58. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 24.03.2018. godine

PRVI RAZRED

Zadatak 1

Ako su a, b i c realni brojevi takvi da je $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$, dokazati da vrijedi jednakost

$$\frac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{c^2a^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{a^2b^2}{(c-a)(c-b)} = ab + bc + ca.$$

Zadatak 2

Odrediti sve trojke (a, b, c) realnih brojeva takvih da su skupovi

$$\{a^2 - 4c, b^2 - 2a, c^2 - 2b\} \text{ i } \{a - c, b - 4c, a + b\}$$

jednaki i da vrijedi $2a + 2b + 6 = 5c$? U svakom od skupova su elementi međusobno različiti.

Zadatak 3

Neka su p i q prosti brojevi takvi da je $p^2 + pq + q^2$ kvadrat prirodnog broja. Dokazati da je broj $p^2 - pq + q^2$ prost.

Zadatak 4

Pokazati da se među proizvoljnih 13 tačaka u ravni sa cjelobrojnim koordinatama, među kojima ne postoje tri kolinearne, mogu izabrati 3 tačke koje su vrhovi trougla čije težište ima cjelobrojne koordinate.

Zadatak 5

Neka je H ortocentar oštrouglog trougla ABC, a M sredina stranice $\overline{BC}$. Ako su D i E redom podnožja normala iz tačke H na simetralu unutrašnjeg i vanjskog ugla kod vrha A, dokazati da su tačke M, D i E kolinearne.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.
Sretno!

58. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 24.03.2018. godine

DRUGI RAZRED

Zadatak 1

Pokazati da sistem jednadžbi

$$2ab = 6(a+b) - 13$$

$$a^2 + b^2 = 4$$

nema rješenja u skupu realnih brojeva.

Zadatak 2

Odrediti sve prirodne brojeve n takve da je broj $n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Zadatak 3

Riješiti u skupu realnih brojeva jednadžbu

$$x\lfloor x \rfloor + \{x\} = 2018,$$

pri čemu $\lfloor z \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od z, a $\{z\}$ je razlomljeni dio od z, tj. $\{z\} = z - \lfloor z \rfloor$ (npr. $\lfloor 3{,}6 \rfloor = 3$ i $\{3{,}6\} = 0{,}6$, a $\lfloor -3{,}6 \rfloor = -4$ i $\{-3{,}6\} = 0{,}4$).

Zadatak 4

Neka je P tačka na kružnici opisanoj oko trougla ABC na luku $\widehat{BC}$ na kojem nije tačka A. Neka se prave AB i CP sijeku u tački E, a prave AC i BP u tački F. Ako simetrala stranice $\overline{AB}$ siječe $\overline{AC}$ u tački K, a simetrala stranice $\overline{AC}$ siječe $\overline{AB}$ u tački J, dokazati da je

$$\left(\frac{|CE|}{|BF|}\right)^2 = \frac{|AJ| \cdot |JE|}{|AK| \cdot |KF|}.$$

Zadatak 5

Ploča dimenzija 2018×2018 podijeljena je na jedinične kvadrate 1×1. U neka polja ploče su postavljeni crni, a u neka bijeli žetoni (u svako polje ploče postavljen je najviše jedan žeton). Prvo uklonimo sve crne žetone iz kolona u kojima ima bijelih žetona, a zatim uklonimo sve bijele žetone iz redova u kojima ima crnih žetona. Ako je B broj preostalih bijelih žetona, C broj preostalih crnih žetona na ploči, a $A = min\{B, C\}$, odrediti najveću moguću vrijednost broja A.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.
Sretno!

58. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 24.03.2018. godine

TREĆI RAZRED

Zadatak 1

Odrediti vrijednosti realnog parametra a za koje jednadžba

$$2sin^4x + cos^4x = a$$

ima rješenja u skupu realnih brojeva.

Zadatak 2

Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_{2018}$ niz brojeva čiji su svi članovi elementi skupa $\{-1,1\}$. Suma

$$S = \sum_{1 \le i < j \le 2018} a_i a_j$$

može poprimiti i pozitivne i negativne vrijednosti. Naći najmanju pozitivnu vrijednost date sume.

Zadatak 3

U trouglu ABC data je tačka P takva da je $\angle ACP = \angle ABP = 10^{\circ}$, $\angle CAP = 20^{\circ}$ i $\angle BAP = 30^{\circ}$. Dokazati da je $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Zadatak 4

Primijetimo da broj $10001 = 73 \cdot 137$ nije prost. Dokazati da nijedan član beskonačnog niza

$$10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$$

nije prost broj.

Zadatak 5

Dato je 2018 tačaka u ravni. Dokazati da ih je moguće pokriti sa nekoliko krugova koji zadovoljavaju sljedeće uslove:

1) zbir dužina prečnika svih ovih krugova nije veći od 2018;
2) udaljenost između bilo koja dva kruga je veća od 1.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.
Sretno!

58. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 24.03.2018. godine

ČETVRTI RAZRED

Zadatak 1

a) Dokazati da za prirodne brojeve $n \geq 3$ vrijedi

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} = 2^n - 2,$$

gdje su $\binom{n}{k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$, binomni koeficijenti.

b) Neka je $n \geq 3$ neparan prirodan broj. Dokazati da u skupu

$$A = \left\{ \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

ima neparan broj neparnih brojeva.

Zadatak 2

Primijetimo da broj $10001 = 73 \cdot 137$ nije prost. Dokazati da nijedan član beskonačnog niza

$$10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$$

nije prost broj.

Zadatak 3

Ako su brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iz intervala $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$, dokazati da vrijedi nejednakost

$$log_{x_1}\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + log_{x_2}\left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \cdots + log_{x_{n-1}}\left(x_n - \frac{1}{4}\right) + log_{x_n}\left(x_1 - \frac{1}{4}\right) \geq 2n.$$

Zadatak 4

Neka je $ABCD$ tetivni četverougao i neka su k_1 i k_2 kružnice upisane u trouglove ABC i ABD. Dokazati da je vanjska zajednička tangenta ovih kružnica (različita od AB) paralelna sa CD.

Zadatak 5

Dato je 2018 tačaka u ravni. Dokazati da ih je moguće pokriti sa nekoliko krugova koji zadovoljavaju sljedeće uslove:

1) zbir dužina prečnika svih ovih krugova nije veći od 2018;
2) udaljenost između bilo koja dva kruga je veća od 1.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.
Sretno!

1 PRVI RAZRED - RJEŠENJA

I 1. Rješenje: Imamo

$$\frac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{c^2a^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{a^2b^2}{(c-a)(c-b)}=\frac{b^2c^2(c-b)+c^2a^2(a-c)+a^2b^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{b^2c^3-b^3c^2+c^2a^3-c^3a^2+a^2b^3-a^3b^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{c^2\left(a^3-b^3\right)-c^3\left(a^2-b^2\right)-a^2b^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(a-b)\left[c^2a^2+abc^2+c^2b^2-c^3a-c^3b-a^2b^2\right]}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{c^2a^2+abc^2+c^2b^2-c^3a-c^3b-a^2b^2}{(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{c^2b(b-c)-a^2\left(b^2-c^2\right)+ac^2(b-c)}{(b-c)(c-a)}=\frac{c^2b-a^2b-a^2c+ac^2}{c-a}$$

$$=\frac{b\left(c^2-a^2\right)+ac(c-a)}{c-a}=ab+bc+ca.$$

I 2. Rješenje: Dati skupovi su konačni, pa ako su jednaki onda je zbir elemenata u jednom skupu jednak zbiru elemenata u drugom skupu. Zbog toga vrijedi

$$\left(a^2-4c\right)+\left(b^2-2a\right)+\ \left(c^2-2b\right)=(a-c)+(b-4c)+\ (a+b)$$

tj.

$$\left(a^2-2a\right)+\left(b^2-2b\right)+\ \left(c^2-4c\right)=2a+2b-5c.$$

Kako je $2a+2b+6=5c$, to imamo

$$\left(a^2-2a\right)+\left(b^2-2b\right)+\ \left(c^2-4c\right)=-6,$$

tj.

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-2)^2=0.$$

Kako su $a,\ b,\ c$ realni brojevi, to iz posljednje jednakosti slijedi

$$a=1, b=1, c=2.$$

Direktnom provjerom vidimo da su dati skupovi jednaki skupu $\{-7,-1,2\}$.

I 3. Rješenje: Neka je $p^2+pq+q^2=n^2,\ n\in\mathbb{N}$. Ovaj izraz možemo zapisati kao

$$p^2+2pq+q^2-pq=n^2 \quad\Leftrightarrow$$
$$(p+q)^2-pq=n^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$pq = (p+q)^2 - n^2 = (p+q-n)(p+q+n).$$

Kako su brojevi p i q prosti, a pritom za drugi faktor vrijedi $p+q+n > p$ i $p+q+n > q$, to je jedina mogućnost $p+q+n = pq$ i $p+q-n = 1$. Sabiranjem ovih jednačina se dobija

$$2(p+q) = pq + 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$(p-2)(q-2) = 3.$$

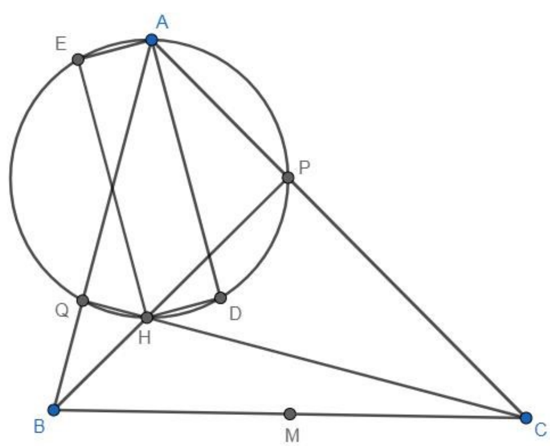
Odavde se dobija $p = 3, q = 5$ ili $p = 5, q = 3$. U oba slučaja $p^2 - pq + q^2 = 19$, što je prost broj, *q.e.d*.

I 4. Rješenje: Koordinate težišta trougla čiji su vrhovi $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ su date sa

$$x_T = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \; y_T = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Među 13 tačaka, prema Dirichletovom principu, postoji bar 5 tačaka čije x-koordinate pri djeljenju sa 3 daju isti ostatak. Među tih 5 tačaka može se desiti da postoje 3 čije y-koordinate daju isti ostatak pri djeljenju sa 3 i onda su to 3 tačke koje zadovoljavaju uslov zadataka. Ako među spomenutih 5 tačaka ne postoje tri tačke čije y-koordinate koje daju isti ostatak pri djeljenju sa 3, onda postoje tri tačke koje daju različite ostatke pri djeljenju sa 3, i to su onda tražene tačke.

I 5. Rješenje: Neka su P i Q podnožja visina trougla ABC iz tačaka B i C, redom. Dokažimo da tačke M, D, E pripadaju simetrali duži PQ. Dovoljno je dokazati $MP = MQ, DP = DQ, EP = EQ$.



