

XII JUNIORSKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE 2014 (Sarajevo, 31.05.2014. godine)

Jezik: bosanski

1. Odrediti sve brojeve čiji je zapis u dekadnom sistemu oblika $\overline{13xy45z}$, gdje su x, y, z , napoznate cifre, a koji su djeljivi sa 792.

2. Dat je trougao ABC. Na pravoj CA je data tačka D takva da vrijedi $CD = 3 \cdot CA$ (tačka A je između tačaka C i D), a na pravoj BC tačka E ($E \neq B$) takva da je $CE = BC$. Ako je $BD = AE$, dokazati da je ugao BAC prav.

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi, takvi da je $a + b + c = 1$. Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}} + \frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}} + \frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}} \geq 3$$

Kada vrijedi jednakost?

4. Dato je pet brojeva 1, 3, 5, 7, 9. Novih pet brojeva dobijamo tako što proizvoljna četiri broja a, b, c, d iz prethodne petorke zamijenimo sa brojevima:

$$\frac{1}{2} \cdot (a + b + c - d), \frac{1}{2} \cdot (a + b - c + d), \frac{1}{2} \cdot (a - b + c + d), \frac{1}{2} \cdot (-a + b + c + d),$$

a peti broj ostaje nepromijenjen.

Da li se višestrukim ponavljanjem ovog postupka može dobiti sljedećih pet brojeva:

a) 0, 2, 4, 6, 8?

b) 3, 4, 5, 6, 7?

Dozvoljeno korištenje pribora za pisanje i crtanje.

Vrijeme za izradu je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

RJEŠENJA

1. Budući da je $792=8 \cdot 9 \cdot 11$, broj $13xy45z$ mora biti djeljiv sa 8, 9 i 11. Iz uslova da $8 \mid 45z = 450+z=448+z+2$. Dakle $8 \mid z+2$, pa je $z=6$. Koristeći uslov da $9 \mid 13xy45z$, sledi da dijeli zbir $1+3+x+y+4+5+6=18+x+y+1$. Dakle, $9 \mid x+y+1$, što nam daje $x+y=8$ ili $x+y=17$. Uslov da $11 \mid 13xy45z$ nam daje da 11 dijeli $6-5-4-y-x-3+1=x-y+3$, odakle je $x-y=-3$ ili $x-y=-8$. Imamo dvije mogućnosti:
1. $x+y$ je paran, onda je $x+y=8$ i $x-y=8$ pa je $x=8$, $y=0$
 2. $x+y$ je neparan, onda je $x+y=17$ i $x-y=-3$, pa je $x=7$ i $y=10$ što je nemoguće.
- Dakle, jedino rešenje je broj 1380456.

2. U trouglu BED , DC je težišnica, a kako je $DA : AC = 2 : 1$, to je A težište tog trougla. Neka prava EA siječe BD u tački M . Kako je EM ustvari težišnica trougla BED (prolazi kroz A), to je M sredina od BD , te vrijedi $AM = \frac{AE}{2}$. Sada je $BM = DM = \frac{BD}{2} = \frac{AE}{2} = AM$, tj. M je centar kružnice opisane oko tog trougla BAD , pa je $\sphericalangle BAD = 90^\circ$, tj. $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ (ovo na kraju može i jednostavnim računanjem uglova).

3. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja imamo:

$$\sqrt{(a+2b)(b+2a)} \leq \frac{a+2b+b+2a}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

a odavde

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}} \geq \frac{2}{3(a+b)} \quad (1)$$

Analogno dobijamo nejednakosti :

$$\frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}} \geq \frac{2}{3(b+c)} \quad (2)$$

i

$$\frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}} \geq \frac{2}{3(a+c)} \quad (3)$$

Nakon sabiranja nejednakosti (1), (2) i (3) sledi :

$$\frac{1}{\sqrt{(a+2b)(b+2a)}} + \frac{1}{\sqrt{(b+2c)(c+2b)}} + \frac{1}{\sqrt{(c+2a)(a+2c)}} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \quad (4)$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine za tri pozitivna broja imamo :

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}}$$

tj.

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{3}{a+b+c} ,$$

A odavde zbog $a + b + c = 1$:

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq 3 \quad (5)$$

Sada iz (4) i (5) dobijamo datu nejednakost.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = \frac{1}{3}$.

4.a) Primijetimo da se pri zamjeni brojeva navedenom transformacijom, zbir brojeva polazne petorke ne mijenja. Zato nije moguće dobiti petorku 0,2,4,6,8

b) Primijetimo da se pri zamjeni brojeva navedenom transformacijom, zbir kvadrata brojeva polazne petorke ne mijenja. Zato nije moguće dobiti ni petorku 3,4,5,6,7.

| Osvojeno mjesto | šifra | ime i prezime | zad 1 | zad 2 | zad 3 | zad 4 | ukupno |
|-----------------|-------|-----------------------------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 1 | 33 | Amar Kurić | 10 | 10 | 10 | 4 | 34 |
| 1 | 18 | Milica Đukić | 10 | 10 | 10 | 4 | 34 |
| 1 | 34 | Tijana Babić | 10 | 10 | 10 | 4 | 34 |
| 4 | 23 | Stefan Jurošević | 10 | 3 | 10 | 0 | 23 |
| 5 | 5 | Azur Đonlagić | 10 | 10 | 1 | 0 | 21 |
| 6 | 32 | Marija Đurić | 10 | 10 | 0 | 0 | 20 |
| 7 | 27 | Nemanja Torbica | 10 | 8 | 1 | 0 | 19 |
| 8 | 15 | Dušan Garić | 10 | 0 | 4 | 1 | 15 |
| 8 | 1 | Vesna Bjeloglav | 8 | 2 | 5 | 0 | 15 |
| 10 | 31 | Damjan Stanković | 10 | 1 | 1 | 1 | 13 |
| 11 | 13 | Bakir Goran | 10 | 0 | 2 | 0 | 12 |
| 12 | 14 | Arijana Gjocaj | 10 | 1 | 0 | 0 | 11 |
| 12 | 4 | Boris Velašević | 10 | 0 | 1 | 0 | 11 |
| 12 | 21 | Hana Ibrahimpašić | 10 | 1 | 0 | 0 | 11 |
| 15 | 30 | Admir Papić | 10 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 15 | 6 | Adnan Sabanović | 10 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 15 | 10 | Amer Bešo | 10 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 15 | 26 | Emir Sejdić | 10 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 15 | 2 | Mirna Cirić | 10 | 0 | 0 | 0 | 10 |
| 20 | 7 | Muamer Parić | 8 | 0 | 0 | 1 | 9 |
| 21 | 35 | Salih Ibrahimović | 5 | 1 | 1 | 0 | 7 |
| 22 | 29 | Aleksa Račić | 3 | 1 | 1 | 1 | 6 |
| 23 | 3 | Ana Marija Vego | 2 | 2 | 0 | 0 | 4 |
| 24 | 9 | Bojan Galić | 3 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 24 | 19 | David Ivaniš | 2 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| 24 | 22 | Ivan Martinović (Kocerin) | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| 24 | 28 | Lejla Vardo | 2 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| 28 | 16 | Ivana Janković | 2 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 29 | 11 | Adna Šabanić | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 29 | 20 | Ivan Martinović (Zepče) | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 29 | 17 | Tanja Gavrić | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 32 | 25 | Ante Duvnjak | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 32 | 12 | Filip Budić | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 32 | 8 | Ivan Marinović (O.S. M. Marulića) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 32 | 24 | Luka Marijanović | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |