BILTEN

TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE
FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 30.03.2019. godine

FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA

SREDNJE ŠKOLE ZA ŠKOLSKU 2018./2019. GODINU

Prirodno-matematički fakultet

Sarajevo, 30.03.2019. godine

Program takmičenja

10:00 – 10:30 registracija takmičara

10:30 – 11:00 svečano otvaranje takmičenja i obraćanje učesnicima

raspodjela takmičara po učionicama

11:00 – 14:30 izrada zadataka

11:15 – 12:00 predavanje za profesore pratioce (Prof.dr. Šefket Arslanagić – Jedan zanimljiv primjer primjene indirektnog dokaza)

14:30 – 17:30 pregledanje radova

17:30 – 18:00 preliminarni rezultati i žalbe

18:30 proglašenje pobjednika i izbor učenika koji su se plasirali na Matematičku olimpijadu Bosne i Hercegovine i izborno takmičenje za Balkansku matematičku olimpijadu

Konačni rezultati za 1. razred

No	Prezime i ime	Škola	Kanton	Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	Zad. 5	Ukupno	Plasman
1	Stanković Boris	Druga gimnazija Sarajevo	KS	10	10	10	10	10	50	1
2	Imamović Haris	Druga gimnazija Sarajevo	KS	10	10	10	4	3	37	2
3	Purišević Naida	Druga gimnazija Sarajevo	KS	10	10	9	4	3	36	3
4	Mašić Esma	Druga gimnazija Sarajevo	KS	10	10	10	5	1	36	3
5	Hujić Adi	Druga gimnazija Sarajevo	KS	8	10	10	4	2	34	5
6	Alibašić Imana	Gimnazija Maarif koledž	KS	10	10	0	4	2	26	6
7	Borovina Lamija	Druga gimnazija Sarajevo	KS	2	10	0	9	3	24	7
8	Šeko Hatidža	Prva bošnjačka gimnazija	KS	10	10	0	4	0	24	7
9	Kovač Iman	Richmond Park Internat. Second.School Zenica	ZDK	7	10	1	0	2	20	9
10	Hadžić Alen	MSŠ „ Profesor Omer Filipović“ Ključ	USK	10	5	0	4	0	19	10
11	Herceglija Ajša	Medresa "Osman-efendija Redžović" Visoko	ZDK	10	5	2	0	2	19	10
12	Kadušić Adi	Tehnička škola Zenica	ZDK	10	4	2	1	0	17	11
13	Žgalj Fatih	Prva bošnjačka gimnazija	KS	2	10	0	0	3	15	12
14	Gutošić Amina	Srednja škola Stolac	HNK	0	10	0	0	0	10	13
15	Softić Ahmed	MSŠ Travnik	SBK	2	8	0	0	0	10	13
16	Škrgić Dado	Gimnazija Cazin	USK	0	0	0	10	0	10	13
17	Živojević Edin	MSŠ "Enver Pozderović" Goražde	BPK	10	0	0	0	0	10	13
18	Hrnjić Alen	Gimnazija Bihać	USK	7	1	0	0	0	8	18
19	Imamović Hamza	Gimnazija "Meša Selimović"	TK	7	0	0	0	0	7	19
20	Šolbić Hana	Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj	ZDK	7	0	0	0	0	7	19
21	Mešić Almedin	Richmond Park Internat. Second. School Tuzla	TK	3	3	0	0	0	6	21
22	Muratspahić Mirnes	STŠ Bugojno	SBK	0	6	0	0	0	6	21
23	Demirović Emina	Druga gimnazija Mostar	HNK	4	1	0	0	0	5	23
24	Đelmo Edi	Srednja škola Jablanica	HNK	2	1	0	0	0	3	24
25	Hadžović Ajla	STŠ "Hasib Hadžović" Goražde	BPK	0	1	0	0	0	1	25
26	Adilović Ibrahim	Elči Ibrahim-pašina medresa Travnik	SBK	0	0	0	0	0	0	26
27	Bašić Faruk	STŠ "Hasib Hadžović" Goražde	BPK	0	0	0	0	0	0	26

Konačni rezultati za 2. razred

No	Prezime i ime	Škola	Kanton	Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	Zad. 5	Ukupno	Plasman
1	Paradžik Sandro	Druga gimnazija Sarajevo	KS	10	10	8	10	0	38	1
2	Saračević Aldin	Richmond Park Internat. Second. School Tuzla	TK	2	10	5	9	1	27	2
3	Kadić Benjamin	Druga gimnazija Sarajevo	KS	10	4	10	0	1	25	3
4	Goralija Hanka	Gimnazija "Visoko" Visoko	ZDK	9	10	4	1	1	25	3
5	Arnaut Belmin	Gimnazija "Dr. Mustafa Kamarić"	TK	10	10	0	2	0	22	5
6	Korić Amar	Druga gimnazija Mostar	HNK	2	10	0	10	0	22	5
7	Čaušević Ajdin	Richmond Park College Bihać	USK	1	10	6	2	1	20	7
8	Dajdžić Adin	Srednja medicinska škola Tuzla	TK	2	2	8	3	2	17	8
9	Čalkić Ahmed	Prva gimnazija u Zenici	ZDK	9	2	2	2	1	16	9
10	Hodžić Haris	Druga gimnazija Sarajevo	KS	4	10	1	0	1	16	9
11	Alagić Azra	Treća gimnazija Sarajevo	KS	8	2	0	3	1	14	11
12	Mahmutović Hana	Druga gimnazija Sarajevo	KS	8	2	1	0	2	13	12
13	Hasović Mirza	PU Među.gimnazija Richmond Park Sarajevo	KS	0	2	10	0	0	12	13
14	Ridžal Amel	STŠ Bugojno	SBK	2	0	10	0	0	12	13
15	Hatić Vedad	Prva bošnjačka gimnazija	KS	1	0	7	3	0	11	15
16	Muratović Alem	STŠ "Hasib Hadžović" Goražde	BPK	1	0	10	0	0	11	15
17	Demirović Faris	Richmond Park Internat. Second.School Sarajevo	KS	0	10	0	0	0	10	17
18	Đidelija Armin	Druga gimnazija Mostar	HNK	2	0	4	3	1	10	17
19	Grgić Marija	Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj	ZDK	1	2	1	0	2	6	19
20	Osmanović Đulka	Richmond Park Međunarodna škola Tuzla	TK	1	1	3	0	1	6	19
21	Osmić Asja	Gimnazija "Meša Selimović"	TK	1	4	0	1	0	6	19
22	Džajić Nedim	Srednja škola Konjic	HNK	2	0	1	0	2	5	22
23	Nuhić Anis	MS Elektro-mašinska škola Lukavac	TK	2	1	1	0	1	5	22
24	Salčinović Abdulah	Tehnička škola Zenica	ZDK	1	0	4	0	0	5	22
25	Imamović Faruk	Prva bošnjačka gimnazija	KS	1	0	0	1	2	4	25
26	Kulenović Deni	Gimnazija Bihać	USK	1	1	1	0	1	4	25
27	Bajramović Meldin	Gimnazija Cazin	USK	2	0	0	0	0	2	27
28	Čamdžić Adna	Gimnazija "Rizah Odžečkić" Zavidovići	ZDK	2	0	0	0	0	2	27
29	Hadžikadunić Fatima	Srednja tehnička škola Tešanj	ZDK	2	0	0	0	0	2	27
30	Trkić Ahmed	STŠ Bugojno	SBK	2	0	0	0	0	2	27
31	Alibašić Dalila	Gimnazija Velika Kladuša	USK	1	0	0	0	0	1	31
32	Mujezinović Emira	MSŠ "Enver Pozderović" Goražde	BPK	1	0	0	0	0	1	31
33	Turković Amina	MSŠ "Enver Pozderović" Goražde	BPK	1	0	0	0	0	1	31

