19. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Источно Сарајево, 10–11. мај 2014.

ПРВИ ДАН

1. Дата је кружница k и на њој тачке A и B које нису дијаметрално супротне. На мањем луку AB дата је тачка C. Нека су D, E, F подножја нормала из тачке C на тетиву AB и тангенте кружнице k у тачкама A и B. Доказати да је $CD = \sqrt{CE \cdot CF}$.

2. Нека су a, b, c различити реални бројеви.

$i)$ Израчунати вриједност израза

$a)$
$$\frac{1+ab}{a-b} \cdot \frac{1+bc}{b-c} + \frac{1+bc}{b-c} \cdot \frac{1+ca}{c-a} + \frac{1+ca}{c-a} \cdot \frac{1+ab}{a-b}\,,$$

$b)$
$$\frac{1-ab}{a-b} \cdot \frac{1-bc}{b-c} + \frac{1-bc}{b-c} \cdot \frac{1-ca}{c-a} + \frac{1-ca}{c-a} \cdot \frac{1-ab}{a-b}\,.$$

$ii)$ Доказати неједнакост

$$\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{3}{2}\,.$$

Да ли може наступити знак једнакости?

3. Наћи сва рјешења једначине $7^x - 2 \cdot 5^y = -1$ у скупу ненегативних цијелих бројева.

ДРУГИ ДАН

4. Низ (a_n) задовољава услове $a_1 = \dfrac{1}{2}\,,\ a_m = \dfrac{a_{m-1}}{2m \cdot a_{m-1} + 1}\,,\ m > 1$.
Одредити збир $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, за произвољно $k \in \mathbb{N}$.

5. Задат је правилни $n-$тоугао, $n \geq 6$. Колико има троуглова са тјеменима у тјеменима $n-$тоугла којима су странице дијагонале тог $n-$тоугла?

6. Нека су D и E редом подножја висина из тјемена A и B троугла ABC, F пресјечна тачка симетрале угла C са страницом AB, а O, I и H редом центар описане кружнице, центар уписане кружнице и ортоцентар троугла ABC. Ако је $\dfrac{CF}{AD} + \dfrac{CF}{BE} = 2$, доказати да је $OI = IH$.

РЈЕШЕЊА

1. Тачке D и E припадају кружници над пречником AC а тачке D и F припадају кружници над пречником BC. Прама томе, четвороуглови $ADCE$ и $BDCF$ су тетивни. Имајући то у виду и користећи једнакост углова између тангенте и тетиве и периферијског угла над тетивом, добијамо

$$\angle EDC = \angle EAC = \angle ABC = \angle DFC.$$

Аналогно се доказује да је $\angle FDC = \angle DEC$. Из једнакости ових углова слиједи да је троугао EDC сличан са троуглом DFC, одакле слиједи

$$\frac{CD}{CE} = \frac{CF}{CD},$$

тј. $CD = \sqrt{CE \cdot CF}$.

2. *i)* *a)* Након свођења на заједнички садржалац и сређивања добија се да је вриједност израза једнака 1.

b) Слично као под *a)* добија се да је вриједност израза једнака -1.

ii) Користићемо познате неједнакости $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ и $x^2+y^2+z^2 \geq -2(xy+yz+zx)$, које вриједе за произвољне реалне бројеве x, y и z, као и идентитет $2(t^2+u^2) = (t+u)^2 + (t-u)^2$. Дакле, имамо

$$2\left(\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2}\right) = \left(\frac{1+ab}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{1+bc}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{1+ca}{c-a}\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{1-ab}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{1-bc}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{1-ca}{c-a}\right)^2 \geq \frac{1+ab}{a-b}\cdot\frac{1+bc}{b-c} + \frac{1+bc}{b-c}\cdot\frac{1+ca}{c-a} +$$

$$+\frac{1+ca}{c-a}\cdot\frac{1+ab}{a-b} + (-2)\left(\frac{1-ab}{a-b}\cdot\frac{1-bc}{b-c} + \frac{1-bc}{b-c}\cdot\frac{1-ca}{c-a} + \frac{1-ca}{c-a}\cdot\frac{1-ab}{a-b}\right) =$$

$$= 1 + (-2)\cdot(-1) = 3.$$

Једнакост може наступити за $a = -\sqrt{3}$, $b = 0$ и $c = \sqrt{3}$.

