frac{1}{z^2-2020}=0.$$

Rješenje:

Uvedimo smjenu $\frac{1}{15-x}=a, \frac{(y-5)^2}{2021}=b, \frac{1}{z^2-2020}=c$. Sistem postaje

$$a+b=-1,$$
$$b+c=1,$$
$$c+a=0.$$

Sabiranjem sve tri jednačine ovog sistema dobijemo

$$2(a+b+c)=0,$$

odakle je

$$a+b+c=0.$$

Ako od posljednje jednačine oduzmemo jednačine iz sistema redom dobijemo

$$c=1,$$
$$a=-1,$$
$$b=0.$$

Vraćajući smjenu imamo

$$\frac{1}{15-x}=-1 \Rightarrow x=16,$$
$$\frac{(y-5)^2}{2021}=0 \Rightarrow y=5,$$
$$\frac{1}{z^2-2020}=1 \Rightarrow z=\pm\sqrt{2021}.$$

Rješenja polaznog sistema jednačina su $\left(16,5,\ \sqrt{2021}\right)$ i $\left(16,5,-\sqrt{2021}\right)$.

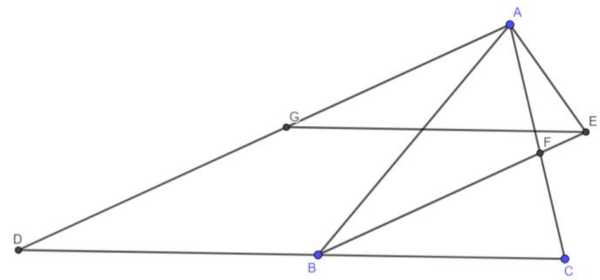
Šema bodovanja:

6 bodova: dobijanje vrijednosti $\frac{1}{15-x}, \frac{(y-5)^2}{2021}, \frac{1}{z^2-2020}$ direktno ili indirektno (1 bod za uvođenje smjene)
2 boda: dobijanje vrijednosti za x i y
2 boda: dobijanje vrijednosti za z

Zadatak 2. U trouglu ΔABC vrijedi $\angle BAC<\angle ACB$. Tačka D je tačka na produžetku stranice $\overline{BC}$ preko vrha B takva da vrijedi $\overline{BD}=\overline{AB}$. Tačka F je tačka presjeka simetrale ugla $\angle ABC$ sa stranicom $\overline{AC}$, a tačka E je tačka na polupravoj BF takva da vrijedi $\angle BAE=\angle ACB$. Tačka G je tačka na duži $\overline{AD}$ takva da vrijedi $EG||BC$. Dokazati da vrijedi $\overline{AG}=\overline{BF}$.

Rješenje:

Označimo uglove $\measuredangle BAC = \alpha, \measuredangle ACB = \gamma$ i $\measuredangle ABC = \beta$. Sada je $\measuredangle ABE = \measuredangle CBE = \frac{\beta}{2}$. Pošto je $\overline{BD} = \overline{BA}$ i $\measuredangle DBA = 180° - \beta$, to je onda i $\measuredangle BDA = \measuredangle BAD = \frac{\beta}{2}$. Kako je $GE||DC$, to je $\measuredangle EGA = \measuredangle CDA = \frac{\beta}{2}$. Sada imamo da je $\measuredangle CBE = \measuredangle CDA = \frac{\beta}{2}$, pa zaključujemo da je $BE||AD$.



Primijetimo sada da je četverougao $DBEG$ paralelogram ($DB||GE$ i $BE||DG$), pa je $\overline{GE} = \overline{DB} = \overline{AB}$. Ako posmatramo trougao ΔGAE, imamo da je

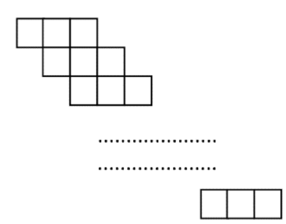
$$\measuredangle GEA = 180° - \measuredangle EGA - \measuredangle EAG = 180° - \frac{\beta}{2} - (\measuredangle EAB + \measuredangle BAG) = 180° - \frac{\beta}{2} - \gamma - \frac{\beta}{2}$$
$$= 180° - \beta - \gamma = \alpha.$$

Sada vidimo da su trouglovi ΔABF i ΔEGA podudarni (na osnovu stava USU, jer je $\overline{AB} = \overline{EG}$, $\measuredangle ABF = \measuredangle EGA = \frac{\beta}{2}$ i $\measuredangle BAF = \measuredangle GEA = \alpha$) iz čega slijedi da je $\overline{BF} = \overline{AG}$, što je i trebalo dokazati.

