



## **UDRUŽENJE MATEMATIČARA TUZLANSKOG KANTONA – UM TK**

Univerzitetska 4, 75000 Tuzla, Bosna i Hercegovina

ID broj: 4209854700007; Žiro račun: 3383002261804115 Unicredit bank

Tel./Fax: (++387)(35) 320-895, (++387)(35) 320-861

[www.umtk.info](http://www.umtk.info)

## **FEDERALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA**

**Gradačac, 15. maj 2010. godine**

## Rješenja zadataka VI razreda

**Zadatak 1.** Jedan vinograd mogu da okopaju 12 radnika za 35 dana. Poslije 14 dana rada razboljela su se 3 radnika i prestala s radom. Nakon 8 dana 1 radnik je ozdravio i vratio se na posao. Koliko je dana još potrebno radnicima da završe okopavanje vinograda?

**Rješenje.-** I način

Za okopavanje cijelog vinograda potrebno je isplatiti ukupno  $12 \cdot 35 = 420$  dnevica. Nakon 14 dana zarađeno je  $12 \cdot 14 = 168$  dnevica. U narednih 8 dana radilo je 9 radnika i zaradilo još 72 dnevica. Tako je preostalo da se 10 radnika za  $x$  dana zaradi preostalih  $420 - 168 - 72 = 180$  dnevica. Dakle, iz  $10x = 180$  slijedi da je radnicima potrebno još  $x = 18$  dana da okopaju cio vinograd.

II način

1 radnik za jedan dan okopa  $\frac{1}{12 \cdot 35}$  vinograda

12 radnika za 14 dana okopa  $\frac{12 \cdot 14}{12 \cdot 35} = \frac{14}{35}$  vinograda

9 radnika za 8 dana okopa  $\frac{72}{12 \cdot 35} = \frac{6}{35}$  vinograda

10 radnika za  $x$  dana okopa  $\frac{10x}{12 \cdot 35} = \frac{15}{35} (= 1 - \frac{20}{35})$  vinograda, odakle se dobije  $x = 18$

**Zadatak 2.** Odrediti pet različitih racionalnih brojeva koji su manji od  $-\frac{1}{2}$  i veći od  $-\frac{7}{12}$ , a kojima su brojnik i nazivnik uzajamno prosti brojevi.

**Rješenje.** Prema uvjetima zadatka je

$$-\frac{7}{12} < \frac{m}{n} < -\frac{1}{2} = -\frac{6}{12},$$

gdje su  $m$  i  $n$  relativno prosti brojevi.

Proširivanjem razlomaka sa 2, imamo

$$-\frac{14}{24} < \frac{m}{n} < -\frac{12}{24},$$

pa možemo izabrati jedan traženi racionalni broj:  $\frac{m}{n} = -\frac{13}{24}$ .

Proširivanjem razlomaka brojem 3, imamo

$$-\frac{21}{36} < \frac{m}{n} < -\frac{18}{36},$$

te je moguće dobiti još jedan traženi racionalan broj:  $\frac{m}{n} = -\frac{19}{36}$ .

Polazne razlomke proširimo sada sa 4

$$-\frac{28}{48} < \frac{m}{n} < -\frac{24}{48},$$

odakle imamo još jedan traženi broj:  $\frac{m}{n} = -\frac{25}{48}$ .

Nakon proširivanja sa 5, imamo

$$-\frac{35}{60} < \frac{m}{n} < -\frac{30}{60},$$

te je:  $\frac{m}{n} = -\frac{31}{60}$ .

I konačno, nakon proširivanja sa 6, tj. iz

$$-\frac{42}{72} < \frac{m}{n} < -\frac{36}{72},$$

dobijemo i peti traženi racionalni broj:  $\frac{m}{n} = -\frac{41}{72}$  ili  $\frac{m}{n} = -\frac{37}{72}$ .

**Zadatak 3.** U pravougaoniku  $ABCD$  je  $AB = 2BC$ . Na stranici  $AB$  data je tačka  $P$  takva da je  $\angle APD = \angle DPC$ . Odrediti taj ugao.