Tačka M je središte hipotenuze BC u pravouglim trouglovima BCP i BCQ, pa je M i centar kružnica opisanih oko tih trouglova, odakle je $MQ = MB = MC = MP$. Dalje, kako vrijedi $\measuredangle ADH = \measuredangle AEH = \measuredangle APH = \measuredangle AQH = 90°$, to tačke D, E, P, Q pripadaju kružici sa prečnikom AH, tj. šestougao $AEQHDP$ je tetivni. Neka je k njegova opisana kružnica. Periferijski uglovi $\measuredangle DAP$ i $\measuredangle DAQ$

u kružici k nad tetivama DP i DQ su jednaki (AD je simetrala ugla), pa su i odgovarajuće tetive jednake, tj. $DP = DQ$. Slično, zbog $\measuredangle EQP = 180° - \measuredangle EAP = \measuredangle EAQ = \measuredangle EPQ$ vrijedi $EP = EQ$ (koristili smo da je zbir suprotnih uglova kod tetivnog četverougla $AEQP$ jednak $180°$, te da je AE simetrala vanjskog ugla). Dakle, tačke M, D, E pripadaju simetrali duži PQ, pa slijedi da su one kolinearne, *q.e.d.*

2 DRUGI RAZRED - RJEŠENJA

II 1. Rješenje: Sabiranjem datih jednačina dobija se $(a+b)^2 = 6(a+b) - 9$, tj. $(a+b-3)^2 = 0$.

Sada je $a+b = 3$, pa se iz prve jednačine dobija $ab = \frac{5}{2}$, tj. $a = \frac{5}{2b}$. Uvrštavanjem u jednačinu $a+b = 3$ dobijamo $\frac{5}{2b} + b = 3$, tj. $2b^2 - 6b + 5 = 0$. Ova kvadratna jednačina nema realnih rješenja jer je njena diskriminanta jednaka $D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -4 < 0$.

II 2. Rješenje: Imamo

$$\begin{aligned} n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n + 18 &= n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1 + 16n^2 - 32n + 17 \\ &= (n-1)^4 + 16(n-1)^2 + 1 = \left[(n-1)^2 + 8\right]^2 - 63 = k^2, \end{aligned}$$

za neki $k \in \mathbb{N}$.

Neka je $(n-1)^2 + 8 = m$, $m \geq 8$. Tada je

$$m^2 - k^2 = 63, \text{ tj. } (m-k)(m+k) = 63.$$

Imamo sljedeće slučajeve:

1) $m-k = 1$, $m+k = 63$, odakle dobijemo $m = 32$, $k = 31$, pa odavde slijedi $(n-1)^2 = 24$ i $n \notin \mathbb{N}$.

2) $m-k = 3$, $m+k = 21$, odakle dobijemo $m = 12$, $k = 9$, pa odavde slijedi $(n-1)^2 = 4$, pa je $n = 3$.

3) $m-k = 7$, $m+k = 9$, odakle dobijemo $m = 8$, $k = 1$, pa odavde slijedi $(n-1)^2 = 0$, pa je $n = 1$.

Dakle, $n \in \{1, 3\}$. Provjerom se uvjeravamo da su to rješenja.

II 3. Rješenje: Kako vrijedi $0 \leq \{x\} < 1$, to je $2017 < x\lfloor x \rfloor \leq 2018$. Razmotrimo dva slučaja:

$$1) \quad x \geq 0$$

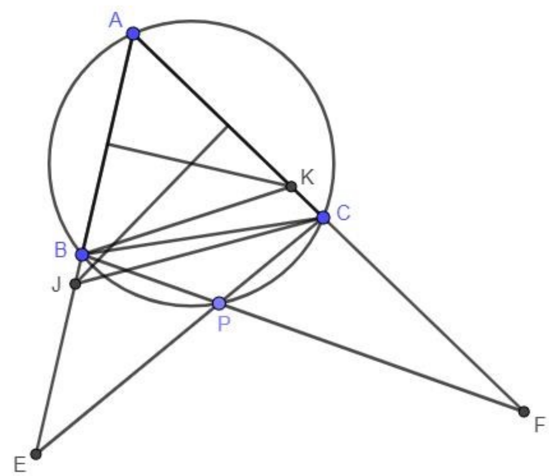
Kako je $x \geq \lfloor x \rfloor \geq 0$, to vrijedi $\lfloor x \rfloor^2 \leq x\lfloor x \rfloor \leq x^2$, odakle zaključujemo $\lfloor x \rfloor^2 \leq 2018 < 45^2$, pa je $\lfloor x \rfloor \leq 44$, pa je $x < 45$. S druge strane je $x^2 \geq x\lfloor x \rfloor > 2017 > 44^2$, tj. $x > 44$. Dakle, vrijedi $44 < x < 45$, pa je $\lfloor x \rfloor = 44$. Uvrštavanjem u početnu jednačinu dobijamo $44x + \{x\} = 2018$, a kako je $x = \{x\} + \lfloor x \rfloor = \{x\} + 44$, dobija se $44(\{x\} + 44) + \{x\} = 2018$, tj. $45\{x\} = 82$. Međutim, sada je $\{x\} = \frac{82}{45} > 1$, što je nemoguće.

$$2) \quad x < 0$$

Kako je $0 > x \geq \lfloor x \rfloor$, to vrijedi $\lfloor x \rfloor^2 \geq x\lfloor x \rfloor \geq x^2$, odakle zaključujemo $\lfloor x \rfloor^2 > 2017 > (-44)^2$, pa je $\lfloor x \rfloor < -44$, pa je $x < -44$. S druge strane je $x^2 \leq x\lfloor x \rfloor \leq 2018 < 45^2$, tj. $x > -45$ (jer je $x < 0$). Dakle, vrijedi $-45 < x < -44$, pa je

$\lfloor x \rfloor = -45$. Uvrštavanjem u početnu jednačinu dobijamo $-45x + \{x\} = 2018$, a kako je $x = \{x\} + \lfloor x \rfloor = \{x\} - 45$, dobija se $-45(\{x\} - 45) + \{x\} = 2018$, tj. $44\{x\} = 7$. Dakle, $\{x\} = \frac{7}{44}$, pa je $x = -45 + \frac{7}{44} = -\frac{1973}{44}$, što je rješenje date jednačine.

II 4. Rješenje: Neka je $\measuredangle BAC = \alpha$. Tada je i $\measuredangle KBA = \alpha$ i $\measuredangle JCA = \alpha$ (jer tačke K i J pripadaju simetralama duži AB i AC). Kako su $\measuredangle BKF$ i $\measuredangle EJC$ vanjski uglovi trouglova ABK i AJC, to vrijedi $\measuredangle BKF = 2\alpha = \measuredangle EJC \quad (1)$. Primijetimo da je $\measuredangle EPB = 180^\circ - \measuredangle BPC = \measuredangle BAC = \alpha$ (zbir suprotnih uglova kod tetivnog četverougla je 180°). Kako je $\measuredangle ABP$ vanjski ugao trougla EPB, to vrijedi $\alpha + \measuredangle BEP = \measuredangle BPE + \measuredangle BEP = \measuredangle ABP = \measuredangle ABK + \measuredangle KBF = \alpha + \measuredangle KBF$, tj. $\measuredangle BEP = \measuredangle KBF \quad (2)$.



Zbog (1) i (2) su trouglovi EJC i BFK slični, odakle dobijamo da vrijedi

$$\frac{CE}{BF} = \frac{EJ}{BK} = \frac{JC}{FK}.$$

Konačno, koristeći da je $AK = BK$ i $AJ = JC$, dobijamo

$$\left(\frac{|CE|}{|BF|}\right)^2 = \frac{|CE|}{|BF|} \cdot \frac{|CE|}{|BF|} = \frac{|EJ|}{|BK|} \cdot \frac{|JC|}{|FK|} = \frac{|EJ| \cdot |JA|}{|AK| \cdot |KF|}, \ q.e.d.$$

II 5. Rješenje: Primijetimo najprije da nakon uklanjanja žetona niti jedan red i niti jedna kolona ne sadrže žetone obje boje (moguće je da neki red ili kolona uopšte ne sadrže žetone). Neka je B_K broj kolona koje sadrže bijele žetone, a B_R broj redova koji sadrže bijele žetone. Slično definišimo i C_K i C_R za crne žetone. Jasno je da vrijede nejednakosti $B_K + C_K \leq 2018$, $B_R + C_R \leq 2018$, pa vrijedi $B_K + C_K + B_R + C_R \leq 4036$. Zbog toga vrijedi bar jedna od nejednakosti

$$B_K + B_R \leq 2018,$$

$$C_K + C_R \leq 2018.$$

Neka je bez umanjenja opštosti zadovoljena prva nejednakost. Crni žetoni se mogu nalaziti samo u presjecima „crnih redova“ i „crnih kolona“, pa je broj crnih žetona manji ili jednak $B_K \cdot B_R$, odakle je i $A \leq B_K \cdot B_R$. Međutim, zbog očigledne nejednakosti $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ vrijedi

$$A \leq B_K \cdot B_R \leq \frac{(B_K + B_R)^2}{4} \leq \frac{2018^2}{4} = 1009^2.$$

S druge strane, ovaj broj je moguće dostići. Naime, podijelimo ploču na 4 manje ploče dimenzija 1009×1009, te na gornju lijevu ploču postavimo u svaki kvadratić crni žeton, a na donju desnu u svaki kvadratić bijeli žeton. Preostale dvije ploče ostavimo prazne. Tada se tokom procesa uklanjanja žetona neće ukloniti niti jedan žeton sa ploče, pa će vrijediti $B = C = 1009^2$, tj. $A = 1009^2$. Dakle, maksimalna vrijednost broja A je 1009^2.

3 TREĆI RAZRED - RJEŠENJA

III 1. Rješenje: Datu jednačinu ćemo prvo transformisati na sljedeći način:

$$2\sin^4 x + \left(1-\sin^2 x\right)^2 = 3\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1 - a = 0.$$

Uvođenjem smjene $t = \sin^2 x$ dobijamo kvadratnu jednačinu po t:

$$3t^2 - 2t + 1 - a = 0.$$

Uočimo da $t \in [0,1]$. Rješenja dobijene kvadratne jednačine su

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-12(1-a)}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{12a-8}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{3a-2}}{3}$$

Rješenja kvadratne jednačine moraju biti realna, tj. mora vrijediti:

$$D \geq 0 \;\Rightarrow\; 3a-2 \geq 0$$

tj

$$a \geq \frac{2}{3} \tag{1}$$

Dalje, pošto mora biti $t \in [0,1]$, to mora vrijediti: (a) $t_1 \in [0,1]$, tj.

$$\frac{1+\sqrt{3a-2}}{3} \in [0,1]\; \sqrt{3a-2} \in [-1,2]$$

Pošto svakako vrijedi $\sqrt{3a-2} \geq -1$, ostaje nam samo uslov

$$\sqrt{3a-2} \leq 2$$

tj.

$$a \leq 2 \tag{2}$$

(b) $t_2 \in [0,1]$, tj.

