

**XIII. JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA
BOSNE I HERCEGOVINE**

Visoko, 30. 5. 2015.

1. Riješiti jednačbu $x(x + 1) = y(y + 4)$ u skupu prirodnih brojeva.

Rješenje:

I način:

Nakon množenja zadane jednačbe sa 4 dobivamo ekvivalentnu jednačbu

$$4x^2 + 4x = 4y^2 + 16y \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + 4x + 16 = 4y^2 + 16y + 16 \Leftrightarrow$$

$$(2x + 1)^2 + 15 = (2y + 4)^2 \Leftrightarrow$$

$$(2y + 4)^2 - (2x + 1)^2 = 15 \Leftrightarrow$$

$$(2y - 2x + 3)(2y + 2x + 5) = 15.$$

Iz gornje jednačbe slijedi da je $1 \leq 2y - 2x + 3$, a kako vrijedi $2y + 2x + 5 \geq 9$ to imamo samo jedan slučaj:

$$2y - 2x + 3 = 1 \quad \wedge \quad 2y + 2x + 5 = 15.$$

Zbrajanjem i oduzimanjem prve jednačbe od druge dobivamo $4x + 2 = 14$, $4y + 8 = 16$. Dakle, dana jednačba ima tačno jedno rješenje $(x, y) = (3, 2)$.

II način:

Ako bi vrijedilo $x \leq y$, onda bi imali $y(y + 4) = x(x + 1) \leq y(y + 1)$, što je očigledno nemoguće. Dakle, mora vrijediti $x > y$. Na sličan način dobivamo $x + 1 < y + 4$, tj. $x < y + 3$. Dakle, imamo samo dvije mogućnosti, $x = y + 1$ i $x = y + 2$. Direktnom provjerom zaključujemo da dana jednačba ima tačno jedno rješenje $(x, y) = (3, 2)$.

III način:

Primijetimo da vrijedi

$$x(x + 1) = y(y + 4) \Leftrightarrow x^2 + x + 4 = y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow x^2 + x + 4 = (y + 2)^2.$$

Dakle, broj $x^2 + x + 4$ je kvadrat prirodnog broja, a kako vrijedi $x^2 + x + 4 > x^2$, to je $x^2 + x + 4 \geq (x + 1)^2$. No,

$$x^2 + x + 4 \geq (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + x + 4 \geq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Dakle, $x \in \{1, 2, 3\}$. Direktnom provjerom zaključujemo da je $(x, y) = (3, 2)$ jedino rješenje zadane jednačbe.

2. Naći sve trojke prirodnih brojeva a, b, c za koje vrijedi:

1) $a \geq b \geq c$;

2) $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2$.

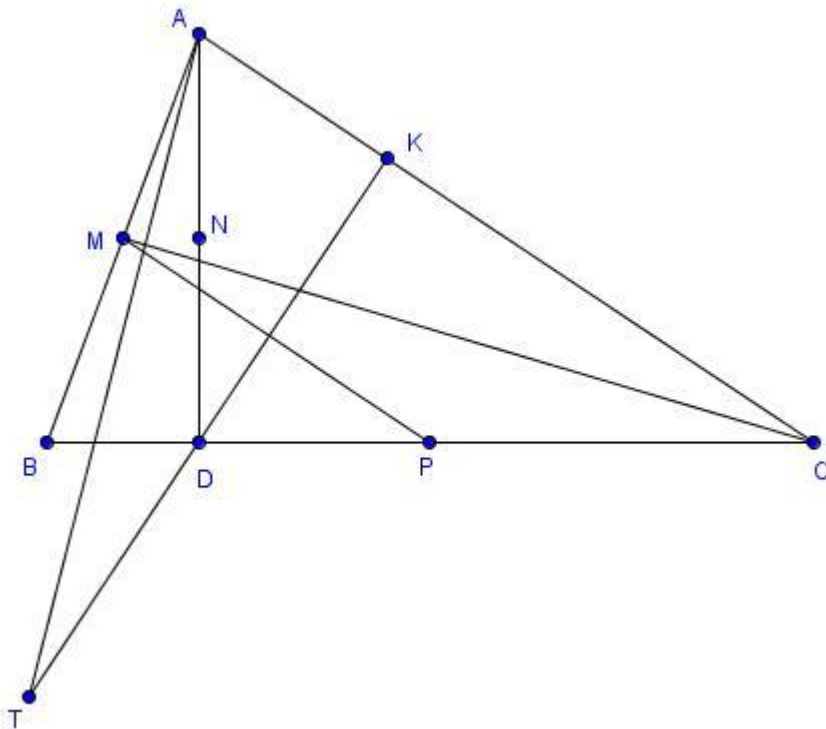
Rješenje: Iz uvjeta $a \geq b \geq c$, dobivamo da je $1 + \frac{1}{a} \leq 1 + \frac{1}{b} \leq 1 + \frac{1}{c}$, pa je