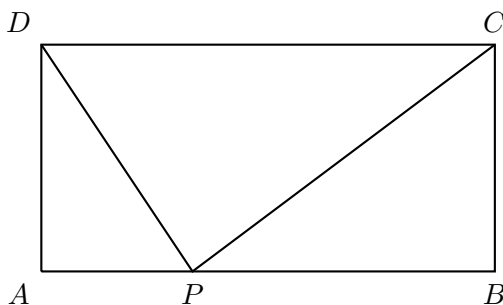
**Rješenje.** Uvedimo oznaku:  $\varphi = \angle APD = \angle DPC$ . Iz trougla  $\triangle PAD$  slijedi da je  $\angle ADP = 90^\circ - \varphi$ , pa imamo  $\angle PDC = \varphi$ . To znači da je trougao  $\triangle PDC$  jednakokraki i vrijedi  $PC = DC = AB = 2BC$  (na osnovu pretpostavke zadatka), odakle slijedi da je i trougao  $\triangle PBC$  polovina jednakostraničnog trougla. Zbog toga je  $\angle BPC = 30^\circ$ . Jednostavno je uočiti sljedeće:

$$\angle APD + \angle DPC + \angle BPC = 180^\circ,$$

odnosno

$$2\varphi + 30^\circ = 180^\circ,$$

odakle je traženi ugao  $\varphi = 75^\circ$ .



**Zadatak 4.** Tri jabuke su teške kao i 4 kruške, a 4 jabuke su teške kao i 5 narandži. Osim toga, 7 krušaka košta koliko 6 narandži. Šta je skuplje: kilogram krušaka ili kilogram narandži?

**Rješenje.** Uvedimo kraće oznake:  $k$  - kruška,  $j$  - jabuka,  $n$  - narandža,  $c_k$  - cijena krušaka,  $c_n$  - cijena narandži. Prema uvjetima zadatka mamo:

$$\begin{aligned} 3j &= 4k \Rightarrow k = \frac{3}{4}j, \\ 4j &= 5n \Rightarrow n = \frac{4}{5}j, \\ 7k \cdot c_k &= 6n \cdot c_n \Leftrightarrow \frac{21}{4}c_k = \frac{24}{5}c_n \Leftrightarrow c_k = \frac{96}{105}c_n < c_n. \end{aligned}$$

Dakle, manja je cijena jednog kilograma krušaka nego cijena jednog kilograma narandži (skuplje su narandže).

### Rješenja zadataka za VII razred

**Zadatak 1.** U tek posjećenom stablu ima 2200 kg a od toga je 65% tečnosti. Nakon dvije sedmice to stablo se djelimično osušilo i sada ima 45% tečnosti. Koliko kilograma tečnosti je isparilo iz tog stabla?

**Rješenje.** Kako tečnost isparava, a suha materija ne, to je bitno uočiti koliko suhe materije ima u stablu. Stablo se sastoji od suhe materije i tečnosti. Zbog toga je suhe materije  $(100 - 65)\% = 35\%$ . Dakle, težina suhe materije je

$$a = \frac{2200 \cdot 35}{100} \text{ kg} = 770 \text{ kg}.$$

Neka stablo, nakon dvije sedmice, ima težinu  $x$  kg. Tu se nalazi 770 kg suhe mase. Procentualno suhe mase je  $(100 - 45)\% = 55\%$ . Dakle,

$$\frac{x \cdot 55}{100} = 770 \text{ kg}.$$

Odavde je  $x = 1400 \text{ kg}$ . Tečnosti je isparilo  $2200 \text{ kg} - 1400 \text{ kg} = 800 \text{ kg}$ .

**Zadatak 2.** Tačka  $M$  dijeli stranicu  $AB$  jednakostraničnog trougla  $ABC$  u omjeru  $3 : 2$ . Iz tačke  $M$  povučene su normale  $MD$  i  $ME$  na stranice  $BC$  i  $AE$  respektivno.

- Izraziti dužine tih normala preko dužine  $a$  stranice  $AB$  trougla  $ABC$ .
- Izračunati omjere  $AE : EC$  i  $BD : DC$ .

**Rješenje.** Iz omjera  $AM : MB = 3 : 2$  slijedi  $AM = \frac{3}{2} MB$ . Kako je

$$AB = AM + MB = \frac{3}{2} MB + MB = \frac{5}{2} MB.$$

Dakle,

$$MB = \frac{2}{5} AB = \frac{2}{5} a.$$

Nadalje, imamo

$$MA = \frac{3}{5} a.$$

Trouglovi  $AME$  i  $MBD$  su pravougli sa oštrim uglovima od  $30^\circ$  i  $60^\circ$ , pa su oni polovine jednakostraničnih trouglova sa stranicama  $AM$  i  $MB$  respektivno. Duži  $MD$  i  $ME$  su visine jednakostraničnih trouglova sa stranicama  $AM$  i  $MB$ . Zato je

$$ME = \frac{AM \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{3}{5}a \sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{10}.$$

$$MD = \frac{MB \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{2}{5}a \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

S druge strane je

$$DB = \frac{1}{2}MB = \frac{1}{5}a, \quad \text{i} \quad CD = \frac{4}{5}a,$$

pa je

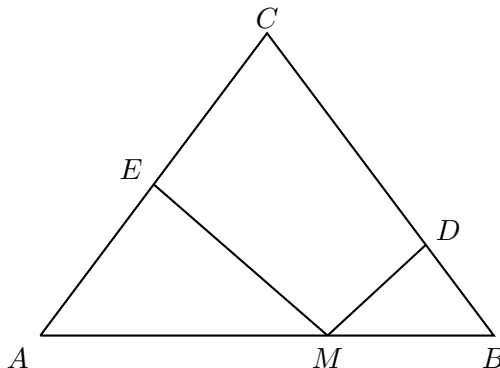
$$BD : DC = \frac{1}{5}a : \frac{4}{5}a = 1 : 4.$$

Analogno nalazimo

$$AE = \frac{3}{10}a, \quad EC = \frac{7}{10}a,$$

pa je

$$AE : EC = 3 : 7.$$



**Zadatak 3.** Odrediti dvocifrene brojeve  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$  i  $\overline{ca}$  tako da je  $a + b + c = 18$  i broj

$$\sqrt{\frac{\overline{ab} + 2\overline{bc} + 3\overline{ca}}{13}}$$

je prirodan broj.

**Rješenje.** Kako je

$$\begin{aligned} \overline{ab} + 2\overline{bc} + 3\overline{ca} &= (10a + b) + 2(10b + c) + 3(10c + a) = 13a + 21b + 32c \\ &= 13(a + b + c) + 13c + (8b + 6c), \end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\overline{ab} + 2\overline{bc} + 3\overline{ca}}{13}} &= \sqrt{\frac{13(a+b+c) + 13c + (8b+6c)}{13}} \\ &= \sqrt{(a+b+c) + c + \frac{8b+6c}{13}} \\ &= \sqrt{18+c + \frac{8b+6c}{13}}.\end{aligned}$$

Da bi ovaj broj bio prirodan broj moraju biti ispunjeni sljedeći uslovi:

- (i) broj  $\frac{8b+6c}{13}$  mora biti prirodan broj,
- (ii) broj  $18+c + \frac{8b+6c}{13}$  mora biti potpun kvadrat.

Kako su  $b$  i  $c$  cifre, to su one manje ili jednake od 9. Zbog toga je  $8b+6c \leq 8 \cdot 9 + 6 \cdot 9 = 14 \cdot 9 = 126$ . S druge strane vrijedi  $8b+6c \geq 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 14$ . Dakle, broj  $8b+6c$  se nalazi između brojeva 14 i 126 i on je djeljiv sa 13. Zbog toga je on jedan od brojeva: 26,39,52,65,78,91,104 i 117. No broj  $8b+6c$  je paran pa ostaju sljedeće mogućnosti: 26,52,78 i 104. Razmotrimo svaku od ovih četiri mogućnosti:

1. Ako je  $8b+6c = 26$ , onda je  $4b+3c = 13$ . Odavde je  $4b-4 = 9-3c$ , tj.  $4(b-1) = 3(3-c)$ . Odavde slijedi da 4 dijeli  $3-c$  i 3 dijeli  $b-1$ . To je jedino moguće ako je  $c = 3$  i  $b = 1$ . No, tada je

$$18+c + \frac{8b+6c}{13} = 18+3+2 = 23.$$

Kako 23 nije potpun kvadrat, to ovaj slučaj otpada.

