20. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

B I L T E N

Sarajevo, 16. - 17. 05. 2015.godine

20. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 16. - 17. 05. 2015. godine

PRVI DAN

Jezik: Bosanski

1. Odrediti najmanju moguću vrijednost izraza

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)}$$

za pozitivne realne brojeve a, b i c, ako je $a+b+c \leq 3$.

2. Neka je D proizvoljna tačka na stranici AB trougla ABC. Kružnice opisane oko trouglova BCD i ACD sijeku stranice AC i BC u tačkama E i F, redom. Simetrala duži EF siječe AB u tački M, a normalu na AB u tački D u tački N. Prave AB i EF se sijeku u tački T, a druga tačka presjeka kružnice opisane oko trougla CDM i prave TC je U. Dokazati da je $|NC| = |NU|$.

3. Dokazati da postoji beskonačno mnogo složenih prirodnih brojeva n takvih da n dijeli $3^{n-1} - 2^{n-1}$.

Vrijeme za izradu zadataka: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

20. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 16. - 17. 05. 2015. године

ПРВИ ДАН

Језик: Српски

1. Одредити најмању могућу вриједност израза

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}$$

за позитивне реалне бројеве a, b и c, ако је $a+b+c \leq 3$.

2. Нека је D произвољна тачка на страници AB троугла ABC. Кружнице описане око троуглова BCD и ACD сијеку странице AC и BC у тачкама E и F, редом. Симетрала дужи EF сијече AB у тачки M, а нормалу на AB у тачки D у тачки N. Праве AB и EF се сијеку у тачки T, а друга тачка пресјека кружнице описане око троугла CDM и праве TC је U. Доказати да је $|NC| = |NU|$.

3. Доказати да постоји бесконачно много сложених природних бројева n таквих да n дијели $3^{n-1} - 2^{n-1}$.

Вријеме за израду задатака: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 бодова.

20. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 16. - 17. 05. 2015. godine

PRVI DAN

Jezik: Hrvatski

1. Odrediti najmanju moguću vrijednost izraza

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)}$$

za pozitivne realne brojeve a, b i c, ako je $a+b+c \leq 3$.

2. Neka je D proizvoljna točka na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC. Kružnice opisane trokutima BCD i ACD sijeku stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ u točkama E i F, redom. Simetrala dužine $\overline{EF}$ siječe $\overline{AB}$ u točki M, a okomicu na $\overline{AB}$ u točki D u točki N. Pravci AB i EF se sijeku u točki T, a druga točka presjeka kružnice opisane trokutu CDM i pravca TC je U. Dokazati da je $|NC| = |NU|$.

3. Dokazati da postoji beskonačno mnogo složenih prirodnih brojeva n takvih da n dijeli $3^{n-1} - 2^{n-1}$.

Vrijeme za izradu zadataka: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

20. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 16. - 17. 05. 2015. godine

DRUGI DAN

Jezik: Bosanski

4. Neka je X skup koji se sastoji od osam susjednih prirodnih brojeva. Skup X je podijeljen na dva disjunktna podskupa A i B sa jednakim brojem elemenata. Ako je suma kvadrata elemenata skupa A jednaka sumi kvadrata elemenata skupa B, dokazati da je tada suma elemenata skupa A jednaka sumi elemenata skupa B.

5. Neka je N prirodan broj. Dat je skup tegova koji zadovoljava sljedeće uslove:

i) Svaki teg iz skupa ima neku od težina 1, 2,. . . , N;

ii) Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ u datom skupu postoji teg težine i;

iii) Zbir težina svih tegova iz datog skupa je paran prirodan broj.

Dokazati da se taj skup tegova može razbiti na dva skupa koji imaju jednake težine.

6. Neka su D, E, F tačke u kojima upisana kružnica trougla ABC dodiruje stranice BC, CA i AB, redom, te neka je I centar te kružnice. Dalje, neka je P podnožje normale iz tačke I na AD, te neka je M sredina duži DE. Ako je $\{N\} = PM \cap AC$, dokazati da je $DN \| EF$.

Vrijeme za izradu zadataka: 4 sata i 30 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

20. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 16. - 17. 05. 2015. године

ДРУГИ ДАН

Језик: Српски

4. Нека је X скуп који се састоји од осам сусједних природних бројева. Скуп X је подијељен на два дисјунктна подскупа A и B са једнаким бројем елемената. Ако је сума квадрата елемената скупа A једнака суми квадрата елемената скупа B, доказати да је тада сума елемената скупа A једнака суми елемената скупа B.

5. Нека је N природан број. Дат је скуп тегова који задовољава сљедеће услове:

i) Сваки тег из скупа има неку од тежина 1, 2,. . . , N;

ii) За свако $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ у датом скупу постоји тег тежине i;

iii) Збир тежина свих тегова из датог скупа је паран природан број.

Доказати да се тај скуп тегова може разбити на два скупа који имају једнаке тежине.

6. Нека су D, E, F тачке у којима уписана кружница троугла ABC додирује странице BC, CA и AB, редом, те нека је I центар те кружнице. Даље, нека је P подножје нормале из тачке I на AD, те нека је M средина дужи DE. Ако је $\{N\} = PM \cap AC$, доказати да је $DN \| EF$.

Вријеме за израду задатака: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 бодова

20. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 16. - 17. 05. 2015. godine

DRUGI DAN

Jezik: Hrvatski

4. Neka je X skup koji se sastoji od osam susjednih prirodnih brojeva. Skup X je podijeljen na dva disjunktna podskupa A i B sa jednakim brojem elemenata. Ako je zbroj kvadrata elemenata skupa A jednak zbroju kvadrata elemenata skupa B, dokazati da je tada zbroj elemenata skupa A jednak zbroju elemenata skupa B.

5. Neka je N prirodan broj. Dan je skup utega koji zadovoljava slijedeće uvjete:

i) Svaki uteg iz skupa ima neku od težina 1, 2,. . . , N;

ii) Za svako $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ u danom skupu postoji uteg težine i;

iii) Zbroj težina svih utega iz danog skupa je paran prirodan broj.

Dokazati da se taj skup utega može razbiti na dva skupa koji imaju jednake težine.

6. Neka su D, E, F točke u kojima kružnica upisana trokutu ABC dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i AB, redom, te neka je I središte te kružnice. Dalje, neka je P nožište okomice iz točke I na $\overline{AD}$, te neka je M središte dužine $\overline{DE}$. Ako je $\{N\} = PM \cap AC$, dokazati da je $DN \| EF$.

Vrijeme za izradu zadataka: 4 sata i 30 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

20. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 16. - 17. 05. 2015. godine

PRVI DAN

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Odrediti najmanju moguću vrijednost izraza

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}$$

za pozitivne realne brojeve a, b i c, ako je $a+b+c \leq 3$.

Rješenje: Primijetimo da je

$$\frac{a+1}{a(a+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}\right).$$

Slično vrijedi i za druga dva sabirka pa ja

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right).$$

Na osnovu nejednakosti izmedju aritmetičke i harmonijske sredine brojeva i uslova $a+b+c \leq 3$ dobijamo

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \geq 3.$$

Analogno, kako je $(a+2)+(b+2)+(c+2) \leq 9$, dobijamo

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2} \geq \frac{9}{(a+2)+(b+2)+(c+2)} \geq 1.$$

U oba slučaja jednakost vrijedi za $a=b=c=1$. Imamo

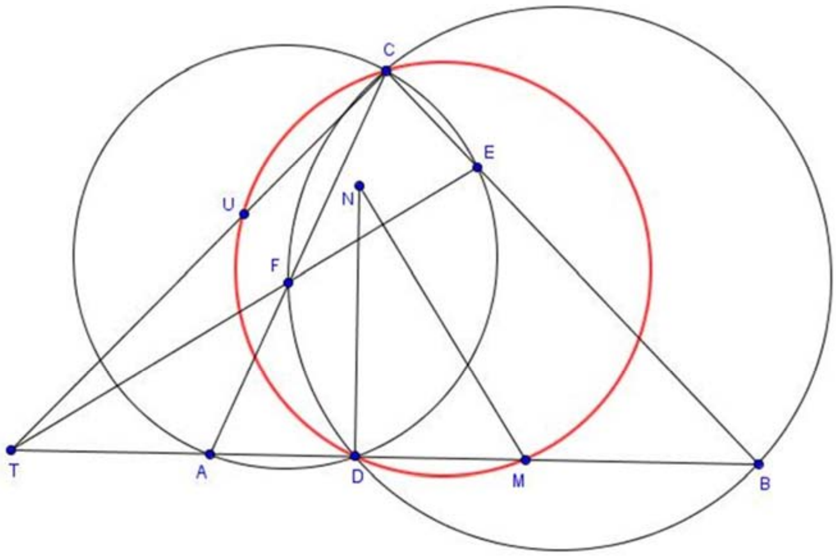
$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)} \geq \frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1=2.$$

Za $a=b=c=1$ vrijedi jednakost, pa je tražena najmanja moguća vrijednost izraza 2.