$$\frac{1-\sqrt{3a-2}}{3} \in [0,1]\; \sqrt{3a-2} \in [-2,1]$$

Pošto svakako vrijedi $\sqrt{3a-2} \geq -2$, ostaje nam samo uslov

$$\sqrt{3a-2} \leq 1$$

tj.

$$a \leq 1 \tag{3}$$

Iz uslova (1) i (2) slijedi da za $a \in \left[\frac{2}{3}, 2\right]$, $t_1 = \frac{1+\sqrt{3a-2}}{3}$ je rješenje kvadratne jednačine $3t^2 - 2t + 1 - a = 0$, takvo da $t_1 \in [0,1]$. Slično, iz uslova (1) i (3) slijedi da za $a \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $t_2 = \frac{1-\sqrt{3a-2}}{3}$ je rješenje kvadratne jednačine $3t^2 - 2t + 1 - a = 0$, takvo da $t_2 \in [0,1]$. Dakle, naša jednadžba ima realnih rješenja ako je $a \in \left[\frac{2}{3}, 2\right]$.

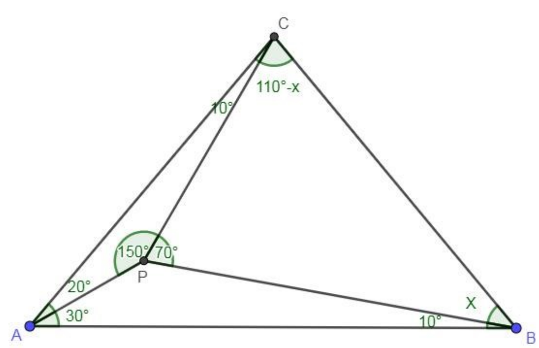
III 2. Rješenje 1: Primijetimo da vrijedi $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018})^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2018}^2 + 2S = 2018 + 2S$, pa je $S = \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{2018})^2 - 2018}{2}$. S druge strane, broj $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018}$ je očigledno paran (zbir parnog broja neparnih sabiraka). Kako je $S > 0$, to je $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018})^2 \geq 2018 > 44^2$, tj. $|a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018}| > 44$. Neka je $x = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018}$. Najmanja moguća (pozitivna) vrijednost izraza $S = \frac{x^2-2018}{2}$ za paran broj x takav da je $|x| > 44$ je $\frac{46^2-2018}{2} = 49$. Data vrijednost se dostiže ako je $|x| = 46$, tj. ako se u nizu nalaze tačno 1032 jedinice ili tačno 986 jedinica.

Rješenje 2: Neka se u nizu nalazi tačno k jedinica. Tada broj članova koji su jednaki -1 iznosi $2018 - k$. Svaki od sabiraka u sumi S je jednak 1 ili -1. Sabirci koji su jednaki -1 se dobijaju množenjem nejednakih članova niza i ima ih $k \cdot (2018 - k)$ (svaki član koji je jednak 1 sa svakim članom koji je jednak -1). Ukupan broj sabiraka u sumi S je $\frac{2018 \cdot 2017}{2} = 1009 \cdot 2017$, pa je broj jedinica u sumi jednak $1009 \cdot 2017 - k \cdot (2018 - k)$. Zbog toga vrijedi

$$S = 1009 \cdot 2017 - k \cdot (2018 - k) - k \cdot (2018 - k) = 2(k - 1009)^2 - 1009.$$

Zbog $S > 0$, mora vrijediti $(k - 1009)^2 > \frac{1009}{2} = 504,5$, tj. $|k - 1009| > \sqrt{504,5} > 22$, pa je minimalna pozitivna vrijednost sume S jednaka $2 \cdot 23^2 - 1009 = 49$, a dostiže se za $k = 1032$ ili $k = 986$.

III 3. Rješenje: Iz datih uglova dobijamo da je $\angle BAC = 50°$, te $\angle APC = 150°$ i $\angle APB = 140°$.



Primjenjujući sinusnu teoremu na trouglove ACP i APB, dobijemo

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 150°} = \frac{\overline{AP}}{\sin 10°}$$

ili zbog $\sin 150° = \sin 30°$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AP}}{\sin 10°} \sin 150° \tag{4}$$

i

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 140°} = \frac{\overline{AP}}{\sin 10°}$$

ili zbog $\sin 140° = \sin 40°$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AP}}{\sin 10°} \sin 40°. \tag{5}$$

Na osnovu kosinusne teoreme primjenjene na trougao ABC, te (4) i (5) slijedi

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AC||AB|\cos\alpha \\ \Leftrightarrow |BC|^2 - |AC|^2 &= |AB|^2 - 2|AC||AB|\cos 50° \\ \Leftrightarrow |BC|^2 - |AC|^2 &= \frac{|AP|^2}{\sin^2 10°}\sin^2 40° - \frac{2|AP|^2}{\sin^2 10°}\sin 30° \sin 40° \cos 50°, \end{aligned}$$

a odavde zbog $\cos 50° = \cos(90° - 40°) = \sin 40°$ i $\sin 30° = \frac{1}{2}$

$$|BC|^2 - |AC|^2 = \frac{|AP|^2}{\sin^2 10°}\sin^2 40° - \frac{|AP|^2}{\sin^2 10°}\sin^2 40° = 0,$$

a odavde $|BC|^2 - |AC|^2 = 0$, tj. $|BC| = |AC|$ ili $\overline{AC} = \overline{BC}$, što je i trebalo dokazati.

Rješenje 2: Neka je $\measuredangle PBC = x$ i $\measuredangle PCB = 110 - x$. Iz trigonometrijskog oblika Čevine teoreme dobijamo:

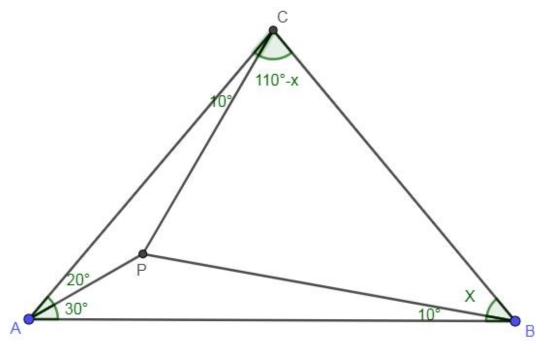
$$\frac{\sin\measuredangle BAP}{\sin\measuredangle CAP} \cdot \frac{\sin\measuredangle ACP}{\sin\measuredangle BCP} \cdot \frac{\sin\measuredangle CBP}{\sin\measuredangle PBA} = 1,\ tj.$$

$$\frac{\sin 30°}{\sin 20°} \cdot \frac{\sin 10°}{\sin(110° - x)} \cdot \frac{\sin x}{\sin 10°} = 1,\ tj.$$

$$\frac{\sin x}{\sin(110° - x)} = \frac{\sin 20°}{\sin 30°}.$$

Primijetimo da je dovoljno dokazati da vrijedi $x = 40°$. Dokažimo da je za $x = 40°$ prethodna jednakost zadovoljena. Naime, $\frac{\sin x}{\sin(110° - x)} = \frac{\sin 40°}{\sin 70°} = \frac{2 \cdot \sin 20° \cdot \cos 20°}{\cos 20°} = 2\sin 20° = \frac{\sin 20°}{\sin 30°}$. Da li je ovime zadatak gotov? Nije, treba dokazati da je to jedio x koje zadovoljava dati uslov. Imamo:

$$\frac{\sin x}{\sin(110° - x)} = \frac{\sin 20°}{\sin 30°} = \frac{\sin 40°}{\sin 70°} \quad \Leftrightarrow$$



$$\sin x \cdot \sin 70^\circ = \sin 40^\circ \cdot \sin(110^\circ - x) \iff$$
$$\frac{1}{2}\left(\cos(x-70^\circ) - \cos(x+70^\circ)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-70^\circ) - \cos(150^\circ - x)\right) \iff$$
$$\cos(x+70^\circ) = \cos(150^\circ - x).$$

Kako su uglovi $x + 70^\circ$ i $150^\circ - x$ pozitivni, a zbir im je manji od 360°, to je prethodna jednakost moguća samo ako su ti uglovi jednaki, tj. $x = 40^\circ$.
Napomena: Slično kao u rješenju se može pokazati vrlo korisna tvrdnja da iz $\frac{\sin x}{\sin(\alpha - x)} = \frac{\sin y}{\sin(\alpha - y)}$ slijedi $x = y$, pri čemu je $x, y < \alpha < 180^\circ$ (u zadatku je $\alpha = 110^\circ$ i $y = 40^\circ$). Ako je $\alpha < 90^\circ$, tvrdnja se može brže dokazati, jer npr. iz $x < y \Rightarrow \sin x < \sin y \ \wedge \ \sin(\alpha - x) > \sin(\alpha - y)$.

III 4. Rješenje: Dati niz brojeva možemo napisati u obliku

$$1 + 10^4,\ 1 + 10^4 + 10^8, \ldots$$

Dakle, opći član niza bi bio

$$a_n = 1 + 10^4 + 10^8 + \cdots + 10^{4n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

I) Ako je $n = 1$, imamo prvi član niza $a_1 = 10001 = 73 \cdot 137$–ovo je složen broj.
II) Ako je n neparan broj, $n = 2m + 1$, $m \geq 1$, tada je

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 10^4 + 10^8 + \cdots + 10^{4(2m+1)} = \left(1 + 10^4\right) + 10^8\left(1 + 10^4\right) + \cdots + 10^{8m}\left(1 + 10^4\right) \\ &= \left(1 + 10^4\right)\left(1 + 10^8 + \cdots + 10^{8m}\right) \end{aligned}$$

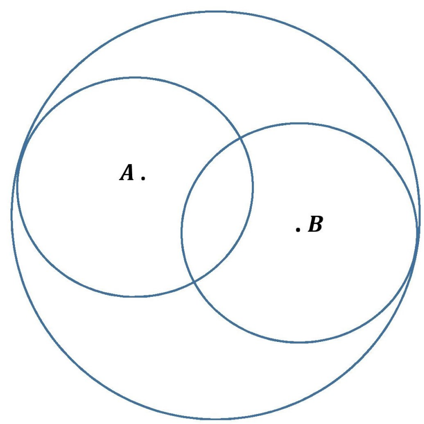
što je očito složen broj.
III) Najzad, ako je n paran broj, tj. $n = 2m$, $m \geq 1$, tada je

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 10^4 + 10^8 + \cdots + 10^{4(2m)} = \frac{1 - \left(10^4\right)^{2m+1}}{1 - 10^4} = \frac{\left[1 - \left(10^{2m+1}\right)^2\right]\left[1 + \left(10^{2m+1}\right)^2\right]}{\left(1 - 10^2\right)\left(1 + 10^2\right)} \\ &= \frac{1 - \left(10^2\right)^{2m+1}}{1 - 10^2} \cdot \frac{1 + \left(10^2\right)^{2m+1}}{1 + 10^2} = \left[1 + 10^2 + \cdots + \left(10^2\right)^{2m}\right] \cdot \left[1 - 10^2 + \cdots + \left(10^2\right)^{2m}\right], \end{aligned}$$

dakle, i u ovom slučaju imamo složen broj.