2. Ako je  $8b+6c = 52$ , onda je  $4b+3c = 26$ . Dakle,  $4b-20 = 6-3c$ , tj.  $4(b-5) = 3(2-c)$ . Lijeva strana je parna, pa onda mora biti i desna. Za  $c = 2$ , je  $b = 5$ , pa je

$$18+c + \frac{8b+6c}{13} = 18+2+4 = 24.$$

Kako 24 nije potpun kvadrat, to ovaj slučaj otpada. Za  $c = 4$ , broj  $b$  nije prirodan, pa i ovaj slučaj otpada. Slično i za  $c = 8$   $b$  nije prirodan broj.

3. Ako je  $8b+6c = 78$ , onda je  $4b+3c = 39$ . Odavde slijedi da je  $b$  djeljiv sa 3. Za  $b = 3$  imamo  $c = 9$ . Tada je

$$18+c + \frac{8b+6c}{13} = 18+9+6 = 33.$$

Kako 33 nije potpun kvadrat, to ovaj slučaj otpada. Ako je  $b = 6$ , onda je  $c = 5$ , pa je

$$18+c + \frac{8b+6c}{13} = 18+5+6 = 29.$$

Kako 29 nije potpun kvadrat, to ovaj slučaj otpada. Ako je  $b = 9$ , onda je  $c = 1$ . Tada je

$$18+c + \frac{8b+6c}{13} = 18+1+6 = 25.$$

Ovaj slučaj zadovoljava postavljene uslove. Tada je  $a = 18 - b - c = 18 - 9 - 1 = 8$ . Traženi brojevi su 89, 91 i 18.

4. Ako je  $8b + 6c = 104$ , pa je  $4b + 3c = 52$ . Odavde slijedi da je  $c$  djeljiv sa 4. Ako je  $c = 4$ , onda je  $b = 10$ . Kako je  $b$  cifra, to ovaj slučaj otpada. Ako je  $c = 8$ , onda je  $b = 7$ . Tada je

$$18 + c + \frac{8b + 6c}{13} = 18 + 8 + 8 = 34,$$

pa i ovaj slučaj otpada.

Dakle brojevi  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$  i  $\overline{ca}$  su jednoznačno određeni i to su redom brojevi 89, 91 i 18.

**Drugo rješenje.** Sve se radi isto do izraza

$$\sqrt{\frac{13(a+b+c) + (8b+19c)}{13}} = \sqrt{18 + \frac{8b+19c}{13}}.$$

Ovaj izraz mora biti prirodan broj, pa izraz  $18 + A$  mora biti potpun kvadrat, gdje je

$$A = \frac{8b+19c}{13}.$$

Kako su  $b$  i  $c$  cifre, to je  $8b + 19c \leq 27 \cdot 9 = 243$ . Tada je  $A \leq \frac{243}{13} < 19$ . S druge strane je

$$A \geq \frac{27 \cdot 1}{13} > 2,$$

pa je  $3 \leq A \leq 18$ . Tada je  $21 \leq 18 + A \leq 36$ . Kako je ovaj broj potpun kvadrat, to imamo dvije mogućnosti:  $A = 7$  ili  $A = 18$ . Sada je daljnji postupak jasan, pa ga izostavljamo.

**Zadatak 4.** Dokazati da je visina na krak jednakokrakog trougla manja od dvostruke dužine visine na osnovicu tog trougla.

**Rješenje.** Neka je  $ABC$  jednakokraki trougao sa osnovicom  $AB$ . Neka je  $CD$  visina na osnovicu, a  $BE$  visina na krak  $AC$ . Neka je  $DF$  visina na stranicu  $AC$  pravouglog trougla  $ADC$ . Tada su duži  $DF$  i  $BE$  paralelne. Na osnovu Talesove teoreme vrijedi

$$\frac{FD}{EB} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Dakle,

$$FD = \frac{EB}{2}.$$

U pravouglom trouglu  $FDC$  najduža je hipotenuza  $CD$ . Dakle,  $FD < CD$ , tj.  $\frac{EB}{2} < CD$ , tj.  $EB < 2 \cdot CD$ .