2. Neka je D proizvoljna tačka na stranici AB trougla ABC. Kružnice opisane oko trouglova BCD i ACD sijeku stranice AC i BC u tačkama E i F, redom. Simetrala duži EF siječe AB u tački M, a normalu na AB u tački D u tački N. Prave AB i EF se sijeku u tački T, a druga tačka presjeka kružnice opisane oko trougla CDM i prave TC je U. Dokazati da je $|NC| = |NU|$.

Rješenje: Iz tetivnih četverouglova $BCFD$ i $ADEC$ dobijamo $\measuredangle FDA = 180^\circ - \measuredangle FDB = \measuredangle ACB$ i $\measuredangle EDB = 180^\circ - \measuredangle EDA = \measuredangle ACB$, pa je $\measuredangle FDN = 90^\circ - \measuredangle ABC = \measuredangle EDN$, pa je DN simetrala $\measuredangle FDE$.

Posmatrajmo trougao FDE. U njemu je tačka N presjek simetrale ugla i simetrale suprotne stranice, pa se nalazi na opisanoj kružnici tog trougla, tj. četverougao $FDEN$ je tetivan. Zbog toga je $\measuredangle FNE = 180° - \measuredangle EDF = 180° - (180° - 2 \cdot \measuredangle ACB) = 2 \cdot \measuredangle ACB$. Kako uz to važi i $|NF| = |NE|$, pa je N centar opisane kružnice trougla FEC.



Da bismo dokazali da je $|NC| = |NU|$, dovoljno je dokazati da je četverougao $UFEC$ tetivan (jer bi tada N bio centar kružnice opisane oko tog četverougla pa bi vrijedilo $|NC| = |NU|$). Da bismo to dokazali, dovoljno je dokazati da je $TU \cdot TC = TF \cdot TE$. Medjutim, iz potencije tačke T imamo $TD \cdot TM = TU \cdot TC$, pa je dovoljno dokazati da je $TD \cdot TM = TF \cdot TE$, tj. dovoljno je dokazati da je četverougao $DMEF$ tetivan. Dokažimo da je NM ustvari prečnik kružnice opisane oko četverougla $FDEN$. Neka je NM' prečnik te kružnice. S jedne strane, tačka M' pripada pravoj NM (jer je to simetrala duži EF), a s druge je $\measuredangle NDM' = 90°$, što znači da je $M = M'$. Dakle, i tačka M pripada kružnici opisanoj oko četverougla $FDEN$, pa je četverougao $DMEF$ tetivan, što je i trebalo dokazati.

3. Dokazati da postoji beskonačno mnogo složenih prirodnih brojeva n takvih da n dijeli $3^{n-1} - 2^{n-1}$.

Rješenje: Kako za prirodne brojeve x i y, takve da je y djeljiv sa x, vrijedi $3^x - 2^x | 3^y - 2^y$, to ćemo n potražiti u obliku $3^s - 2^s$. Da bi vrijedilo $3^s - 2^s | 3^{n-1} - 2^{n-1}$, dovoljno je da vrijedi $s | n-1$, tj. dovoljno je da $s | 3^s - 2^s - 1$. Uzmimo $s = 2^t$. Tada $s | 2^s$ (za svaki prirodan broj t vrijedi $t \leq 2^t$). Dakle, dovoljno je da $2^t = s | 3^s - 1 = 3^{2^t} - 1$. To ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Za $t = 1$ tvrdnja očigledno vrijedi. Pretpostavimo da $2^t | 3^{2^t} - 1$. Imamo, $3^{2^{t+1}} - 1 = (3^{2^t} - 1)(3^{2^t} + 1)$. Kako je po induktivnoj pretpostavci prva zagrada djeljiva sa 2^t, a druga je očigledno parna, zaključujemo da $2^{t+1} | 3^{2^{t+1}} - 1$ pa po principu matematičke indukcije za svaki prirodan broj t vrijedi $2^t | 3^{2^t} - 1$. Dakle, za $n = 3^{2^t} - 2^{2^t}$ vrijedi $n | 3^{n-1} - 2^{n-1}$. Medjutim, za $t \geq 2$ vrijedi $3^{2^t} - 2^{2^t} = (3^{2^{t-1}} - 2^{2^{t-1}})(3^{2^{t-1}} + 2^{2^{t-1}})$, što je očigledno složen broj, pa postoji beskonačno mnogo složenih brojeva n takvih da $n | 3^{n-1} - 2^{n-1}$, što je i trebalo dokazati.

20. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 16. - 17. 05. 2015. godine

DRUGI DAN

RJEŠENJA ZADATAKA

4. Neka je X skup koji se sastoji od osam susjednih prirodnih brojeva. Skup X je podijeljen na dva disjunktna podskupa A i B sa jednakim brojem elemenata. Ako je suma kvadrata elemenata skupa A jednaka sumi kvadrata elemenata skupa B, dokazati da je tada suma elemenata skupa A jednaka sumi elemenata skupa B.

Rješenje: Ako je a najmanji element skupa X, onda je

$$X = \{a, a+1, a+2, \ldots, a+7\}.$$

Neka je $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ i neka je suma kvadrata elemenata skupa A jednaka sumi kvadrata elemenata skupa B. Označimo sa S_X, S_A i S_B sume kvadrata elemenata skupova X, A, B respektivno. Prema uslovu zadataka vrijedi $S_A = S_B$ i $S_X = S_A + S_B$, pa je $S_A = S_B = \frac{1}{2} S_X$.

Odredimo S_X. Imamo

$$\begin{aligned} S_X &= a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + \cdots + (a+7)^2 \\ &= 8a^2 + 56a + 140. \end{aligned}$$

Tada je $S_A = S_B = 4a^2 + 28a + 70$.

Kako je $a+7 \in X$ i $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, to je $a+7$ element jednog i samo jednog od skupova A i B. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $a+7$ element skupa A. Neka su $a+i$, $a+j$, $a+k$, $i, j \in \{0, 1, 2 \ldots, 6\}$ ostali elementi skupa A. Tada je

$$\begin{aligned} S_A &= (a+i)^2 + (a+j)^2 + (a+k)^2 + (a+7)^2 \\ &= 4a^2 + 2a(i+j+k+7) + i^2 + j^2 + k^2 + 49. \end{aligned}$$

Kako je $S_A = 4a^2 + 28a + 70$, to je $4a^2 + 2a(i+j+k+7) + i^2 + j^2 + k^2 + 49 = 4a^2 + 28a + 70$. Odavde je

$$2a(i+j+k-7) = 21 - (i^2 + j^2 + k^2). \tag{1}$$

Suma elemenata skupa X je $8a+28$, a suma elementa skupa A je $4a+i+j+k+7$. Mi treba da dokažemo da skupovi A i B imaju jednake sume elementa, tj. da je suma elemenata skupa A jednaka polovini sume elemenata skupa X. Dakle, treba da dokažemo da je $4a+i+j+k+7 = 4a+14$, tj. da je $i+j+k=7$.

Pretpostavimo da je $i+j+k > 7$, tj. da je $i+j+k \geq 8$. Iz odnosa kvadratne i aritmetičke sredine različitih nenegativnih brojeva i, j i k slijedi $\sqrt{\frac{i^2+j^2+k^2}{3}} > \frac{i+j+k}{3} \geq \frac{8}{3}$. Dakle,

$$i^2 + j^2 + k^2 > \frac{64}{3} > 21. \tag{2}$$

Kako je $i+j+k > 7$, to je lijeva strana jednačine (1) pozitivna, pa i desna strana te jednačine mora biti pozitivna. Dakle, $21 - (i^2 + j^2 + k^2) > 0$, tj. $i^2 + j^2 + k^2 < 21$. Ovo je u suprotnosti sa relacijom (2). Pretpostavka da je $i+j+k > 7$ dovela nas je do kontradikcije. Zbog toga je