Konačni rezultati za 3. razred

No	Prezime i ime	Škola	Kanton	Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	Zad. 5	Ukupno	Plasman
1	Tahirović Faik	Druga gimnazija Sarajevo	KS	8	10	10	3	0	31	1
2	Biogradlija Lamija	Richmond Park Internat.Second. School Zenica	ZDK	10	10	3	2	0	25	2
3	Mujkić Amila	PU Međun. gimnazija Richmond Park Sarajevo	KS	3	10	10	2	0	25	2
5	Mulaimović Emin	MSŠ Travnik	SBK	7	10	1	7	0	25	2
4	Ćatić Hana	Druga gimnazija Sarajevo	KS	9	10	1	2	0	22	5
6	Osmanović Sara	Koledž Ujedinjenog Svijeta	HNK	7	10	2	0	0	19	6
9	Fišek Hamza	Druga gimnazija Sarajevo	KS	10	7	1	1	0	19	6
11	Balašev-Samarski Lav	Druga gimnazija Sarajevo	KS	9	7	1	2	0	19	6
7	Berkovac Tarik	Richmond Park College Sarajevo	KS	0	10	4	3	0	17	9
8	Omić Ferid	Richmond Park Internat. Second. School Zenica	ZDK	3	10	3	0	0	16	10
10	Špago Harun	Srednja škola Konjic	HNK	10	3	0	0	0	13	11
12	Kulaglić Aldin	Gimnazija "Muhsin Rizvić" Breza	ZDK	7	5	0	0	0	12	12
13	Tikveša Medina	Druga gimnazija Mostar	HNK	10	0	0	0	0	10	13
14	Velić Tarik	Treća gimnazija	KS	5	3	2	0	0	10	13
15	Efendić Nura	Gimnazija "Meša Selimović"	TK	3	2	0	2	1	8	15
16	Softić Ajna	Gimnazija "Mustafa Novalić"	TK	0	0	8	0	0	8	15
17	Ždralić Almedina	Druga gimnazija Mostar	HNK	7	0	0	0	0	7	17
18	Hrkić Maida	Gimnazija "Rizah Odžečkić"	ZDK	3	1	1	1	0	6	18
19	Podanović Elvedin	MS Građevinsko-geodetska škola	TK	2	0	1	2	0	5	19
20	Beganović Tarik	Gimnazija Cazin	USK	3	0	1	0	0	4	20
21	Hamzić Kemal	STŠ "Hasib Hadžović" Goražde	BPK	3	0	0	0	0	3	21
22	Beganović Najda	Gimnazija "Dr. Mustafa Kamarić"	TK	2	0	0	0	0	2	22
23	Kadić Amina	Elči Ibrahim-pašina medresa Travnik	SBK	0	0	2	0	0	2	22
24	Hadžić Mirza	MSŠ "Enver Pozderović" Goražde	BPK	2	0	0	0	0	2	22
25	Ćehić Nejra	Gimnazija Bihać	USK	1	0	0	0	0	1	25
26	Perla Ismihana	STŠ "Hasib Hadžović" Goražde	BPK	1	0	0	0	0	1	25
27	Petrović Armin	STŠ Bugojno	SBK	1	0	0	0	0	1	25
28	Bobić Nail	Mješovita elektrotehnička i drvopr.škola Bihać	USK	0	0	0	0	0	0	28
30	Bužimkić Adisa	Richmond Park College Bihać	USK	0	0	0	0	0	0	28
32	Mahmutović Ahmed	STŠ "Hasib Hadžović" Goražde	BPK	0	0	0	0	0	0	28
34	Trako Ajša	Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj	ZDK	0	0	0	0	0	0	28

Konačni rezultati za 4. razred

No	Prezime i ime	Kanton	Kanton	Zad. 1	Zad. 2	Zad. 3	Zad. 4	Zad. 5	Ukupno	Plasman
1.	Velašević Boris	PU Međun. gimnazija Richmond Park Sarajevo	KS	10	10	3	3	0	26	1
2.	Skelić Lejla	PU Međun. gimnazija Richmond Park Sarajevo	KS	9	10	2	3	0	24	2
3.	Raljević Tarik	Koledž Ujedinjenog Svijeta u Mostaru	HNK	10	10	3	0	0	23	3
4.	Martinović Ivan	Koledž Ujedinjenog Svijeta u Mostaru	HNK	7	8	3	0	0	18	4
5.	Džaka Tarik	PU Međuna. gimnazija Richmond Park Sarajevo	KS	10	1	3	3	0	17	5
6.	Handžić Emina	Gimnazija "Visoko"	ZDK	5	10	0	0	0	15	6
7.	Subašić Nejla	Druga gimnazija Sarajevo	KS	10	1	2	0	0	13	7
8.	Šehović Ajla	PU Međun. gimnazija Richmond Park Sarajevo	KS	3	3	5	1	0	12	8
9.	Ramhorst Benjamin	Druga gimnazija Sarajevo	KS	4	5	0	1	0	10	9
10.	Šakić Faris	MSŠ Travnik	SBK	7	0	0	0	0	7	10
11.	Muslić Hana	Prva gimnazija u Zenici, Zenica	ZDK	5	2	0	0	0	7	10
12.	Mahovac Ahmed	Gimnazija "Rizah Odžečkić" Zavidovići	ZDK	1	5	0	0	0	6	12
13.	Pozderac Admir	Druga gimnazija Sarajevo	KS	0	4	2	0	0	6	12
14.	Vardo Lejla	Richmond Park Intern. Secondary School Zenica	ZDK	4	1	0	1	0	6	12
15.	Medošević Adna	Druga gimnazija Sarajevo	KS	2	3	0	1	0	6	12
16.	Beganović Ilhama	MSŠ Travnik	SBK	5	0	0	0	0	5	16
17.	Horozović Maida	Gimnazija Bihać	USK	5	0	0	0	0	5	16
18.	Suljić Sabina	Richmond Park Intern. Secondary School Tuzla	TK	4	1	0	0	0	5	16
19.	Behić Samra	Gimnazija Bihać	USK	4	0	0	0	0	4	19
20.	Hodžić Mujo	Srednja škola Konjic	HNK	4	0	0	0	0	4	19
21.	Delalić Fahira	Elči Ibrahim-pašina medresa Travnik	SBK	3	0	0	0	0	3	21
22.	Husičić Adna	Gimnazija Cazin	USK	1	2	0	0	0	3	21
23.	Omanović Almedina	Druga gimnazija Mostar	HNK	3	0	0	0	0	3	21
24.	Begovac Amar	Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj	ZDK	1	0	2	0	0	3	21
25.	Kišmetović Adnan	Gimnazija Cazin	USK	2	0	0	0	0	2	25
26.	Selimović Rajza	Gimnazija "Muhsin Rizvić" Kakanj	ZDK	0	2	0	0	0	2	25
27.	Kuko Asja	Druga gimnazija Mostar	HNK	1	0	0	0	0	1	27
28.	Herak Sanina	MSŠ "Enver Pozderović" Goražde	BPK	0	0	0	0	0	0	28
29.	Resulović Amila	Gimnazija Visoko	ZDK	0	0	0	0	0	0	28

59. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 30.03.2019. godine

PRVI RAZRED

RJEŠENJA ZADATAKA

Zadatak 1

Odrediti najmanju vrijednost funkcije

$$f(x) = |3x - 6| - |x + 1| + |2x + 4|.$$

Rješenje: Posmatrat ćemo četiri slučaja:

1. $x \in (-\infty, -2]$. Tada je $f(x) = 3 - 4x$, pa je $f_{\min} = 11$, za $x = -2$.

2. $x \in (-2, -1]$. Tada je $f(x) = 11$, odnosno $f_{\min} = 11$.

3. $x \in (-1, 2]$. Tada je $f(x) = -2x + 9$ i vrijedi $f_{\min} = 5$ za $x = 2$.

4. $x \in (2, +\infty)$. Tada je $f(x) = 4x - 3$ i funkcija ne dostiže minimum (jer je $f(x) > 5$ za sve $x \in (2, +\infty)$).

Dakle, najmanja vrijednost funkcije $f(x)$ je 5 i postiže se za $x = 2$.

Zadatak 2

Neka je ABC jednakokraki trougao kod kojeg je $\measuredangle BAC = 100^\circ$ i D tačka na $\overline{AC}$ takva da je BD simetrala $\measuredangle ABC$. Dokazati da je tada $|AD| + |BD| = |BC|$.

Rješenje: Pošto je ABC jednakokraki trougao i $\measuredangle BAC = 100^\circ$, to je $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = 40^\circ$. Neka je E tačka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $\overline{BE} = \overline{BD}$. Tada je DBE jednakokraki trougao. Prema uslovu zadatka je BD simetrala $\measuredangle ABC$, pa je $\measuredangle ABD = \measuredangle DBE = 20^\circ$. Sada je $\measuredangle BED = 80^\circ$. Dalje, $\measuredangle CED = 100^\circ$ i vidimo da je CED jednakokraki trougao ($\measuredangle ECD = \measuredangle CDE = 40^\circ$), pa je $\overline{DE} = \overline{EC}$. S druge strane, četverougao $ABED$ je tetivni, jer je $\measuredangle BAD + \measuredangle BAD = 180^\circ$, pa je $\overline{AD} = \overline{DE}$ (jer odgovaraju podudarnim periferijskim uglovima). Dakle, $\overline{AD} = \overline{EC}$, pa imamo

$$|BC| = |BE| + |EC| = |BD| + |AD|,$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 3

Ako su a, b, c nenegativni realni brojevi od kojih je najviše jedan jednak 0 i takvi da vrijedi $a + b + c = 1$, dokazati da je

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{c}{\sqrt{b+c}} \leq \sqrt{2}.$$

Rješenje: Pošto je b nenegativan broj, imamo

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{c}{\sqrt{b+c}} \leq \frac{a}{\sqrt{a}}+\frac{c}{\sqrt{c}}=\sqrt{a}+\sqrt{c} \leq \sqrt{2(a+c)} \leq \sqrt{2(a+b+c)}=\sqrt{2}.$$

Koristili smo nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{2} \leq \sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{c})^2}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{c} \leq \sqrt{2(a+c)}.$$

Jednakost vrijedi za $a=c=\frac{1}{2}, b=0$. Gore smo smatrali da je $a \neq 0$ i $c \neq 0$. Ako je $a=0$ ili $c=0$, onda se nejednakost lako provjerava.