### Rješenja zadataka za VIII razred

**Zadatak 1.** Odrediti cifre  $a, b$  i  $c$  tako da je proizvod decimalnog broja  $\overline{a,b}$  sa jednocifrenim brojem  $c$  jednak broju  $3a + b + c$ .

**Rješenje.** Prema uslovu zadatka je

$$a, b \cdot c = 3a + b + c.$$

Odavde je

$$\left(a + \frac{b}{10}\right) \cdot c = 3a + b + c,$$

tj.

$$(10a + b) \cdot c = 10(3a + b + c).$$

Dakle,  $bc = 10(3a + b + c - ac)$ , pa 10 dijeli  $bc$ . To znači da je jedan od brojeva  $b$  i  $c$  djeljiv sa 5.

1. Ako je  $b = 0$ , onda je  $3a + c - ac = 0$ , Odavde nalazimo

$$c = 3 + \frac{3}{a-1}.$$

Jednostavno nalazimo  $a = 2, c = 6$  i  $a = 4, c = 4$ .

2. Ako je  $b = 5$ , onda je  $c = 2(3a + 5 + c - ac)$ . Odavde nalazimo

$$c = \frac{6a + 10}{2a - 1} = 3 + \frac{13}{2a - 1}.$$

Jedino moguće rješenje koje cifre  $a$  i  $c$  zadovoljavaju je  $a = 7$  i  $c = 4$ .

3. Ako je  $c = 0$ , onda je  $3a + b = 0$ , pa je  $a = 0, b = 0$ .

4. Ako je  $c = 5$ , onda je  $b = 4a - 10$ . Kako je  $b$  cifra, to za  $a$  imamo dvije mogućnosti:  $a = 3$  i  $a = 4$ . Tada je  $b = 2$  i  $b = 6$ .

Dakle, rješenja su:  $(a, b, c) \in \{(4, 0, 4), (0, 0, 0), (3, 2, 5), (4, 6, 4)\}$ .

**Zadatak 2.** Neka su  $x, y$  i  $z$  pozitivni realni brojevi takvi da je  $x + y = 6$  i  $xy - z^2 = 9$ . Odrediti vrijednost izraza  $w = x^2 + z^2 + z^2$ .

**Rješenje.** Kvadriranjem jednakosti  $x + y = 9$  dobijamo  $x^2 + y^2 = 36 - 2xy$ . Kako je  $z^2 = xy - 9$ , to je

$$w = (36 - 2xy) + (xy - 9) = 27 - xy.$$

Da bi odredili vrijednost izraza  $w$  moramo odrediti vrijednost izraza  $xy$ .

Iz  $xy - 9 = z^2 \geq 0$ , slijedi  $xy \geq 9$ . S druge strane iz odnosa aritmetičke i geometrijske sredine za dva broja slijedi

$$6 = x + y \geq 2\sqrt{xy},$$

tj.  $\sqrt{xy} \leq 3$ , pa je  $xy \leq 9$ . Tako smo dobili

$$9 \leq xy \leq 9.$$



Zbog toga je  $xy = 9$ , pa je

$$w = 27 - xy = 27 - 9 = 18.$$

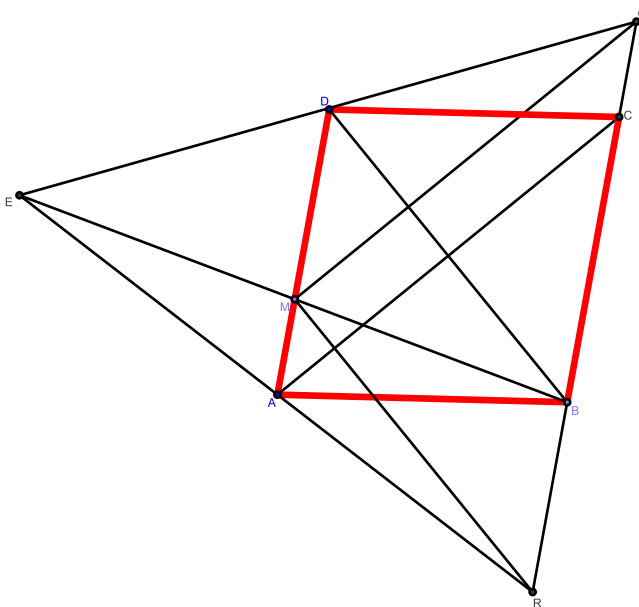
**Zadatak 3.** Na stranici  $AD$  romba  $ABCD$  uzeta je tačka  $M$ . Prave koje prolaze kroz  $M$  ortogonalno na dijagonale  $AC$  i  $BD$  sijeku pravu  $BC$  redom u tačkama  $P$  i  $Q$ . Poznato je da se prave  $PA$ ,  $QD$  i  $BM$  sijeku u jednoj tački. Izračunati omjer  $AM : MD$ .