$i+j+k \leq 7$. Pretpostavimo da je $i+j+k < 7$. Lijeva strana jednačine (1) je parna, pa mora biti i desna strana. Tada je $i^2+j^2+k^2$ neparan broj. No, tada je i $i+j+k$ neparan broj. Kako je ovaj broj manji od 7 to on može biti 1 ili 3 ili 5. Kako su i, j i k različiti elementi skupa $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, to imamo ove mogućnosti: {i,j,k}$\in \{\{0,1,2\},\{0,1,4\},\{0,2,3\}\}$. Odavde slijedi da je $i^2+j^2+k^2 \in \{5,13,17\}$. U sva tri slučaja je $i^2+j^2+k^2 < 21$, pa je desna strana jednakosti (1) pozitivna. Kako je $i+j+k < 7$, to je lijeva strana jednakosti (1) negativna. Kontradikcija. Pretpostavka da je $i+j+k < 7$ dovela nas je do kontradikcije, pa nije tačna. Dakle, $i+j+k = 7$, što je i trebalo dokazati.

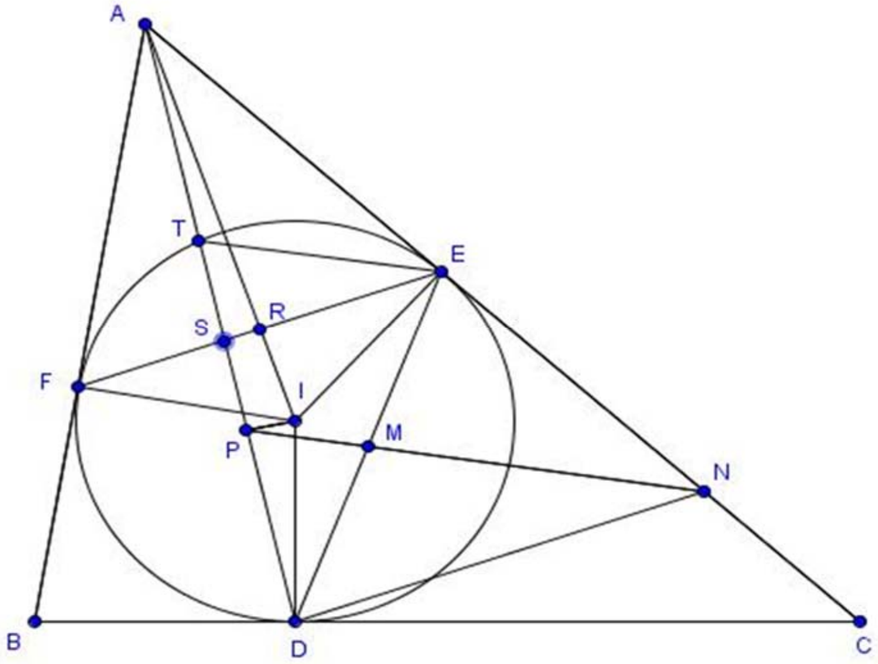
5. Neka je N prirodan broj. Dat je skup tegova koji zadovoljava sljedeće uslove:
i) Svaki teg iz skupa ima neku od težina 1, 2,..., N;
ii) Za svako $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ u datom skupu postoji teg težine i;
iii) Zbir težina svih tegova iz datog skupa je paran prirodan broj.
Dokazati da se taj skup tegova može razbiti na dva skupa koji imaju jednake težine.

Rješenje I: Neka je $2S$ zbir težina svih tegova. Neka je T najveći zbir težina koji možemo dobiti u jednoj grupi, ali takav da je $T \leq S$. Ako je $T = S$, tvrenje je dokazano. Neka je $T < S$. Neka je A prva grupa (ona u kojoj je zbir T), a neka je B druga grupa (ona u kojoj je zbir $2S-T$). Ako bi se neki teg težine 1 nalazio u grupi B, mogli bismo ga prebaciti u grupu A, i tada bi grupa A imala težinu veću od T koja je i dalje manja ili jednaka od S, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je T najveći zbir težina koji je manji ili jednak S. Dakle, svi tegovi težine 1 se nalaze u grupi A. Dalje, ako bi se neki teg težine 2 nalazio u grupi B, onda bismo mogli njega prebaciti u grupu A, a neki teg težine 1 iz grupe A u grupu B, i opet bi grupa A imala težinu veću od T koja je manja ili jednaka od S. Sada zaključujemo da se i svi tegovi težine 2 nalaze u grupi A. Nastavljajući ovaj postupak (ili preciznije, koristeći se principom matematičke indukcije), nakon $N-1$ koraka, dobijamo da se svi tegovi težine $N-1$ nalaze u grupi A, pa su u grupi B samo tegovi težine N. Ako sada teg težine $N-1$ iz grupe A zamjenimo sa tegom težine N iz grupe B, opet bi grupa A imala težinu veću od T koja je i dalje manja ili jednaka od S, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je T najveći zbir težina koji je manji ili jednak S. Ovim je dokaz završen.