III 5. Rješenje: Prvo ćemo oko svih tačaka opisati krugove prečnika 1 sa centrima u datim tačkama. Primjetimo da je zbir prečnika svih krugova jednak 2018.

Sljedeće što ćemo uraditi je da pronađemo dva kruga koji se dodiruju ili preklapaju. Neka su to krugovi K i G, sa centrima u tačkama A i B. Neka je prečnik prvog kruga k, a drugog g. Formirat ćemo novi krug koji će dodirivati i sadržavati krugove K i G. Prečnik novog kruga neće biti veći od $k+g$. Prednost ovog kruga je u tome što će on sadržavati i sve tačke koje su sadržavali krugovi K i G. Nakon toga izbacimo krugove K i G. Ovaj korak ponavljamo sve dok ne dobijemo krugove koji su međusobno disjunktni i ne preklapaju se.



Sada je suma prečnika svih krugova manja ili jednaka 2018 i krugovi se ne dodiruju.

Kako smo u početku konstruisali krugove, ivica bilo kojeg kruga je bila udaljena od najbliže tačke tačno 0,5. To znači, da je ivica bilo kojeg od preostalih krugova bar za 0,5 udaljena od najbliže tačke.

Kako se krugovi ne dodiruju međusobno, prtpostavimo da je najmanja udaljenost između svih krugova po parovima jednaka $3d > 0$.

Ako je $3d > 1$, zadatak je riješen. Međutim, ako $3d$ nije veće od jedan, onda ćemo poluprečnik svake kružnice smanjiti za $0,5 - d > 0$. Sve tačke zadane na početku zadatka će i dalje ostati u unutrašnjosti novonastalih krugova, a udaljenost između svake dvije kružnica će se povećati za $2(0,5 - d) = 1 - 2d$. Kako je najmanja udaljenost između dvije kružnice bila $3d$, to će najmanja udaljenost sada biti $3d + (1 - 2d) = 1 + d > 1$.
Smanjivanjem poluprečnika smo smanjili zbir dužina prečnika svih krugova, pa on nije veći od 2018, što je i trebalo dokazati.

4 ČETVRTI RAZRED - RJEŠENJA

IV 1. Rješenje: a) Kako je $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ i koristeći binomnu formulu, imamo

$$\begin{aligned}
2^n &= (1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\\
&= 1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+1\\
&= \binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+2,
\end{aligned}$$

to je

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}=2^n-2.$$

b) Ako je suma brojeva iz skupa A neparna, onda će u tom skupu biti neparan broj neparnih brojeva (u skupu A sigurno ima bar jedan neparan broj jer je $n\geq 3$ neparan i $n=\binom{n}{1}\in A$). Kako je $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, i koristeći a) imamo

$$\begin{aligned}
2^n-2 &= \binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}+\binom{n}{\frac{n+1}{2}}+\cdots+\binom{n}{n-1}\\
&= 2\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Odavde je

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=2^{n-1}-1,$$

što je neparan broj, pa u skupu A ima neparan broj neparnih brojeva.

IV 2. Rješenje: Dati niz brojeva možemo napisati u obliku

$$1+10^4,\ 1+10^4+10^8,\ldots$$

Dakle, opći član niza bi bio

$$a_n=1+10^4+10^8+\cdots+10^{4n}\quad(n\in\mathbb{N}).$$

I) Ako je $n=1$, imamo prvi član niza $a_1=10001=73\cdot 137$–ovo je složen broj.

II) Ako je n neparan broj, $n=2m+1$, $m\geq 1$, tada je

$$\begin{aligned}
a_n &= 1+10^4+10^8+\cdots+10^{4(2m+1)}=\left(1+10^4\right)+10^8\left(1+10^4\right)+\cdots+10^{8m}\left(1+10^4\right)\\
&= \left(1+10^4\right)\left(1+10^8+\cdots+10^{8m}\right)
\end{aligned}$$

Što je očito složen broj.

III) Najzad, ako je n paran broj, tj. $n = 2m$, $m \geq 1$, tada je

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 10^4 + 10^8 + \cdots + 10^{4(2m)} = \frac{1-\left(10^4\right)^{2m+1}}{1-10^4} = \frac{\left[1-\left(10^{2m+1}\right)^2\right]\left[1+\left(10^{2m+1}\right)^2\right]}{\left(1-10^2\right)\left(1+10^2\right)} \\ &= \frac{1-\left(10^2\right)^{2m+1}}{1-10^2}\cdot\frac{1+\left(10^2\right)^{2m+1}}{1+10^2} = \left[1+10^2+\cdots+\left(10^2\right)^{2m}\right]\cdot\left[1-10^2+\cdots+\left(10^2\right)^{2m}\right], \end{aligned}$$

dakle, i u ovom slučaju imamo složen broj.