3. За $y < 3$ добијамо рјешења $(0,0)$ и $(2,2)$.
Нека је $y > 3$. Разматрајући остатке по модулу 4 закључујемо да је x паран, а разматрајући остатке по модулу 3 закључујемо да је y паран.
Дакле $x = 2x_1$ и $y = 2y_1$, $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$, $y_1 > 1$. Из таблице остатака

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$49^n \pmod{125}$	49	26	24	51	-1	-49	-26	-24	-51	1

закључујемо да мора бити $x_1 = 10x_2 + 5$ $(x_2 \in \mathbb{N})$.

Сада једначина поприма облик

$$49^{10x_2+5} + 1 = 2\cdot 25^{y_1}, \quad \text{тј.} \quad (49^5)^{2x_2+1} \equiv 0 \pmod{49^5+1}$$

одакле слиједи да број $49^5+1 = (49+1)(49^4-49^3+49^2-49+1)$ мора бити дјелитељ броја $2\cdot 25^{y_1}$. Дакле, $49^4-49^3+49^2-49+1$ треба бити степен броја 5. Међутим, ово не може бити због

$$49^4-49^3+49^2-49+1 \equiv (-1)^4-(-1)^3+(-1)^2-(-1)+1 \equiv 5 \pmod{25}.$$

Дакле, једина рјешења дате једначине су парови $(0,0)$ и $(2,2)$.

4. Из услова задатка слиједи да је

$$a_m = \frac{1}{2m + 1/a_{m-1}}. \tag{1}$$

Нека је $b_m = \dfrac{1}{a_m}$, $m \in \mathbb{N}$. Из (1) слиједи да је $b_m = 2m + b_{m-1}$, одакле (математичком индукцијом или телескопирањем) добијамо да је $b_m = m(m+1)$. Дакле,

$$a_m = \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\,,$$

одакле слиједи да је $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1 - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k}{k+1}\,.$

5. Нека је $A_1A_2\ldots A_n$ правилни $n-$угао. Посматрајмо тражене троуглове којима је једно тјеме A_1. То тјеме се може спојити са било која два тјемена тог $n-$тоугла, осим са A_1 и A_n. Такве двије тачке можемо изабрати на $\binom{n-3}{2}$ начина.

Од овог броја морамо одузети број троуглова облика $A_1A_kA_{k+1}$, $k \in \{3, 4, \ldots, n-2\}$, којих има $n-4$, па је A_1 тјеме $\binom{n-3}{2} - (n-4)$ таквих троуглова. Ако овај поступак поновимо и за остала тјемена, сваки троугао ћемо рачунати 3 пута, па је тражени број троуглова једнак

$$\frac{1}{3} \cdot n \cdot \left(\binom{n-3}{2} - (n-4) \right) = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}\,.$$

6. Нека је $BC = a$, $AC = b$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle CAB = \alpha$, $CF = s_c$.
Како је $P\triangle ABC = P\triangle AFC + P\triangle BFC$, слиједи да је

$$\frac{1}{2} b s_c \sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} a s_c \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} ab \sin\gamma, \quad \text{тј.} \quad s_c = \frac{2ab\cos(\gamma/2)}{a+b}\,.$$

Како је $AD = b\sin\gamma$ и $BE = a\sin\gamma$, добијамо да је

$$\frac{CF}{AD} + \frac{CF}{BE} = \frac{2a\cos(\gamma/2)}{(a+b)\sin\gamma} + \frac{2b\cos(\gamma/2)}{(a+b)\sin\gamma} = \frac{1}{\sin(\gamma/2)}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\right) = \frac{1}{\sin(\gamma/2)}\,.$$

Одавде, на основу датог услова слиједи да је $\sin(\gamma/2) = 1/2$, тј. $\gamma = 60^\circ$.

Нека права CF сијече кружницу описану око троугла ABC у тачки M. Тада је $OM \perp AB$. Међутим, како је $CH \perp AB$, слиједи да је $\angle OMC = \angle MCH$, тј. $\angle OCM = \angle MCH$.

Из троугла HCE добијамо да је $CH = \dfrac{CE}{\sin\alpha}$, пошто је $\angle EHC = 90^\circ - \angle ECH = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$. Из троугла BCE имамо да је $CE = \dfrac{a}{\sin\alpha}\cos\gamma = 2R\cos\gamma$, а како је $\gamma = 60^\circ$ добијамо да је $CH = R$.