Rješenje II: Označimo sa a_i $(i = 1,2,\ldots,N)$ broj tegova težine i. Najprije primijetimo da je dovoljno zadatak riješiti za $a_i \in \{1,2\}, i = 1,2,\ldots,N$ (jer za svako i možemo k tegova težine i staviti u jednu grupu, a k u drugu, pri čemu je $a_i = 2k+1$ ili $a_i = 2k+2$). Zadatak ćemo riješiti matematičkom indukcijom. Jednostavnom provjerom utvrujemo da tvrenje važi za $N = 1,2,3,4,5$. Neka sada tvrenje važi za sve brojeve od 1 do $N-1$, dokažimo da tvrenje važi i za N $(N > 5)$. Ako je $a_N = 2$, možemo jedan teg težine N staviti u jednu grupu, drugi u drugu i primjeniti tvrenje za $N-1$. Dokažimo sada tvrenje ako je $a_N = 1$. Ako je $a_{N-1} = 2$, uzmemo jedan teg težine N i jedan teg težine $N-2$ u jednu grupu, a dva tega težine $N-1$ u drugu grupu, i primjenimo induktivnu pretpostavku (za $N-2$ ako je $a_{N-2} = 2$, odnosno za $N-3$ ako je $a_{N-2} = 1$). Dakle, dovoljno je dokazati tvrenje ako je $a_{N-1} = 1$. Ako bi važilo $a_{N-3} = 2$, ili $a_{N-3} = a_{N-2} = 1$, uzmemo jedan teg težine N i jedan teg težine $N-3$ u jednu grupu, a jedan teg težine $N-2$ i jedan teg težine $N-1$ u drugu grupu, te primjenimo induktivnu pretpostavku (za $N-3$ ako je $a_{N-3} = 2$ i $a_{N-2} = 1$, za $N-4$ ako je $a_{N-3} = a_{N-2} = 1$, te za $N-2$ ako je $a_{N-3} = a_{N-2} = 2$). Ostao nam je još slučaj kada je $a_{N-3} = 1$ i $a_{N-2} = 2$ (već imamo da je $a_{N-1} = 1$ i $a_N = 1$). Tada uzmemo po jedan teg težina $N-4$, $N-2$ i N u jednu grupu, te po jedan teg težina $N-3$, $N-2$ i $N-1$ u drugu, te iskoristimo induktivnu pretpostavku (za $N-4$ ako je $a_{N-4} = 2$, odnosno za $N-5$ ako je $a_{N-4} = 1$). Ovim je dokaz završen.

6. Neka su D, E, F tačke u kojima upisana kružnica trougla ABC dodiruje stranice BC, CA i AB, redom, te neka je I centar te kružnice. Dalje, neka je P podnožje normale iz tačke I na AD, te neka je M sredina duži DE. Ako je $\{N\} = PM \cap AC$, dokazati da je $DN \| EF$.

Rješenje: Neka su R i S tačke presjeka duži EF sa AI i AD, redom, te neka je T druga tačka presjeka upisane kružnice sa pravom AD.



Kako je $IT = ID$, to je P sredina od TD, pa je PM srednja linija trougla DTE, odakle je $PM||TE$, tj. $PN||TE$. Iz Talesove teoreme sada dobijamo da vrijedi $AE/AN = AT/AP$. S druge strane, da bi vrijedilo $DN||EF$, dovoljno je dokazati $AE/AN = AS/AD$, pa je ustvari dovoljno dokazati da vrijedi $AT/AP = AS/AD$, tj. $AS \cdot AP = AT \cdot AD$. Meutim, kako je četverougao $PIRS$ tetivni ($\measuredangle IPS = \measuredangle IRS = 90°$), to iz potencije tačke A imamo $AS \cdot AP = AR \cdot AI$. Dalje, iz sličnosti trouglova ARE i AIE (zajednički ugao kod vrha A i pravi ugao) dobijamo $AE^2 = AR \cdot AI$. Dakle, $AS \cdot AP = AE^2 = AT \cdot AD$, pri čemu zadnja jednakost vrijedi iz potencije tačke A na upisanu kružnicu.