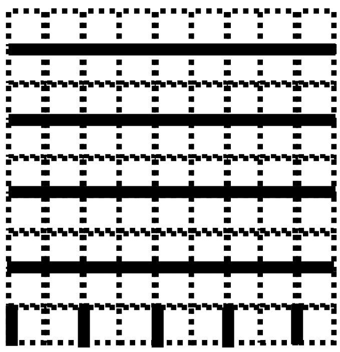
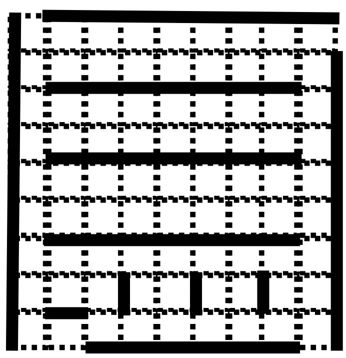
Zadatak 4

Ploča 2019×2019 je podijeljena na 2019^2 jediničnih kvadratića. Neke jedinične duži (stranice kvadratića) su obojene tako da je tačno jedna stranica svakog kvadratića obojena. Odrediti:

a) minimalan broj obojenih jediničnih duži;
b) maksimalan broj obojenih jediničnih duži.

Rješenje: Primijetimo da imamo dvije vrste jediničnih duži: jedinične duži koje su stranice za tačno jedan kvadrat (neka su to jedinične duži tipa A) i jedinične duži koje su stranice dva kvadratića (tip B). Neka imamo x jediničnih duži tipa A i y jediničnih duži tipa B (ukupan broj duži je tada $x+y$). Tada iz uslova zadatka mora vrijediti $x+2y=2019^2$ $(*)$. Međutim, primijetimo da je $x \leq 4 \cdot 2019-4$, jer su duži tipa A samo one duži koje pripadaju stranicama velikog kvadrata, a pritom ne smijemo obojiti obje duži koje zatvaraju jedan ugao kvadrata (jer onda ugaoni kvadratić ne bi zadovoljavao uslov zadatka). Dakle, $0 \leq x \leq 4 \cdot 2019-4$, odakle iz $(*)$ slijedi $2019^2-4 \cdot 2019+4 \leq 2y \leq 2019^2$, te nakon dijeljenja sa 2 imamo $\frac{2019^2-4\cdot 2019+4}{2} \leq y \leq \frac{2019^2}{2}$. Zbog toga je $x+y=2019^2-y \geq \frac{2019^2}{2}$ i $x+y=2019^2-y \leq \frac{2019^2+4\cdot 2019-4}{2}$. Kako je $x+y$ cijeli broj, to je $\frac{2019^2+1}{2} \leq x+y \leq \frac{2019^2+4\cdot 2019-5}{2}$, tj. $2038181 \leq x+y \leq 2042216$.

Na lijevoj slici je ilustrirano kako se može dostići minimum broja obojenih duži. Za prvih 2018 redova, oboje se jedinične duži između $2i-1$. i $2i$. reda ($i=1,\dots,1009$), što daje $1009 \cdot 2019$ duži. U zadnjem redu se postavi 1010 uspravnih duži koje garantuju da uslov zadatka važi za svaki kvadratić zadnjeg reda. To je ukupno $1009 \cdot 2019+1010=2038181$. Lako se vidi da na ovaj način svaki kvadratić ima obojenu tačno jednu stranicu.

Na desnoj slici je ilustrirano kako je moguće dostići maksimum. Primijetimo da je izostavljeno 5 jediničnih duži sa stranica velikog kvadrata, što daje ukupno $4 \cdot 2019 - 5$ jediničnih duži. Dalje, za svako $i = 1,2,\dots,1008$ obojimo jedinične duži između $2i.$ i $2i+1.$ reda, ali ne uključujući prvu i zadnju kolonu. To daje ukupno $1008 \cdot 2017$ duži. Konačno, u predzadnjem redu obojimo 1008 uspravnih i još jednu vodoravnu duž između zadnja 2 reda. Dakle, ukupno ima $4 \cdot 2019 - 5 + 1008 \cdot 2017 + 1009 = 2042216$ obojenih duži. Lako se vidi da na ovaj način svaki kvadratić ima obojenu tačno jednu stranicu.

Dakle, minimum je 2038181, a maksimum $2042216.$

Zadatak 5

Naći sve parove (p, q) prostih brojeva takve da je $p^2 + q^3$ potpun kub.

Rješenje 1: Neka je $p^2 + q^3 = a^3$, gdje je $a \in \mathbb{N}$. Tada je

$$p^2 = a^3 - q^3 = (a - q)(a^2 + aq + q^2).$$

Pošto je p prost broj i $a - q < a^2 + aq + q^2$, to mora biti

$$a - q = 1,$$

$$a^2 + aq + q^2 = p^2.$$

Uvrštavajući $a = 1 + q$ u drugu jednakost, nakon sređivanja dobijemo

$$3q^2 + 3q + 1 = p^2,$$

odakle je

$$3q(q + 1) = (p - 1)(p + 1). (*)$$

Pošto je q prost proj, to mora biti $q|(p - 1)$ ili $q|(p + 1)$. S druge strane, iz $p^2 = 3q^2 + 3q + 1 \leq 4q^2$ za $q > 3$ (za $q = 2$ i $q = 3$ se direktnom provjerom dobija da nema rješenja), odakle je $p \leq 2q$.

1) Ako $q|p - 1$, zbog $p - 1 \leq 2q - 1 < 2q$ mora vrijediti $p - 1 = q$, tj. $p = 3, q = 2$, što je nemoguće.
2) Ako $q|p + 1$, zbog $p + 1 \leq 2q + 1 < 3q$, to vrijedi $p + 1 = q$ ili $p + 1 = 2q$. Prvi slučaj povlači $p = 2, q = 3$, što nije rješenje. U drugom slučaju, uvrštavajući $p = 2q - 1$ u $(*)$ dobijamo rješenje $q = 7, p = 13,$ što je ujedno i jedino rješenje.

Rješenje 2: Pokazat ćemo kako se nakon dobijanja jednačina $a - q = 1$ i $a^2 + aq + q^2 = p^2$ zadatak mogže drugačije završiti. Nakon množenja posljednje jednačine sa 4 imamo:

$$(2a + q)^2 + 3q^2 = (2p)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(2p - 2a - q)(2p + 2a + q) = 3q^2.$$

Kako je q prost broj i $2p - 2a - q < 2p + 2a + q$ imamo sljedeće mogućnosti:

1) $2p - 2a - q = 1$ i $2p + 2a + q = 3q^2$

Nakon oduzimanja jednačina dobijamo $3q^2 - 1 = 2(2a + q) = 2(2(a - q) + 3q) = 4 + 6q$.Ovo je nemoguće jer lijeva strana daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 3, dok desna daje ostatak 1.

2) $2p - 2a - q = q$ i $2p + 2a + q = 3q$

Nakon oduzimanja jednačina dobija se $p = 0$, što je nemoguće.

3) $2p - 2a - q = 3$ i $2p + 2a + q = q^2$

Nakon oduzimanja imamo $q^2 - 3 = 2(2a + q) = 4 + 6q$, tj. $(q - 7)(q + 1) = 0$.

Sada se dobija rješenje $q = 7$ i $p = 13$.

59. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 30.03.2019. godine

DRUGI RAZRED

RJEŠENJA ZADATAKA

Zadatak 1

U zavisnosti od vrijednosti realnog parametra a riješiti nejednačinu u skupu realnih brojeva

$$\sqrt{x-a^2}+\sqrt{x}>2a.$$

Rješenje: Odredimo prvo definiciono područje. Iz $x-a^2 \geq 0$ i $x \geq 0$, slijedi da mora biti $x \geq a^2$.

Posmatrajmo tri moguća slučaja:

1) $a<0$
2) $a=0$
3) $a>0$

U prvom slučaju, $a<0$, data nejednačina vrijedi za svako x iz definicionog područja, tj. rješenje je $x \in [a^2,+\infty)$.

U drugom slučaju, $a=0$, data nejednačina postaje $\sqrt{x}>0$, što vrijedi za svako pozitivno x, tj. rješenje je $x \in (0,+\infty)$.

Ostalo je da još razmotrimo treći slučaj, $a>0$. Transformišimo datu nejednačinu u sljedeći oblik:

$$\sqrt{x-a^2}>2a-\sqrt{x} \qquad (1)$$

Sad imamo dva podslučaja: $2a-\sqrt{x}<0$ i $2a-\sqrt{x} \geq 0$.

Prvi podslučaj vrijedi za:

$$\sqrt{x}>2a$$

$$x>4a^2$$

Dakle, za $x>4a^2$ jednačina (1) vrijedi za svako x iz definicionog područja ($x \geq a^2$), što znači da je rješenje prvog podslučaja:

$$x \in (4a^2,+\infty) \qquad (2)$$

Drugi podslučaj vrijedi za $x \leq 4a^2$, što zajedno sa definicionim područjem daje $x \in [a^2, 4a^2]$. Sad možemo kvadrirati nejednačinu (1) i dobijamo:

$$4a\sqrt{x}>5a^2$$

Odnosno, poslije dijeljenja sa $4a$ (što smijemo raditi jer je $a>0$):

$$\sqrt{x} > \frac{5a}{4}$$

$$x > \frac{25a^2}{16}$$

pa je rješenje drugog podslučaja:

$$x \in \left(\frac{25a^2}{16}, 4a^2\right] \qquad (3)$$

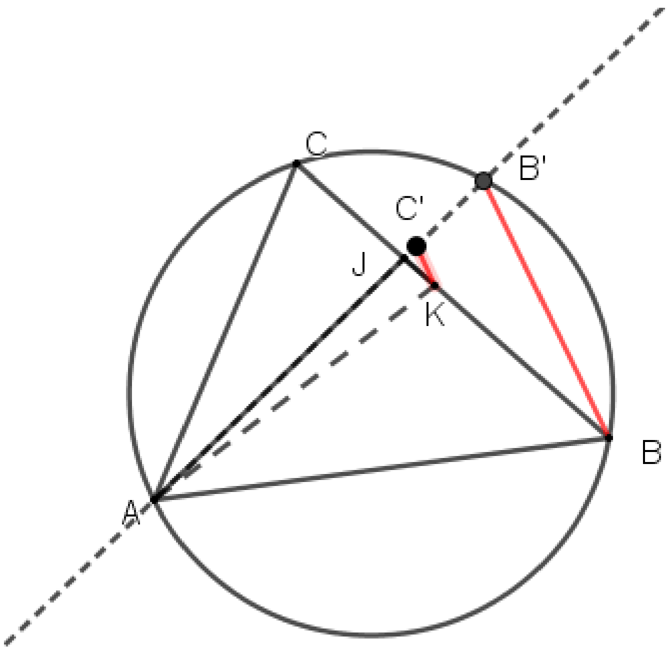
Iz (2) i (3) slijedi da je rješenje drugog slučaja $x \in \left(\frac{25a^2}{16}, +\infty\right)$. Konačno, možemo rješenje zadatka napisati kao:

$$x \in \begin{cases} [a^2, +\infty) & za\ \ a < 0 \\ (0, +\infty) & za\ \ a = 0 \\ \left(\frac{25a^2}{16}, +\infty\right) & za\ \ a > 0 \end{cases}.$$

Zadatak 2

Neka je K tačka presjeka simetrale $\measuredangle CAB$ i stranice $\overline{BC}$ trougla ABC, a J tačka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $\measuredangle CAJ = \frac{1}{3}\measuredangle CAB$. Neka su dalje C' i B' dvije tačke na pravoj AJ sa iste strane tačke A sa koje je i tačka J takve da vrijedi $\overline{AC} = \overline{AC'}$ i $\overline{AB} = \overline{AB'}$. Ako tačke A, B, B' i C leže na istoj kružnici, dokazati da su prave $C'K$ i $B'B$ paralelne.

Rješenje:



Ako stavimo da je $\measuredangle CAJ = \theta$, onda je $\measuredangle JAB = 2\theta$ i $\measuredangle JAK = \frac{\theta}{2}$.

Pošto tačke A, B, B' i C leže na istoj kružnici, vrijedi $\measuredangle CBB' = \theta$ (periferni ugao nad istim lukom kao i ugao $\measuredangle CAB'$). Dalje, pošto je $\measuredangle AB'B = \measuredangle ABB' = \frac{180°-2\theta}{2} = 90° - \theta$, uglovi $\measuredangle JBB'$ i $\measuredangle BB'J$ su komplementni, pa je AJ okomito na BC.

Iz $\measuredangle AC'C = \measuredangle ACC' = \frac{180°-\theta}{2}$ slijedi $\measuredangle JCC' = 90° - \measuredangle AC'C = \frac{\theta}{2}$. Onda je $\measuredangle C'CK = \frac{\theta}{2} = \measuredangle C'AK$, što implicira da je četverougao $AKC'C$ tetivni. Odavde slijedi $\measuredangle CKC' = \measuredangle CAC' = \theta = \measuredangle CBB'$. Pošto su to odgovarajući uglovi uz transverzalu CB, slijedi da su prave $C'K$ i $B'B$ paralelne.

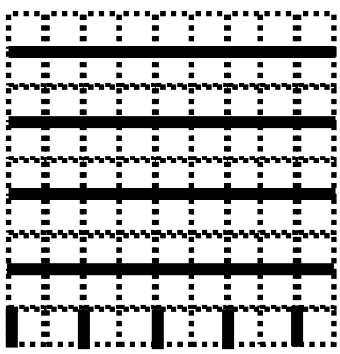
Zadatak 3

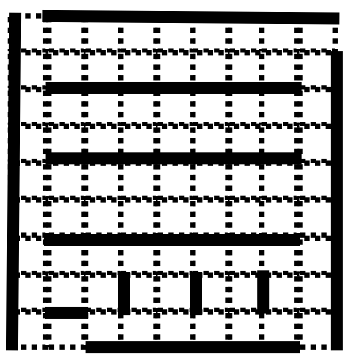
Ploča 2019×2019 je podijeljena na 2019^2 jediničnih kvadratića. Neke jedinične duži (stranice kvadratića) su obojene tako da je tačno jedna stranica svakog kvadratića obojena. Odrediti:

a) minimalan broj obojenih jediničnih duži;
b) maksimalan broj obojenih jediničnih duži.

Rješenje: Primijetimo da imamo dvije vrste jediničnih duži: jedinične duži koje su stranice za tačno jedan kvadrat (neka su to jedinične duži tipa A) i jedinične duži koje su stranice dva kvadratića (tip B). Neka imamo x jediničnih duži tipa A i y jediničnih duži tipa B (ukupan broj duži je tada $x + y$). Tada iz uslova zadatka mora vrijediti $x + 2y = 2019^2$ $(*)$. Međutim, primijetimo da je $x \leq 4 \cdot 2019 - 4$, jer su duži tipa A samo one duži koje pripadaju stranicama velikog kvadrata, a pritom ne smijemo obojiti obje duži koje zatvaraju jedan ugao kvadrata (jer onda ugaoni kvadratić ne bi zadovoljavao uslov zadatka). Dakle, $0 \leq x \leq 4 \cdot 2019 - 4$, odakle iz $(*)$ slijedi $2019^2 - 4 \cdot 2019 + 4 \leq 2y \leq 2019^2$, te nakon dijeljenja sa 2 imamo $\frac{2019^2-4\cdot 2019+4}{2} \leq y \leq \frac{2019^2}{2}$. Zbog toga je $x + y = 2019^2 - y \geq \frac{2019^2}{2}$ i $x + y = 2019^2 - y \leq \frac{2019^2+4\cdot 2019-4}{2}$. Kako je $x + y$ cijeli broj, to je $\frac{2019^2+1}{2} \leq x + y \leq \frac{2019^2+4\cdot 2019-5}{2}$, tj. $2038181 \leq x + y \leq 2042216$.

Na lijevoj slici je ilustrirano kako se može dostići minimum broja obojenih duži. Za prvih 2018 redova, oboje se jedinične duži između $2i - 1$. i $2i$. reda ($i = 1, \dots, 1009$), što daje $1009 \cdot 2019$ duži. U zadnjem redu se postavi 1010 uspravnih duži koje garantuju da uslov zadatka važi za svaki kvadratić zadnjeg reda. To je ukupno $1009 \cdot 2019 + 1010 = 2038181$. Lako se vidi da na ovaj način svaki kvadratić ima obojenu tačno jednu stranicu.





Na desnoj slici je ilustrirano kako je moguće dostići maksimum. Primijetimo da je izostavljeno 5 jediničnih duži sa stranica velikog kvadrata, što daje ukupno $4 \cdot 2019 - 5$ jediničnih duži. Dalje, za svako $i = 1,2, \dots, 1008$ obojimo jedinične duži između $2i.$ i $2i + 1.$ reda, ali ne uključujući prvu i zadnju kolonu. To daje ukupno $1008 \cdot 2017$ duži. Konačno, u predzadnjem redu obojimo 1008 uspravnih i još jednu vodoravnu duž između zadnja 2 reda. Dakle, ukupno ima $4 \cdot 2019 - 5 + 1008 \cdot 2017 + 1009 = 2042216$ obojenih duži. Lako se vidi da na ovaj način svaki kvadratić ima obojenu tačno jednu stranicu.

Dakle, minimum je 2038181, a maksimum $2042216.$

Zadatak 4

Naći sve parove (p, q) prostih brojeva takve da je $p^2 + q^3$ potpun kub.