Šema bodovanja:

Podudarnost trouglova ΔABF i ΔEGA se može dokazati na više načina (npr. moguće je i na osnovu pravila SUS).
6 bodova na pokazivanje jednakosti elemenata odgovarajućih trouglova koji su dovoljni za podudarnost (svaki element po 2 boda)
3 boda za zaključivanje da su trouglovi ΔABF i ΔEGA podudarni
1 bod zaključak jednakosti stranica $\overline{AG} = \overline{BF}$

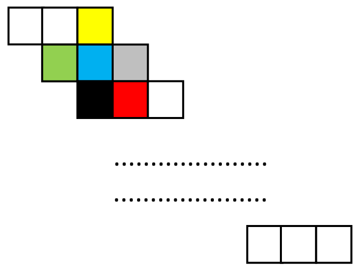
Zadatak 3. Figuru na slici, koja se sastoji od 12 redova sa po 3 kvadratića (ukupno 36 kvadratića), pri čemu je svaki red „pomjeren“ jedno mjesto udesno u odnosu na prethodni, zovemo stepenicama. Na koliko je načina moguće brojeve $1,2,3,\ldots,36$ upisati u kvadratiće od kojih su napravljene stepenice (svaki broj treba upisati tačno jednom), tako da je u svakom kvadratiću upisan jedan broj i da za svaki kvadratić vrijedi da je broj upisan u njemu manji i od broja u kvadratiću koji je desno od njega (ukoliko takav kvadratić postoji) i od broja u kvadratiću ispod njega (ukoliko takav kvadratić postoji)?



Rješenje:

Primijetimo da nam uslov znači da u svakom redu brojevi rastu s lijeva na desno, te da u svakoj koloni brojevi rastu odozgo prema dole. Numerišimo redove odozgo prema dole brojevima od 1 do 12 (svaki red ima 3 kvadratića), a kolone s lijeva na desno brojevima od 1 do 14 (1. i 14. kolona imaju jedan kvadratić, 2. i 13. kolona dva, a preostale kolone 3 kvadratića).
Za dva različita kvadratića A i B reći ćemo da je A bolji od B ako red u kojem je kvadratić A ima manji ili jednak redni broj od reda u kojem je kvadratić B i kolona u kojoj je kvadratić A ima manji ili jednak redni broj od kolone u kojoj je kvadratić B (primijetimo da je moguće da niti je A bolji od B niti je B bolji od A, npr. ako je A u redu sa manjim rednim brojem, a B u koloni sa manjim rednim brojem). Sada lako vidimo da ako je A bolji od B, onda je broj u kvadratiću A manji od broja u kvadratiću B (jer možemo doći od A

do B krećući se kvadratićima tako da u svakom koraku idemo desno ili dole, a na taj način brojevi uvijek rastu).
Kako je broj iz prvog reda i prve kolone bolji od svih ostalih kvadratića, u njemu mora biti broj 1. Od preostalih kvadratića, broj iz prvog reda i druge kolone je bolji od svih preostalih kvadratića, pa se u njemu nalazi broj 2.



Posmatrajmo kvadratić u prvom redu i trećoj koloni (žuti kvadratić). Ako zanemarimo dva kvadratića u kojima smo već odredili koji brojevi su upisani, on je bolji od svih preostalih kvadratića osim zelenog. Slično, zeleni kvadratić je bolji od svih preostalih kvadratića osim žutog. To znači da su brojevi 3 i 4 upisani u žuti i zeleni kvadratić, što možemo uraditi na dva načina. Međutim, kako je plavi kvadratić bolji od svih preostalih kvadratića, to u njemu mora biti broj 5. Sada slično zaključujemo da je crni kvadratić bolji od svih preostalih kvadratića osim sivog, a sivi je također bolji od svih preostalih kvadratića osim crnog, to su u ta dva kvadratića upisani brojevi 6 i 7, što opet možemo uraditi na dva načina. Kako je crveni kvadratić bolji od svih preostalih kvadratića, u njemu mora biti upisan broj 8. Nastavljajući ovaj postupak, mi ustvari za svaku od trojki $(3,4,5), (6,7,8), \dots (33,34,35)$ dobijamo da se prva dva elementa trojke mogu rasporediti na dva načina, a trećem elementu je određena pozicija. Naravno, na kraju ćemo dobiti da se broj 36 mora nalaziti u posljednjem kvadratiću 12. reda. Kako imamo 11 trojki, a u svakoj nezavisno biramo kako ćemo upisati prva dva elementa, to je broj načina da se upišu brojevi jednak $2^{11} = 2048$.

Šema bodovanja:

1 bod: zaključak da je pozicija brojeva 1 i 2 određena (ili 35 i 36)
2 boda: zaključak da za brojeve 3 i 4, ili brojeve 33 i 34 postoje dva moguća načina raspoređivanja
1 bod: zaključak da je pozicija broja 5 određena
3 boda: zaključak da se proces može nastaviti i za ostale trojke, te da za svaku postoje dvije opcije
3 boda: dobijanje tačnog rezutata

Zadatak 4. Ako za realne brojeve a i b vrijedi $\frac{7a^3b^3}{a^6-8b^6} = 1$, odrediti sve moguće vrijednosti izraza $\frac{a^2-b^2+1}{a^2+ab+2}$.