IV 3. Rješenje: Stavimo $A = log_{x_1}\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + log_{x_2}\left(x_3 - \frac{1}{4}\right) + \cdots + log_{x_{n-1}}\left(x_n - \frac{1}{4}\right) + log_{x_n}\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)$. Kako je $\left(x_k - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x_k^2 \geq x_k - \frac{1}{4}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ i pošto su baze svih logaritama manje od 1, imamo da je

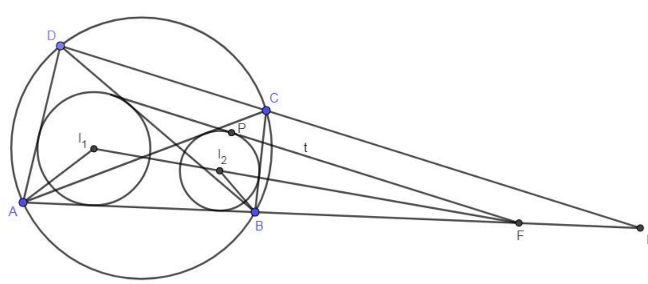
$$log_{x_{k-1}}\left(x_k - \frac{1}{4}\right) \geq log_{x_{k-1}} x_k^2 = 2log_{x_{k-1}} x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow A \geq 2\left(log_{x_1} x_2 + log_{x_2} x_3 + \cdots + log_{x_n} x_1\right).$$

Svi sabirci u zadnjoj zagradi su pozitivni, pa možem primjeniti odnos aritmetičke i geometrijske sredine za n pozitivnih brojeva,

$$log_{x_1} x_2 + log_{x_2} x_3 + \cdots + log_{x_n} x_1 \geq n\sqrt[n]{log_{x_1} x_2 \cdot log_{x_2} x_3 \cdot \cdots \cdot log_{x_n} x_1}$$

dok je $log_{x_1} x_2 \cdot log_{x_2} x_3 \cdot \cdots \cdot log_{x_n} x_1 = \frac{log x_2}{log x_1} \cdot \frac{log x_3}{log x_2} \cdot \cdots \cdot \frac{log x_1}{log x_n} = 1$. Dakle, $\frac{A}{2} \geq n \Rightarrow A \geq 2n$. Jednakost se postiže ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{2}$.

IV 4. Rješenje: Neka je E tačka presjeka pravih AB i CD. Označimo sa t drugu vanjsku tangentu datih kružnica, sa F presjek pravih AB i t, a sa P tačku dodira tangente t i kružnice upisane u trougao ABC. Neka su I_1 i I_2 centri upisanih kružnica trouglova ABD i ABC, redom.

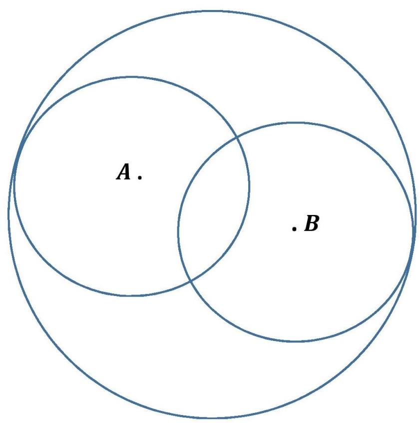


Tačke I_1, I_2 i F su kolinearne jer se tačke I_1 i I_2 nalaze na simetrali ugla $\measuredangle PFB$. Uvedimo oznake: $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB = x, \measuredangle BAD = \alpha, \measuredangle ABC = \beta$. Kako je $AI_1B = 180° - \frac{\measuredangle BAD + \measuredangle ABD}{2} = 90° + x$ i $AI_2B = 180° - \frac{\measuredangle BAC + \measuredangle ABC}{2} = 90° + x$, to je četverougao ABI_2I_1 tetivni. Sada je $\measuredangle PFA = 2\measuredangle I_1FA = 2\left(180° - \measuredangle I_2AF - \measuredangle FI_1A\right) =$

$2\left(180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \left(180^\circ - \frac{\beta}{2}\right)\right) = \beta - \alpha$. Kako je i $\measuredangle DEA = 180^\circ - \measuredangle DAE - \measuredangle ADE = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - \beta) = \beta - \alpha$, to su prave CD i t paralelne, *q.e.d.*

IV 5. Rješenje: Prvo ćemo oko svih tačaka opisati krugove prečnika 1 sa centrima u datim tačkama. Primjetimo da je zbir prečnika svih krugova jednak 2018.

Sljedeće što ćemo uraditi je da pronađemo dva kruga koji se dodiruju ili preklapaju. Neka su to krugovi K i G, sa centrima u tačkama A i B. Neka je prečnik prvog kruga k, a drugog g. Formirat ćemo novi krug koji će dodirivati i sadržavati krugove K i G. Prečnik novog kruga neće biti veći od $k+g$. Prednost ovog kruga je u tome što će on sadržavati i sve tačke koje su sadržavali krugovi K i G. Nakon toga izbacimo krugove K i G. Ovaj korak ponavljamo sve dok ne dobijemo krugove koji su međusobno disjunktni i ne preklapaju se.



Sada je suma prečnika svih krugova manja ili jednaka 2018 i krugovi se ne dodiruju.

Kako smo u početku konstruisali krugove, ivica bilo kojeg kruga je bila udaljena od najbliže tačke tačno 0,5. To znači, da je ivica bilo kojeg od preostalih krugova bar za 0,5 udaljena od najbliže tačke.

Kako se krugovi ne dodiruju međusobno, prtpostavimo da je najmanja udaljenost između svih krugova po parovima jednaka $3d > 0$.

Ako je $3d > 1$, zadatak je riješen. Međutim, ako $3d$ nije veće od jedan, onda ćemo poluprečnik svake kružnice smanjiti za $0,5 - d > 0$. Sve tačke zadane na početku zadatka će i dalje ostati u unutrašnjosti novonastalih krugova, a udaljenost između svake dvije kružnica će se povećati za $2(0,5 - d) = 1 - 2d$. Kako je najmanja udaljenost između dvije kružnice bila $3d$, to će najmanja udaljenost sada biti $3d + (1 - 2d) = 1 + d > 1$.
Smanjivanjem poluprečnika smo smanjili zbir dužina prečnika svih krugova, pa on nije veći od 2018, što je i trebalo dokazati.