Rješenje 1: Neka je $p^2 + q^3 = a^3$, gdje je $a \in \mathbb{N}$. Tada je

$$p^2 = a^3 - q^3 = (a - q)(a^2 + aq + q^2).$$

Pošto je p prost broj i $a - q < a^2 + aq + q^2$, to mora biti

$$a - q = 1,$$

$$a^2 + aq + q^2 = p^2.$$

Uvrštavajući $a = 1 + q$ u drugu jednakost, nakon sređivanja dobijemo

$$3q^2 + 3q + 1 = p^2,$$

odakle je

$$3q(q + 1) = (p - 1)(p + 1). (*)$$

Pošto je q prost proj, to mora biti $q|(p - 1)$ ili $q|(p + 1)$. S druge strane, iz $p^2 = 3q^2 + 3q + 1 \leq 4q^2$ za $q > 3$ (za $q = 2$ i $q = 3$ se direktnom provjerom dobija da nema rješenja), odakle je $p \leq 2q$.

3) Ako $q|p - 1$, zbog $p - 1 \leq 2q - 1 < 2q$ mora vrijediti $p - 1 = q$, tj. $p = 3, q = 2$, što je nemoguće.
4) Ako $q|p + 1$, zbog $p + 1 \leq 2q + 1 < 3q$, to vrijedi $p + 1 = q$ ili $p + 1 = 2q$. Prvi slučaj povlači $p = 2, q = 3$, što nije rješenje. U drugom slučaju, uvrštavajući $p = 2q - 1$ u $(*)$ dobijamo rješenje $q = 7, p = 13$, što je ujedno i jedino rješenje.

Rješenje 2: Pokazat ćemo kako se nakon dobijanja jednačina $a - q = 1$ i $a^2 + aq + q^2 = p^2$ zadatak mogže drugačije završiti. Nakon množenja posljednje jednačine sa 4 imamo:

$$(2a + q)^2 + 3q^2 = (2p)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(2p - 2a - q)(2p + 2a + q) = 3q^2.$$

Kako je q prost broj i $2p - 2a - q < 2p + 2a + q$ imamo sljedeće mogućnosti:

4) $2p-2a-q=1$ i $2p+2a+q=3q^2$
Nakon oduzimanja jednačina dobijamo $3q^2-1=2(2a+q)=2(2(a-q)+3q)=4+6q$.Ovo je nemoguće jer lijeva strana daje ostatak 2 pri dijeljenju sa 3, dok desna daje ostatak 1.

5) $2p-2a-q=q$ i $2p+2a+q=3q$
Nakon oduzimanja jednačina dobija se $p=0$, što je nemoguće.

6) $2p-2a-q=3$ i $2p+2a+q=q^2$
Nakon oduzimanja imamo $q^2-3=2(2a+q)=4+6q$, tj. $(q-7)(q+1)=0$.
Sada se dobija rješenje $q=7$ i $p=13$.

Zadatak 5

Neka su x,y,z pozitivni realni brojevi takvi da je $x^2+y^2+z^2=1$. Odrediti maksimalnu vrijednost izraza

$$\sqrt{xy(1-z)}+\sqrt{yz(1-x)}+\sqrt{zx(1-y)}.$$

Rješenje 1: Stavimo $W=\sqrt{xy(1-z)}+\sqrt{yz(1-x)}+\sqrt{zx(1-y)}$. Dokazat ćemo da je maksimalna vrijednost izraza W jednaka $\sqrt{3-\sqrt{3}}$. Ova vrijednost se dostiže za $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Sada ćemo dokazati da je $W\leq\sqrt{3-\sqrt{3}}$, tj. da je $W^2\leq 3-\sqrt{3}$. Iz CSB nejednakosti imamo $(xy+yz+zx)(1-z+1-x+1-y)\geq W^2$. Dakle, dovoljno je dokazati da vrijedi $(xy+yz+zx)(3-x-y-z)\leq 3-\sqrt{3}$. Kako vrijedi $xy+yz+zx\leq\frac{(x+y+z)^2}{3}\Leftrightarrow xy+yz+zx\leq x^2+y^2+z^2$, to je dovoljno dokazati da vrijedi $\frac{(x+y+z)^2}{3}\cdot(3-x-y-z)\leq 3-\sqrt{3}$. Neka je $x+y+z=t$. S jedne strane, iz nejednakosti između aritmetičke i kvadratne sredine vrijedi $\frac{t}{3}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, tj. $t\leq\sqrt{3}$. S druge strane, brojevi x,y,z pripadaju intervalu $(0,1)$, pa vrijedi $x>x^2, y>y^2, z>z^2$, tj. $t>x^2+y^2+z^2=1$. Dakle, potrebno je dokazati nejednakosti $\frac{t^2}{3}\cdot(3-t)\leq 3-\sqrt{3}$ uz uslov $1<t\leq\sqrt{3}$. Data nejednakost je ekvivalentna sa $\left(t-\sqrt{3}\right)\cdot\left(t^2-\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot t-3\sqrt{3}+3\right)\geq 0$. Kako je $t-\sqrt{3}\leq 0$, dovoljno je dokazati da je $f(t)=t^2-\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot t-3\sqrt{3}+3\leq 0$ za $1<t\leq\sqrt{3}$. Međutim, kako je ovo kvadratni trinom sa pozitivnim koeficijentom uz kvadratni član, to je dovoljno dokazati da je $f(1)\leq 0$ i $f\left(\sqrt{3}\right)\leq 0$. Kako je $f(1)=1-2\sqrt{3}<0$ i $f\left(\sqrt{3}\right)=9-6\sqrt{3}<0$, tvrdnja je zadovoljena, čime je zadatak riješen.

Rješenje 2: Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine vrijedi

$$\begin{aligned}
W &= \frac{\sqrt{\left(xy\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)\right)(1-z)}+\sqrt{\left(yz\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)\right)(1-x)}+\sqrt{\left(zx\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)\right)(1-y)}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}\\
&\leq \frac{\frac{xy\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)+1-z}{2}+\frac{yz\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)+1-x}{2}+\frac{zx\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)+1-y}{2}}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}\\
&= (xy+yz+zx)\cdot\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}+\frac{3-x-y-z}{2\cdot\sqrt{3-\sqrt{3}}}.
\end{aligned}$$

Da bismo dokazali da je $W \leq \sqrt{3-\sqrt{3}}$, treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$\left(3-\sqrt{3}\right) \cdot (xy+yz+zx) + 3 - x - y - z \leq 2 \cdot \left(3-\sqrt{3}\right).$$

Slično kao u prvom rješenju, neka je $t = x+y+z$, dobijamo $1 < t \leq \sqrt{3}$ i $xy+yz+zx \leq \frac{t^2}{3}$, pa je dovoljno dokazati nejednakost:

$$\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)t^2}{3} + 3 - t \leq 2 \cdot \left(3-\sqrt{3}\right) \iff$$

$$\left(t-\sqrt{3}\right)\left(\left(3-\sqrt{3}\right)t + 3\left(\sqrt{3}-2\right)\right) \leq 0.$$

Prva zagrada je nepozitivna, a druga je pozitivna jer je $t > 1 > \frac{3\left(\sqrt{3}-2\right)}{3-\sqrt{3}}$, pa nejednakost vrijedi.

59. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 30.03.2019. godine

TREĆI RAZRED

RJEŠENJA ZADATAKA

Zadatak 1

Riješiti jednačinu $tg^2 2x \cdot tg3x = 3tg3x - 4tg2x$ u skupu realnih brojeva.

Rješenje: Odredimo prvo definiciono područje. Zbog $tg\ 2x$ imamo $x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$; zbog $tg\ 3x$ imamo $x \neq \frac{l\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, l \in \mathbb{Z}$.

Iskoristimo formule

$$tg2x = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad tg3x = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}, \qquad t = tgx,$$

(uočimo da je $t \neq \pm 1, t \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ zbog definicionog područja).

Jednačina postaje:

$$\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2 \cdot \frac{3t-t^3}{1-3t^2} = 3 \cdot \frac{3t-t^3}{1-3t^2} - 4 \cdot \frac{2t}{1-t^2}$$

i poslije množenja sa izrazom $(1-t^2)^2(1-3t^2)$ dobijamo:

$$4t^3(3-t^2) = t(1-t^2)(3t^4 + 12t^2 + 1).$$

Jedno rješenje ove jednačine je očito $t_1 = 0 \Rightarrow tgx = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ako jednačinu podijelimo sa $t, t \neq 0$, dobijamo poslije sređivanja:

$$3t^6 + 5t^4 + t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (t^2+1)^2 \cdot (3t^2 - 1) = 0,$$

pa dakle $t^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, što je nemoguće.

Dakle, rješenja jednačine su $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

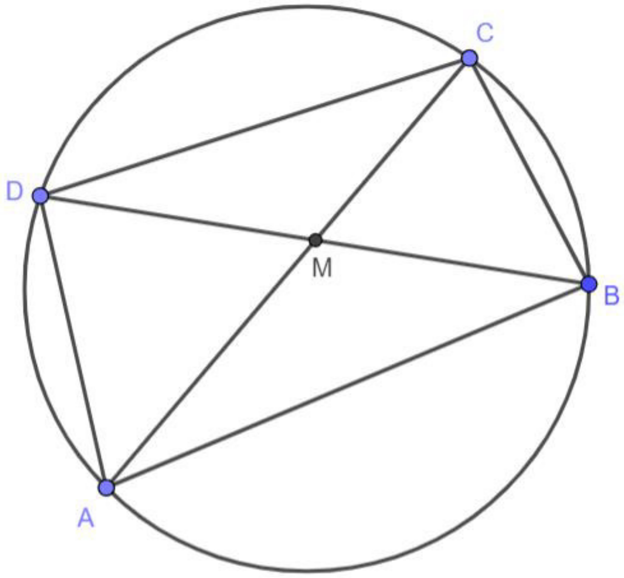
Napomena: Mogli smo obje strane polazne jednačine pomnožiti sa $cos^2 2x\ cos3x$, pa, između ostalog, iskoristiti adicione formule i formule za proizvod trigonometrijskih funkcija.