**Rješenje.** Označimo sa  $R$  tačku presjeka pravih:  $PA$ ,  $QD$  i  $BM$ . Kako su dijagonale romba međusobno ortogonalne, to je  $MP \parallel DB$  i  $MA \parallel QC$ . Zbog toga su četverougli  $ACQM$  i  $BDMP$  paralelogrami. To povlači da je  $QC = MA$  i  $PB = MD$ . Nadalje imamo

$$PQ = PB + BC + CQ = DM + AM + a = AD + a = 2a,$$

gdje je  $a$  dužina stranice romba. Kako je  $AD \parallel BC$ , to je  $AD \parallel PQ$ . Tako imamo  $AD \parallel PQ$  i  $AD = \frac{1}{2}PQ$ . To znači da je  $AD$  srednja linija trougla  $PQR$ . Zbog toga je  $AP = AR$ . Kako je  $AM \parallel PB$  i  $AM$  prolazi sredinom od  $AR$ , to  $AM$  prolazi i sredinom od  $BR$ . Dakle,  $AM$  je srednja linija trougla  $PBR$ . Zbog toga je

$$AM = \frac{PB}{2} = \frac{MD}{2}.$$



Dakle,  $AM : MD = 1 : 2$ .

**Zadatak 4** U jednoj džungli živi nekoliko orangutana. Svaka dva orangutana su prijatelji ili neprijatelji. Svaki orangutan ima tano tri neprijatelja. Orangutani se dre pravila: "Neprijatelj moga prijatelja je i moj neprijatelj." Odrediti broj orangutana u toj džungli.

**Rješenje.** Neka je  $n$  broj orangutana. Odaberimo jednog proizvoljnog orangutana  $x$ . On ima tačno tri neprijatelja, recimo orangutane  $u$ ,  $v$  i  $w$ . Preostalih  $n - 4$  orangutana su prijatelji orangutanu  $x$ . Orangutan  $u$  je neprijatelj od  $x$ , pa je i neprijatelj svakom prijatelju od  $x$ .

Dakle, orangutan  $u$  ima najmanje  $1 + (n - 4) = n - 3$  neprijatelja. Kako je broj neprijatelja orangutana  $u$  tri, to je  $n - 3 \leq 3$ . Dakle,  $n \leq 6$ . S druge strane kako svaki orangutan ima tačno tri neprijatelja, to je broj orangutana veći od 3. Dakle  $4 \leq n \leq 6$ .

Neka je  $n = 4$ . Kako svaki orangutan ima tačno tri neprijatelja, onda u ovom slučaju svaki orangutan je u neprijateljstvu sa svim drugim orangutanima. Dakle,  $n = 4$  zadovoljava uslove zadatka.

Neka je  $n = 5$ . Kako svaki orangutan ima tačno tri prijatelja, to svaki orangutan ima  $4 - 3 = 1$  prijatelja. To je nemoguće, jer bi tada broj orangutana morao biti paran. Naime, neka su  $x, y, z, u, v$  orangutani iz naše džungle. Neka su  $(x, y), (y, u)$  parovi prijatelja. Koje prijatelj od  $v$ ? Ni jedan od orangutana  $x, y, z, u$  nemože biti njegov prijatelj, jer bi onda jedan od njih imao dva prijatelja. Dakle,  $n = 5$  nezadovoljava uslove zadatka.

Neka je broj orangutana  $n = 6$ . Svaki od ovih 6 orangutana ima tačno tri neprijatelja i dva prijatelja. Dakle, može se desiti da u džungli živi 6 orangutana.

Prema tome udžungli živi 4 ili 6 orangutana.