Napomena: Da je dovoljno dokazati da vrijedi jednakost $AT/AP = AS/AD$, moglo se dobiti i na drugi način. Naime, iz Menelajeve teoreme za trougao DEA i tačke P,M,N dobijamo da vrijedi: $AP/PD \cdot DM/EM \cdot EN/AN = 1$, pa zbog $DM = EM$, imamo $AP/PD = AN/EN$. Da bi vrijedilo $DN||EF$, dovoljno je dokazati $AN/EN = AD/DS$, pa je dovoljno da vrijedi $AP/PD = AD/DS \Leftrightarrow PD/AP = DS/AD \Leftrightarrow 1-PD/AP = 1-DS/AD \Leftrightarrow (AP-PD)/AP = AS/AD$, pa zbog $PD = PT$ i $AP - PT = AT$ dobijamo $AT/AP = AS/AD$.

ZVANIČNI REZULTATI 20. BIH MATEMATIČKE OLIMPIJADE

				bodovi po zadacima							
No.	Učenik/ca	Šifra1	Šifra2	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Ukupno	Medalja
1	Milica Đukić	102	203	7	7	3	7	7	7	38	zlatna
2	Demir Papić	108	219	7	7	0	7	7	7	35	zlatna
3	Zlatko Salko Lagumdžija	135	206	7	7	1	7	7	3	32	srebrena
4	Neira Kurtović	103	210	7	7	0	6	7	2	29	srebrena
4	Adisa Bolić	138	232	7	1	0	7	7	7	29	srebrena
6	Mirza Arnaut	132	225	7	7	0	7	0	7	28	srebrena
7	Tijana Babić	136	218	7	5	0	6	4	2	24	bronzana
8	Berin Spahović	123	224	7	7	0	7	0	2	23	bronzana
8	Emin Mrkonja	139	204	7	0	0	7	7	2	23	bronzana
8	Milica Babić	101	221	2	5	0	7	2	7	23	bronzana
11	Adnan Kreho	125	229	7	7	0	7	0	0	21	
11	Amila Sabljica	118	207	7	0	0	7	0	7	21	
11	Mirza Krbezlija	119	227	7	7	0	0	0	7	21	
14	Ajdin Muharemović	120	205	7	1	0	3	7	0	18	
15	Edna Salkić	115	220	7	0	0	3	0	7	17	
15	Dženana Puščul	134	217	7	0	1	7	0	2	17	
17	Azur Đonlagić	130	215	7	0	0	2	0	7	16	
18	Dino Melunović	127	201	1	0	0	7	0	7	15	
19	Amar Kurić	105	234	7	0	0	7	0	0	14	
19	Stefan Jurošević	137	202	0	0	0	7	0	7	14	
21	Almedin Selimović	107	226	7	0	0	6	0	0	13	
22	Aleksandar Jelić	104	233	7	0	0	3	0	1	11	
22	Emina Modrić	113	236	7	0	0	4	0	0	11	
24	Adnan Gobeljić	117	228	7	0	1	0	0	0	8	
24	Nikica Perić	112	213	7	0	0	0	0	1	8	
24	Damjan Ilišković	133	235	7	0	0	1	0	0	8	
27	Slaven Bajić	122	X	7	0	0	X	X	X	7	
27	Đorđe Mitrović	131	231	0	1	0	4	0	2	7	
29	Filip Božić	124	223	2	0	0	4	0	0	6	
29	Ognjen Bosić	128	211	1	0	0	4	0	1	6	
31	Ivana Dević	106	230	1	0	0	3	0	1	5	
31	Jelena Lazić	126	238	0	0	0	3	1	1	5	
33	Anđela Spajić	109	237	1	0	0	2	0	1	4	
33	Sven Hrbenić	116	208	0	0	0	3	0	1	4	
35	Ivan Martinović	111	216	1	0	0	2	0	0	3	
36	Ajla Nurkanović	121	222	0	0	0	1	0	1	2	
37	David Baralić	129	209	0	0	0	0	0	0	0	
37	Ivona Raguž	114	214	0	0	0	0	0	0	0	
37	Mirna Kavčić	110	212	0	0	0	0	0	0	0	

BiH takmičari za 56. IMO Tajland 4.-16.7.2015. godine