Zadatak 2

Dijagonale tetivnog četverougla $ABCD$ sijeku se u tački M. Dokazati da je tačka M središte dijagonale $\overline{BD}$ ako i samo ako je

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}.$$

Rješenje: Primjenjujući sinusnu teoremu na trouglove ABD i CBD, te koristeći činjenicu da je $\measuredangle BDC = \measuredangle BAC$ i $\measuredangle CBD = \measuredangle CAD$ (periferijski uglovi nad istom tetivom), dobijamo $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\sin\measuredangle ADB}{\sin\measuredangle ABD}$ i $\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \frac{\sin\measuredangle CBD}{\sin\measuredangle CDB} = \frac{\sin\measuredangle CAD}{\sin\measuredangle BAC}$. S druge strane, iz sinusne teoreme za trouglove AMD i ABM imamo $\frac{\sin\measuredangle DAC}{\sin\measuredangle BDA} = \frac{\overline{DM}}{\overline{AM}}$ i $\frac{\sin\measuredangle BAC}{\sin\measuredangle ABD} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}}$. Sada je $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \frac{\sin\measuredangle ADB}{\sin\measuredangle ABD} = \frac{\sin\measuredangle CAD}{\sin\measuredangle BAC} \Leftrightarrow \frac{\sin\measuredangle DAC}{\sin\measuredangle BDA} = \frac{\sin\measuredangle BAC}{\sin\measuredangle ABD} \Leftrightarrow \frac{\overline{DM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \overline{DM} = \overline{BM}, q.e.d.$



Zadatak 3

Posmatrajmo sve prirodne brojeve a, b, c i d takve da je $a + b + c + d = 54$. Odrediti najmanju moguću vrijednost broja $NZS(a, b, c, d)$.

Rješenje 1: Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathrm{a} \le \mathrm{b} \le \mathrm{c} \le \mathrm{d}$. Neka je $\mathrm{A} = NZS(a, b, c, d)$. Tada je $A = ax = by = cz = du$, za neke prirodne brojeve x, y, z, u takve da je $x \ge y \ge z \ge u$. Odavde je

$$a = \frac{A}{x}, b = \frac{A}{y}, c = \frac{A}{z}, d = \frac{A}{u}.$$

Na osnovu toga imamo

$$54 = A\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u}\right).$$

Racionalan broj

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}$$

označimo sa $\frac{s}{t}$, pri čenu su s i t relativno prosti. Tada je $54 = A \cdot \frac{s}{t}$, pa je

$$A = \frac{54\,t}{s}.$$

Mi tražimo najmanju moguću vrijednost broja A. To će se dogoditi ako i samo ako racionalan broj $\frac{s}{t}$ dostiže najveću moguću vrijednost.

Primijetimo da je $x \geq y \geq z \geq u \geq 1$, pa je

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{u} \leq 1.$$

Zbog toga je najveća moguća vrijednost racionalnog broja $\frac{s}{t}$ jednaka 4 i ona se dostiže za $x = y = z = u = 1$. Tada je $a = b = c = d$, pa je $4a = 54$. Kako $4 \nmid 54$, to maksimalna vrijednost racionalnog broja $\frac{s}{t}$ je manja u četiri. Dakle, bar jedan od prirodnih brojeva x, y, z, u je veći od jedan. Kako je x veći ili jednak ostalim brojevima y, z i u, to ćemo za x uzeti $x = 2$ i $y = z = u = 1$. Tada je $\frac{s}{t} = \frac{1}{2} + 1 + 1 + 1 = \frac{5}{2}$, pa je $A = \frac{108}{5} \notin \mathbb{N}$. Dakle, ni ovaj slučaj nije moguć.

Razmotrimo sljedeći najoptimalniji slučaj: $x = y = 2$, i $z = u = 1$. Tada je $\frac{s}{t} = 3$ i $a = b = \frac{A}{2}$ i $c = d = A$. Tako imamo $54 = 3A$, tj. $A = 18$. Kako je 18 prirodan broj, to je 18 najmanja moguća vrijednost za $NZS(a, b, c, d)$ i ona se dostiže za $a = b = 9$ i $c = d = 18$.

Rješenje 2: Neka je $a \leq b \leq c \leq d$. Primijetimo da je moguće da $NZS(a, b, c, d)$ bude 18 za $a = b = 9$ i $c = d = 18$. Dokažimo da ne može biti manji. Pretpostavimo suprotno. Kako je $4d \geq a + b + c + d = 54$, to je $NZS(a, b, c, d) \geq d \geq 14$.Ostaju nam sljedeće mogućnosti:

1) $NZS(a, b, c, d) = 14$
   Ako je $a = 14$, onda je i $b = c = d = 14$, što je nemoguće. U suprotnom je $a \leq 7$ (jer $a|14$) pa je $a + b + c + d \leq 7 + 14 + 14 + 14 < 54$. Kontradikcija.
2) $NZS(a, b, c, d) = 15$
   Ako je $a = 15$, onda je i $b = c = d = 15$, što je nemoguće. U suprotnom je $a \leq 5$ (jer $a|15$) pa je $a + b + c + d \leq 5 + 15 + 15 + 15 < 54$. Kontradikcija.
3) $NZS(a, b, c, d) = 16$
   Ako je $b \leq 8$ tada je $a + b + c + d \leq 8 + 8 + 16 + 16 < 54$. Kontradikcija. Dakle, $b = 16$, pa je i $c = d = 16$, što povlači $a = 6$, što je nemoguće (jer 6 ne dijeli 16).
4) $NZS(a, b, c, d) = 17$
   Ako je $a = 17$, onda je i $b = c = d = 17$, što je nemoguće. U suprotnom je $a = 1$ (jer $a|17$) pa je $a + b + c + d \leq 1 + 17 + 17 + 17 < 54$. Kontradikcija.

Dakle, najmanja moguća vrijendost $NZS(a, b, c, d)$ je 18.

Zadatak 4

Dvije osobe A i B igraju igru sa kamenčićima. Na početku igre je data gomila sa N kamenčića, $N \geq 2$. Igrači igraju naizmjenično, s tim da igru započinje A. U svakom potezu igrači uklanjaju određeni broj kamenčića sa gomile. U svom prvom potezu, igrač A mora ukloniti najmanje 1, a najviše $N-1$ kamenčić iz gomile. Dalje, ako igrač koji je na potezu ukloni k kamenčića, onda sljedeći igrač mora ukloniti najmanje 1, a najviše $2k - 1$ kamenčića u svom potezu. Igrač koji ukloni posljednji kamenčić pobjeđuje u igri. Odredite sve vrijednosti broja N za koje B ima pobjedničku strategiju.

Rješenje: Dokazat ćemo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju ako i samo ako je N stepen broja dva. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Za $n = 2$ očigledno drugi igrač ima pobjedničku staretegiju. Primijetimo dalje da za sve neparne N prvi igrač ima pobjedničku strategiju, jer može u svakom potezu uzimati 1 kamenčić, nakon čega drugi igrač mora uzeti također 1 kamenčić. Jasno je da na ovaj način prvi igrač uzima zadnji kamenčić i samim tim pobjeđuje.

Dalje, primijetimo da kad god nekom igraču ostane neparan broj kamenčića, on može pobijediti koristeći prethodno opisanu strategiju. Zbog toga, za parno N oba igrača su primorana da u svakom svom potezu uzimaju paran broj kamenčića, jer će inače izgubiti. Sada dokažimo da za broj N pobjedničku strategiju ima onaj igrač koji ima i pobjedničku strategiju za $\frac{N}{2}$ (tada na osnovu induktivne pretpostavke slijedi tvrdnja zadatka). Njegova strategija se sastoji u tome da „kopira“ strategiju za $\frac{N}{2}$ kamenčića, samo uzimajući u svakom potezu duplo veći broj (pri tome računajući da je protivnik uzeo duplo veći broj, što je moguće jer je protivnik primoran uvijek uzeti paran broj). Dakle, ako je za $\frac{N}{2}$ kamenčića redoslijed poteza $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ (ovi brojevi govore koliko je koji igrač uzeo kamenčića, pri čemu brojevi nisu nezavisni), tada će za N kamenčića redosljed poteza biti $2a_1, 2b_1, 2a_2, 2b_2 \ldots$ Primijetimo da je ovo validna strategija, jer ako je $a_i < 2b_{i-1}$ onda je i $2a_1 < 2 \cdot 2b_{i-1}$, i da će na ovaj način pobijediti isti onaj igrač koji pobjeđuje za $\frac{N}{2}$. Ovim je dokaz završen.