Rješenje:

Najprije imamo da je $a^6 \neq 8b^6$. Nakon množenja sa $a^6 - 8b^6 \neq 0$ imamo

$$a^6 - 8b^6 - 7a^3b^3 = 0$$
$$a^6 + a^3b^3 - 8b^6 - 8a^3b^3 = 0$$
$$a^3(a^3 + b^3) - 8b^3(b^3 + a^3) = 0$$
$$(a^3 - 8b^3)(a^3 + b^3) = 0$$
$$(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2) = 0$$

$$(a-2b)((a+b)^2+3b^2)(a+b)\left(\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right)=0.$$

Sada primijetimo da druga zagrada ne može biti jednaka 0, jer bi odatle slijedilo $b=0$ i $a+b=0$, tj. $a=b=0$, što ne zadovoljava uslov $a^6 \neq 8b^6$. Slično, ako je posljednja zagrada jednaka 0 dobijamo $a=b=0$, šro je nemoguće. Ako je $a+b=0$ imamo

$$\frac{a^2-b^2+1}{a^2+ab+2}=\frac{(a-b)(a+b)+1}{a(a+b)+2}=\frac{1}{2},$$

dok za $a-2b=0$, tj. $a=2b$ dobijamo

$$\frac{a^2-b^2+1}{a^2+ab+2}=\frac{4b^2-b^2+1}{4b^2+2b\cdot b+2}=\frac{3b^2+1}{6b^2+2}=\frac{3b^2+1}{2\cdot(3b^2+1)}=\frac{1}{2}.$$

Dakle, jedina moguća vrijednost izraza je $\frac{1}{2}$ (u slučajevima $a=-b$ i $a=2b$ je očigledno zadovoljen uslov $a^6 \neq 8b^6$ kad god su a i b različiti od 0).

Šema bodovanja:

3 boda: faktorizacija $(a^3-8b^3)(a^3+b^3)=0$
1 bod: faktorizacija $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)=0$
1 bod: pokazivanje da je $a^2+2ab+4b^2=0$ moguće samo za $a=b=0$
2 boda: pokazivanje da je $a^2-ab+b^2=0$ moguće samo za $a=b=0$
1 bod: zaključak da slučaj $a=b=0$ ne pripada definicionom području početnog izraza
2 boda: ispravno računanje izraza u slučajevima $a=-b$ i $a=2b$

Zadatak 5. Neka je n prirodan broj. Za prirodan broj k, takav da je $1 \leq k \leq n$, označimo sa a_k najveći neparni djelioc broja $n+k$ (dakle, a_1 je najveći neparni djelioc broja $n+1$, a_2 je najveći neparni djelioc broja $n+2$, ... , a_n je najveći neparni djelioc broja $2n$). Izračunati zbir $a_1+a_2+\cdots+a_n$.

Rješenje:
Dokazat ćemo najprije sljedeću lemu:
Lema: Svaka dva broja iz skupa $A=\{n+1,n+2,\ldots,2n\}$ imaju različit najveći neparni djelioc, tj. svi brojevi $a_1,a_2,\ldots,a_n$ su međusobno različiti.
Dokaz leme: Svaki prirodan broj m možemo zapisati u obliku $m=2^x\cdot y$, pri čemu je x nenegativan cijeli broj, a y neparan prirodan broj, te je tada očigledno y najveći neparni djelioc broja m. Pretpostavimo suprotno, neka je $a_i=a_j=t$ za $1 \leq i < j \leq n$. Tada je $n+i=2^a\cdot t, n+j=2^b\cdot t$, pri čemu je $a<b$, tj. $b \geq a+1$. Međutim, sada je $2n \geq n+j=2^b\cdot t \geq 2^{a+1}\cdot t=2\cdot 2^a\cdot t=2(n+i)>2n$, što je očigledna kontradikcija. Dakle, svaka dva broja iz skupa A imaju različit neparni djelioc.

Vratimo se na rješenje zadatka. Kako za svako $i, 1 \leq i \leq n$ vrijedi $a_i \in \{1,3,\ldots,2n-1\}$, a ovaj skup ima tačno n elemenata, zaključujemo da su skupovi $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ i $\{1,3,\ldots,2n-1\}$ međusobno jednaki (jer su na osnovu leme elementi $a_1,a_2,\ldots,a_n$ različiti, a ima ih tačno n). Zbog toga vrijedi

$$\begin{aligned}a_1+a_2+\cdots+a_n&=1+3+\cdots+2n-1=2\cdot 1-1+2\cdot 2-1+\cdots+2\cdot n-1\\&=2\cdot(1+2+\cdots+n)-n=2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}-n=n^2.\end{aligned}$$

Šema bodovanja:

6 bodova: navođenje i dokaz leme ili njoj ekvivalentne tvrdnje (samo navođenje leme bez dokaza 1 bod)
4 boda: izračunavanje date sume

Ukoliko učenik samo navede lemu (bez dokaza), te ispravno izračuna sumu, zadatak će biti bodovan sa 3 boda.

Napomena:
Potpuna i parcijalna rješenja koja su različita od službenog rješenja biće adekvatno bodovana u skladu sa šemom bodovanja koju će takmičarska komisija ekvivalentirati sa postojećom šemom bodovanja.