$2 = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right)^3$, odakle je $c < 4$, odnosno $c \in \{1, 2, 3\}$. Za $c = 1$ očigledno nemamo rješenja. Za $c = 2$ dobivamo $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{4}{3}$. Kako je $\frac{4}{3} = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$, odakle je $b \leq 6$, a zbog $b \geq c$, imamo $b \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Uvrštavanjem $b = 2, 3, \dots, 6$ u $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{4}{3}$, dobivamo rješenja: $a = 15, b = 4$; $a = 9, b = 5$; $a = 7, b = 6$. Za $c = 3$ dobivamo $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{3}{2}$. Kako je $\frac{3}{2} = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$, odakle je $b \leq 4$, a zbog $b \geq c$, imamo $b \in \{3, 4\}$. Uvrštavanjem $b = 3, b = 4$ u $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{3}{2}$, dobivamo još dva rješenja $a = 8, b = 3$; $a = 5, b = 4$. Dakle, sve trojke prirodnih brojeva koje zadovoljavaju uvjete zadatka su:

$$(a, b, c) \in \{(15, 4, 2), (9, 5, 2), (7, 6, 2), (8, 3, 3), (5, 4, 3)\}.$$

3. Neka je \overline{AD} visina trokuta ABC , te neka su M, N, P središta dužina $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{BC}$, redom. Dalje, neka je K nožište normale iz točke D na \overline{AC} , te neka je T točka na produžetku \overline{KD} (preko točke D) takva da je $|DT| = |MN| + |DK|$. Ako je $|MP| = 2 \cdot |KN|$, dokazati da je $|AT| = |MC|$.

Rješenje:



Kako je N polovište hipotenuze pravokutnog trokuta DKA , to je N i središte opisane kružnice tog trokuta, tj. $|ND| = |NK| = |NA|$, pa dobivamo $2 \cdot |NK| = |AD|$, tj. $|MP| = |AD|$. S druge strane, pošto je \overline{MP} srednjica trokuta ABC , to je $|MP| = \frac{|AC|}{2}$, pa dobivamo $|AD| = \frac{|AC|}{2}$. Dakle, u pravokutnom trokutu DCA kateta \overline{AD} je duplo manja od hipotenuze \overline{AC} , pa zaključujemo da je $\sphericalangle BCA = 30^\circ$. Odavde dobivamo da je \overline{DK} kateta pravokutnog trokuta DCK nasuprot kuta od 30° , pa vrijedi $|DK| = |DC|/2$. Dakle, \overline{MN} je središnjica trokuta BDA , pa vrijedi $|MN| = \frac{|BD|}{2}$. Sada dobivamo $|DT| = |MN| + |DK| = \frac{|BD|}{2} + \frac{|DC|}{2} = |BC|/2 = |CP|$. Kako je $MP \parallel AC$, to je $\sphericalangle MPC = 180^\circ - \sphericalangle BCA = 150^\circ$, a očigledno vrijedi $\sphericalangle ADT = 90^\circ + \sphericalangle TDB = 90^\circ + \sphericalangle CDK = 90^\circ + 90^\circ - \sphericalangle BCA = 150^\circ$. Dakle, u trokutovima ADT i MPC vrijedi $AD = MP$, $\sphericalangle ADT = \sphericalangle MPC$ i $TD = PC$, pa na osnovu stava SKS zaključujemo da su trouglovi ADT i MPC podudarni. Odavde dobivamo $|AT| = |MC|$, što je i trebalo dokazati.

4. Neka je n prirodan broj i neka su a_1, a_2, \dots, a_n prirodni brojevi iz skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, pri čemu se svaki od ovih brojeva pojavljuje točno jednom. Da li je moguće da brojevi $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$ svi daju različite ostatke pri dijeljenju sa n , ako je:

- a) $n = 7$;
- b) $n = 8$?

Rješenje:

- a) Pretpostavimo da je moguće tako rasporediti brojeve. Najprije dokažimo da broj 7 mora biti na prvom mjestu. Pretpostavimo suprotno, da nije na prvom mjestu, nego da je $a_k = 7$, pri čemu je $k > 1$. Međutim, tada brojevi $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$ i $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + 7$ daju isti ostatak pri dijeljenju sa 7. Dakle, $a_1 = 7$. S druge strane, $a_1 + a_2 + \dots + a_7 = 1 + 2 + \dots + 7 = 28$, što daje isti ostatak kao i a_1 pri dijeljenju sa 7 (oba su djeljiva sa 7, tj. daju ostatak 0). Dakle, nemoguće je rasporediti brojeve na traženi način.
- b) Rezonujući kao pod a), dobijamo da 8 mora biti na prvom mjestu. U ovom slučaju, brojeve je moguće rasporediti na traženi način, što pokazuje naredni primjer: 8, 1, 6, 3, 4, 5, 2, 7.