Zadatak 5

Ako je $n \geq 3$ prirodan broj i $x_i (i = 1,2, \ldots, n)$ pozitivni realni brojevi, dokazati da je

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq \frac{x_1 + x_2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_n + x_1}{x_1 + x_2}.$$

Rješenje: Nejednakost je ekvivalentna sa

$$\left(\frac{x_1}{x_2} + 1\right) + \left(\frac{x_2}{x_3} + 1\right) + \cdots + \left(\frac{x_n}{x_1} + 1\right) - \left(\frac{x_1 + x_2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_3 + x_4} + \cdots + \frac{x_n + x_1}{x_1 + x_2}\right) \geq n$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_2 + x_3}\right) + \cdots + (x_n + x_1)\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1 + x_2}\right) \geq n$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2) \cdot x_3}{(x_2 + x_3) \cdot x_2} + \frac{(x_2 + x_3) \cdot x_4}{(x_3 + x_4) \cdot x_3} + \cdots + \frac{(x_n + x_1) \cdot x_2}{(x_1 + x_2) \cdot x_1} \geq n.$$

Posljednja nejednakost je neposredna posljedica nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine (proizvod svih razlomaka na lijevoj strani je jednak 1).

59. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 30.03.2019. godine

ČETVRTI RAZRED

Zadatak 1

Naći sve pozitivne realne brojeve takve da su cijeli dio tog broja, razlomljeni dio tog broja i sam taj broj (ne nužno u tom poretku) tri uzastopna člana

a) aritmetičke progresije,
b) geometrijske progresije.

(Cijeli dio broja x je najveći cijeli broj koji nije veći od x, a razlomljeni dio broja x je razlika tog broja i njegovog cijelog dijela. Na primjer, cijeli dio od $3{,}14$ je 3, a razlomljeni dio je $0{,}14$.)

Rješenje: Za dati pozitivan broj x označimo sa $[x]$ njegov cijeli dio, a sa $\{x\}$ njegov razlomljeni dio. Tada je $x = [x] + \{x\}$, $[x] \leq x$, $0 \leq \{x\} < 1$.

a) Neka su brojevi $\{x\}$, $[x]$ i x tri uzastopna člana aritmetičke progresije. Ako je $0 < x < 1$, onda je $[x] = 0$ i $x = \{x\}$, pa je $[x] < x = \{x\}$, pa ne možemo imati aritmetičku progresiju.
Ako je $x \geq 1$, onda je $\{x\} < [x] \leq x$, pa brojevi moraju biti u tom poretku, ili obrnutom. Dakle, ne umanjujući općenitost, možemo uzeti da vrijedi poredak $\{x\}$, $[x]$, x. Zbog osobine koju imaju uzastopni članovi aritmetičke progresije, mora biti
$$x - [x] = [x] - \{x\}.$$
Kako je $x = [x] + \{x\}$, to iz gornje jednakosti imamo $2\{x\} = [x]$. Otud, zbog $0 \leq \{x\} < 1$, slijedi da je $\{x\} = 0$ ili $\{x\} = \frac{1}{2}$.

Ako je $\{x\} = 0$, onda je $x = [x]$, pa dobijemo da je $[x] = 0$ i $x = 0$, što je suprotno preptostavci da je x pozitivan broj.

Ako je $\{x\} = \frac{1}{2}$, onda je $[x] = 1$, pa je $x = 1\frac{1}{2}$. Brojevi $\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}$ čine traženu aritmetičku progresiju.

b) Neka su brojevi $\{x\}$, $[x]$ i x tri uzastopna člana geometrijske progresije. Kako nijedan od njih ne smije biti jednak nuli, to mora biti $x > 1$ i $x \notin \mathbb{N}$. Tada mora vrijediti $\{x\} < [x] \leq x$, pa ovi članovi u geometirjskoj progresiji dolaze u tom ili obrnutom poretku. Tada je
$$[x]^2 = x\{x\},$$
odakle imamo, koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine,
$$[x] = \sqrt{x\{x\}} \leq \frac{x+\{x\}}{2} = \frac{[x]+2\{x\}}{2} = \frac{1}{2}[x] + \{x\}.$$
Dakle, mora vrijediti
$$1 \leq [x] \leq 2\{x\} < 2,$$
odakle je $[x] = 1$. Sada je

$$1 = (1 + \{x\})\{x\} = \{x\} + \{x\}^2.$$

Rješavajući posljednju kvadratnu jednadžbu, dobijemo da je $\{x\} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ jer drugo rješenje otpada ($\{x\}$ mora biti pozitivan). Tada je $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, pa tražena geometrijska progresija glasi $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Zadatak 2

Posmatrajmo sve prirodne brojeve a, b, c i d takve da je $a + b + c + d = 54$. Odrediti najmanju moguću vrijednost broja $NZS(a, b, c, d)$.

Rješenje 1: Bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \leq b \leq c \leq d$. Neka je $A = NZS(a, b, c, d)$. Tada je $A = ax = by = cz = du$, za neke prirodne brojeve x, y, z, u takve da je $x \geq y \geq z \geq u$. Odavde je

$$a = \frac{A}{x}, b = \frac{A}{y}, c = \frac{A}{z}, d = \frac{A}{u}.$$

Na osnovu toga imamo

$$54 = A\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u}\right).$$

Racionalan broj

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u}$$

označimo sa $\frac{s}{t}$, pri čenu su s i t relativno prosti. Tada je $54 = A \cdot \frac{s}{t}$, pa je

$$A = \frac{54\,t}{s}.$$

Mi tražimo najmanju moguću vrijednost broja A. To će se dogoditi ako i samo ako racionalan broj $\frac{s}{t}$ dostiže najveću moguću vrijednost.

Primijetimo da je $x \geq y \geq z \geq u \geq 1$, pa je

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{u} \leq 1.$$

Zbog toga je najveća moguća vrijednost racionalnog broja $\frac{s}{t}$ jednaka 4 i ona se dostiže za $x = y = z = u = 1$. Tada je $a = b = c = d$, pa je $4a = 54$. Kako $4 \nmid 54$, to maksimalna vrijednost racionalnog broja $\frac{s}{t}$ je manja u četiri. Dakle, bar jedan od prirodnih brojeva x, y, z, u je veći od jedan. Kako je x veći ili jednak ostalim brojevima y, z i u, to ćemo za x uzeti $x = 2$ i $y = z = u = 1$. Tada je $\frac{s}{t} = \frac{1}{2} + 1 + 1 + 1 = \frac{5}{2}$, pa je $A = \frac{108}{5} \notin \mathbb{N}$. Dakle, ni ovaj slučaj nije moguć.

Razmotrimo sljedeći najoptimalniji slučaj: $x = y = 2$, i $z = u = 1$. Tada je $\frac{s}{t} = 3$ i $a = b = \frac{A}{2}$ i $c = d = A$. Tako imamo $54 = 3A$, tj. $A = 18$. Kako je 18 prirodan broj, to je 18 najmanja moguća vrijednost za $NZS(a, b, c, d)$ i ona se dostiže za $a = b = 9$ i $c = d = 18$.

Rješenje 2: Neka je $a \leq b \leq c \leq d$. Primijetimo da je moguće da $NZS(a, b, c, d)$ bude 18 za $a = b = 9$ i $c = d = 18$. Dokažimo da ne može biti manji. Pretpostavimo suprotno. Kako je $4d \geq a + b + c + d = 54$, to je $NZS(a, b, c, d) \geq d \geq 14$.Ostaju nam sljedeće mogućnosti:

1) $NZS(a, b, c, d) = 14$
   Ako je $a = 14$, onda je i $b = c = d = 14$, što je nemoguće. U suprotnom je $a \leq 7$ (jer $a|14$) pa je $a + b + c + d \leq 7 + 14 + 14 + 14 < 54$. Kontradikcija.
2) $NZS(a, b, c, d) = 15$
   Ako je $a = 15$, onda je i $b = c = d = 15$, što je nemoguće. U suprotnom je $a \leq 5$ (jer $a|15$) pa je $a + b + c + d \leq 5 + 15 + 15 + 15 < 54$. Kontradikcija.
3) $NZS(a, b, c, d) = 16$
   Ako je $b \leq 8$ tada je $a + b + c + d \leq 8 + 8 + 16 + 16 < 54$. Kontradikcija. Dakle, $b = 16$, pa je i $c = d = 16$, što povlači $a = 6$, što je nemoguće (jer 6 ne dijeli 16).
4) $NZS(a, b, c, d) = 17$
   Ako je $a = 17$, onda je i $b = c = d = 17$, što je nemoguće. U suprotnom je $a = 1$ (jer $a|17$) pa je $a + b + c + d \leq 1 + 17 + 17 + 17 < 54$. Kontradikcija.

Dakle, najmanja moguća vrijendost $NZS(a, b, c, d)$ je 18.