Одавде слиједи да су троуглови CHI и COI подударни, одакле добијамо да је $OI = IH$, што је и требало доказати.

РЕЗУЛТАТИ 19. МАТЕМАТИЧКЕ ОЛИМПИЈАДЕ БиХ

Источно Сарајево, 10–11. мај 2014.

	Име и презиме, град	З1	З2	З3	З4	З5	З6	$\sum$	*медаља*
1.	Милица Ђукић, Прњавор	7	2	7	7	7	7	37	злато
2.	Ламија Кујан, Сарајево	7	2	6.5	7	7	7	36.5	злато
3.	Неира Куртовић, Сарајево	7	3	7	7	7	2	33	сребро
4.	Ријад Муминовић, Сарајево	7	2	2	7	7	7	32	сребро
5.	Демир Папић, Сарајево	7	1	2	7	7	7	31	бронза
5.	Абдулах Јашаревић, Сарајево	7	3	7	7	7	0	31	бронза
7.	Аднан Крехо, Сарајево	7	3	1	7	7	4	29	
8.	Анес Валентић, Сарајево	7	6	1	7	7	0	28	
9.	Милица Бабић, Бања Лука	7	3	2	7	6	2	27	
9.	Славен Бајић, Бања Лука	7	2	2	7	7	2	27	
11.	Џенис Пепић, Сарајево	7	2	3.5	7	7	0	26.5	
12.	Харис Бркић, Сарајево	7	2	2	7	6	2	26	
12.	Мирза Арнаут, Грачаница	7	2	2	7	6	2	26	
14.	Ивона Јурошевић, Братунац	7	2	2	7	7	0	25	
14.	Аднан Гобељић, Сарајево	7	2	2	7	7	0	25	
16.	Адиса Болић, Бихаћ	7	2	1.5	7	7	0	24.5	
16.	Милан Кузмановић, Бања Лука	7	2	1.5	7	7	0	24.5	
18.	Ајдин Мухаремовић, Зеница	7	2	1	7	7	0	24	
18.	Златко Салко Лагумџија, Сарајево	7	2	2	7	6	0	24	
20.	Амила Сабљица, Сарајево	7	2	2	7	0	0	18	
20.	Дина Сарајлић, Сарајево	2	2	0	7	7	0	18	
22.	Ђорђе Митровић, Приједор	7	2	1	0	7	0	17	
23.	Дин Бостанџић, Сарајево	7	1	1.5	7	0	0	16.5	
23.	Александар Јелић, Бања Лука	2	2	1.5	7	4	0	16.5	
25.	Тарик Ибрахимпашић, Бихаћ	7	2	1.5	3	2	0	15.5	
26.	Никица Перић, Широки Бријег	3	0	1.5	3	7	0	14.5	
27.	Николина Радичић, Градишка	5	0	2	0	5	0	12	
28.	Домагој-Крешимир Јукић, Жепче	0	2	1	6	2	0	11	
29.	Василије Пантић, Бијељина	0	2	1.5	7	0	0	10.5	
30.	Јелена Лазић, Бијељина	7	1	2	0	0	0	10	
30.	Петар Самарџић, Невесиње	7	1	1	1	0	0	10	
32.	Јована Обрадовић, Приједор	7	2	0.5	0	0	0	9.5	
33.	Ајла Нуркановић, Тузла	3	2	2	0	0	2	9	
34.	Миодраг Јевтић, Добој	2	0	1	0	4	0	7	
35.	Лука Абрамушић, Зеница	0	0	1.5	5	0	0	6.5	
36.	Амар Халиловић, Сарајево	3	2	1	0	0	0	6	
37.	Дамјан Вукаловић, Требиње	0	2	1	0	2	0	5	
38.	Ђорђе Јојић, Фоча	0	2	2	–	–	–	4	
39.	Здравка Покрајчић, Сарајево	1	2	1	0	0	0	4	
39.	Патрик Мијатовић, Оџак	1	2	1	0	0	0	4	
41.	Матеј Јукић, Жепче	0	2	1	0	0	0	3	
41.	Ивона Рагуж, Столац	0	2	1	0	0	0	3	
43.	Дубравко Томић, Жепче	0	0	1.5	0	0	0	1.5	
44.	Анђела Спајић, Широки Бријег	0	0	1	0	0	0	1	
45.	Ивона Марић, Широки Бријег	0	0	0	0	0	0	0	
45.	Мартина Јурич, Ливно	0	0	0	0	0	0	0	