

XV matematička olimpijada Bosne i Hercegovine

Mostar, 15. maj 2010.

Zadaci - prvi dan

1.

- a) Neka su p i q različiti prosti brojevi takvi da $(p + q^2)|(p^2 + q)$.
Dokazati da $(p + q^2)|(pq - 1)$.
- b) Odrediti sve proste brojeve p takve da $(p + 121)|(p^2 + 11)$.

2. Neka su \overline{AB} i \overline{FD} tetive na kružnici, koje se ne sijeku, a P tačka na luku \widehat{AB} , koji ne sadrži tetivu \overline{FD} . Prave PF i PD sijeku tetivu \overline{AB} u tačkama Q i R . Dokazati da je $\frac{\overline{AQ} \cdot \overline{RB}}{\overline{QR}}$ konstantno, dok se tačka P kreće lukom \widehat{AB} .

3. Odrediti sve funkcije $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ za koje vrijede sljedeća dva uslova:

- i. $f(n) \cdot f(-n) = f(n^2)$ za sve $n \in \mathbb{Z}$,
- ii. $f(m + n) = f(m) + f(n) + 2mn$ za sve $m, n \in \mathbb{Z}$.

- Svaki zadatak vrijedi 7 bodova
- Vrijeme za izradu zadataka je 4 sata

Sretno!

XV matematička olimpijada Bosne i Hercegovine

Mostar, 16. maj 2010.

Zadaci - drugi dan

4. Konveksni četverougao podijeljen je dijagonalama na četiri trougla čije su upisane kružnice podudarne. Dokazati da je taj četverougao romb.
5. Neka su a , b , c dužine stranica trougla čiji obim nije veći od 2. Dokazati da je

$$\left| \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} - \frac{a^3}{c} - \frac{c^3}{b} - \frac{b^3}{a} \right| < 3.$$

6. Dokazati da je ukupan broj jedinica, koji se pojavljuje u svim neuređenim particijama prirodnog broja n , jednak sumi brojeva različitih elemenata tih particija.

Napomena: Za particiju $10 = 1 + 1 + 2 + 3 + 3$ je broj različitih elemenata particije jednak 3, jer su različiti elementi u ovoj particiji 1, 2 i 3.

- Svaki zadatak vrijedi 7 bodova
- Vrijeme za izradu zadataka je 4 sata

Sretno!