Zadatak 3

Dvije osobe A i B igraju igru sa kamenčićima. Na početku igre je data gomila sa N kamenčića, $N \geq 2$. Igrači igraju naizmjenično, s tim da igru započinje A. U svakom potezu igrači uklanjaju određeni broj kamenčića sa gomile. U svom prvom potezu, igrač A mora ukloniti najmanje 1, a najviše $N - 1$ kamenčić iz gomile. Dalje, ako igrač koji je na potezu ukloni k kamenčića, onda sljedeći igrač mora ukloniti najmanje 1, a najviše $2k - 1$ kamenčića u svom potezu. Igrač koji ukloni posljednji kamenčić pobjeđuje u igri. Odredite sve vrijednosti broja N za koje B ima pobjedničku strategiju.

Rješenje: Dokazat ćemo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju ako i samo ako je N stepen broja dva. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Za $n = 2$ očigledno drugi igrač ima pobjedničku staretegiju. Primijetimo dalje da za sve neparne N prvi igrač ima pobjedničku strategiju, jer može u svakom potezu uzimati 1 kamenčić, nakon čega drugi igrač mora uzeti također 1 kamenčić. Jasno je da na ovaj način prvi igrač uzima zadnji kamenčić i samim tim pobjeđuje.

Dalje, primijetimo da kad god nekom igraču ostane neparan broj kamenčića, on može pobijediti koristeći prethodno opisanu strategiju. Zbog toga, za parno N oba igrača su primorana da u svakom svom potezu uzimaju paran broj kamenčića, jer će inače izgubiti. Sada dokažimo da za broj N pobjedničku strategiju ima onaj igrač koji ima i pobjedničku strategiju za $\frac{N}{2}$ (tada na osnovu induktivne pretpostavke slijedi tvrdnja zadatka). Njegova strategija se sastoji u tome da

„kopira“ strategiju za $\frac{N}{2}$ kamenčića, samo uzimajući u svakom potezu duplo veći broj (pri tome računajući da je protivnik uzeo duplo veći broj, što je moguće jer je protivnik primoran uvijek uzeti paran broj). Dakle, ako je za $\frac{N}{2}$ kamenčića redoslijed poteza $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ (ovi brojevi govore koliko je koji igrač uzeo kamenčića, pri čemu brojevi nisu nezavisni), tada će za N kamenčića redoslјed poteza biti $2a_1, 2b_1, 2a_2, 2b_2 \dots$ Primijetimo da je ovo validna strategija, jer ako je $a_i < 2b_{i-1}$ onda je i $2a_1 < 2 \cdot 2b_{i-1}$, i da će na ovaj način pobijediti isti onaj igrač koji pobjeđuje za $\frac{N}{2}$. Ovim je dokaz završen.

Zadatak 4

Neka je T težište trougla ABC, neka su a, b, c dužine njegovih stranica, te $x = \measuredangle CAT$, $y = \measuredangle CBT$. Ako opisana kružnica oko trougla ACT dodiruje pravu AB, dokazati da je:

a) $a^2 + b^2 = 2c^2$,

b) $sinx + siny \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Kada važi znak jednakosti?

Rješenje: a) Neka je D središte stranice $\overline{AB}$. Označimo dužine težišnica trougla standardno sa m_a, m_b, m_c. Znamo da je $|\overline{DT}| = \frac{1}{3} m_c$, a potencija tačke D u odnosu na opisanu kružnicu trougla ATCjednaka je $|\overline{DT}| \cdot |\overline{DC}| = |\overline{DA}|^2 \Rightarrow \frac{1}{3} m_c^2 = \frac{c^2}{4} \Rightarrow m_c^2 = \frac{3c^2}{4}$.

Pošto je $m_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} \Rightarrow 3c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2c^2$.

b) Iz jednakosti: $m_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}, m_b^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}$ i $a^2 + b^2 = 2c^2$ dobije se $m_a^2 = \frac{3b^2}{4}$ i $m_b^2 = \frac{3a^2}{4}$, dakle $m_a = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ i $m_b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Neka je P površina trougla ABC.Lako se dokazuje da je tada površina trougla ATC jednaka $\frac{P}{3}$, no ona je također jednaka

$$\frac{P}{3} = \frac{b \cdot \frac{2}{3} m_a \cdot sinx}{2} \Rightarrow sinx = \frac{P}{bm_a} = \frac{2P}{b^2\sqrt{3}}.$$

Analogno se dobije $siny = \frac{2P}{a^2\sqrt{3}}$, pa je $sinx + siny = 2P\left(\frac{1}{a^2\sqrt{3}} + \frac{1}{b^2\sqrt{3}}\right) = \frac{2P(a^2+b^2)}{a^2b^2\sqrt{3}}$.

Dalje, $P = \frac{absin\gamma}{2}$, a iz kosinusne teoreme imamo da je

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma = \frac{a^2 + b^2}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 4abcos\gamma,$$

pa je

$$sinx + siny = \frac{\frac{2absin\gamma}{2} \cdot 4abcos\gamma}{a^2b^2\sqrt{3}} = \frac{2sin2\gamma}{\sqrt{3}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Znak jednakosti važi ako je $sin2\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 45^0$. Tada je $a^2 + b^2 = 2ab\sqrt{2}$. Dijeleći ovu jednakost sa b^2, možemo dobiti da je $\frac{a}{b} = \sqrt{2} + 1$ ili $\frac{a}{b} = \sqrt{2} - 1$.

Imajući u vidu da je $\frac{a}{b} = \frac{sin\alpha}{sin\beta}$, te da je $\beta = 135^0 - \alpha$, lako se dobije da je $\alpha = 22{,}5^0$ i $\beta = 112{,}5^0$ ili $\alpha = 112{,}5^0$ i $\beta = 22{,}5^0$.

Zadatak 5

Za trougao kažemo da je *poseban* ako svi njegovi vrhovi imaju cjelobrojne koordinate i ako oni leže na grafiku funkcije $y = p(x)$, gdje je $p(x)$ polinom sa cjelobrojnim koeficijentima i koeficijentom uz najveći stepen jednakim 1. Za prirodan broj n kažemo da je *poseban* ako postoji *poseban* trougao čija je površina jednaka upravo n.

a) Pokazati da postoji polinom $p(x)$ stepena 3 takav da su *posebni* brojevi oni i samo oni koji su djeljivi sa 3.
b) Da li postoji polinom $p(x)$ takav da je svaki prirodan broj *poseban*? Obrazložiti!

Rješenje: Neka su tačke $(a, p(a)), (b, p(b)), (c, p(c))$ vrhovi trougla, gdje su a, b, c cijeli brojevi. Površina trougla se može izračunati po formuli

$$A(a, b, c; p) = \frac{1}{2}\left|a(p(b) - p(c)) + b(p(c) - p(a)) + c(p(a) - p(b))\right|.$$

a) Pokažimo da polinom $p(x) = x^3$ ima traženu osobinu. Nije teško provjeriti da je površina trougla tada jednaka

$$\frac{1}{2}|(a - b)(a - c)(b - c)(a + b + c)|.$$

Primijetimo da za bilo koje cijele brojeve a, b, c posljednji izraz je djeljiv sa 3: Ako bilo koja dva od njih daju isti ostatak pri djeljenju sa 3, conda je njihova razlika djeljiva sa 3; ako svaki od njih daje različit ostatak pri djeljenju sa 3, onda njihov zbir $a + b + c$ je djeljiv sa 3. Dakle, svaki *poseban* prirodan broj je djeljiv sa 3.

Dalje, ako uzmemo $a = b - 1$ i $c = b + 1$ za bilo koji prirodan broj b, tada se površina svodi na $\frac{1}{2}|1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3b| = 3b$. Dakle, svaki prirodan broj djeljiv sa 3 je *poseban* za $p(x) = x^3$.

b) Posmatrajmo polinom $p(x) = x^3 + x^2$. Tada je

$$A(a, b, c; p) = \frac{1}{2}|(a - b)(a - c)(b - c)(a + b + c + 1)|.$$

Pokažimo da se svaki prirodan broj n može napisati u obliku $A(a, b, c; p)$ za neke cijele brojeve a, b, c i polinom $p(x) = x^3 + x^2$.

Ako je $n \equiv 1 (mod\ 3)$, pa je $n = 3k + 1$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$, pa imamo $A(-k, -k - 1, -k - 2; p) = 3k + 1$.

Ako je $n \equiv 2 (mod\ 3)$, pa je $n = 3k + 2$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$, pa imamo $A(-k, -k - 1, -k - 2; p) = 3k + 2$.

Ako je $n \equiv 3 (mod\ 9)$, pa je $n = 9k + 3$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$, pa imamo $A(-k + 1, -k - 1, -k - 2; p) = 9k + 3$.

Ako je $n \equiv 6 (mod\ 9)$, pa je $n = 9k + 6$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$, pa imamo $A(k+2, k, k-1; p) = 9k + 6$.

Ako je $n \equiv 0 (mod\ 9)$, pa je $n = 9k$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$, pa imamo $A(k+1, k, k-2; p) = 9k$.

Dakle, svaki prirodan broj je poseban za polinom $p(x) = x^3 + x^2$.