XI JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE
(Pale, 01.06.2013. godine)

Jezik: bosanski

1. Dato je n cijelih brojeva. Poznato je da je proizvod ma kog od njih, sa zbirom preostalih koji je uvećan za 1, djeljiv sa zbirom svih n brojeva. Dokazati da je zbir kvadrata svih brojeva djeljiv njihovim zbirom.

2. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, (tj. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$) takvi da je:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\frac{a}{3c(a^2 - ab + b^2)} + \frac{b}{3a(b^2 - bc + c^2)} + \frac{c}{3b(c^2 - ca + a^2)} \leq \frac{1}{abc}$$

Kada vrijedi jednakost?

3. Neka su M i N dodirne tačke upisane kružnice u trouglu ΔABC sa stranicama AB i AC, a P tačka presjeka prave MN sa simetralom ugla $\sphericalangle ABC$. Dokazati da je $\sphericalangle BPC = 90^0$.

4. Dat je 2013-ugao $A_1A_2 \dots A_{2013}$. Njegova tjemena označena su brojevima, tako da je zbir brojeva kojim je označeno bilo kojih 9 uzastopnih tjemena konstantan i iznosi 300. Ako je poznato da je tjeme A_{13} označeno brojem 13, a tjeme A_{20} brojem 20, odrediti kojim je brojem označeno tjeme A_{2013}.

Vrijeme za izradu je 180 minuta.

Sretno!

RJEŠENJA

1. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ dati cijeli brojevi. Označimo sa:

$$S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \text{ i } S_2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2$$

Prema uslovu zadatka je:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \cdot (S_1 - x_1 + 1) = y_1 \cdot S_1 \\ x_2 \cdot (S_1 - x_2 + 1) = y_2 \cdot S_1 \\ \vdots \\ x_n \cdot (S_1 - x_n + 1) = y_n \cdot S_1 \end{matrix}\right\} \quad gdje\ je\ y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{Z}$$

Ako saberemo sve jednakosti, dobijemo:

$$ {S_1}^2 - S_2 + S_1 = Y \cdot S_1$$

gdje je $Y = y_1 + y_2 + \ \dots + y_n$. Sada je:

$$S_2 = S_1 \cdot (S_1 + 1 - Y)$$

2. Kako iz $(a-b)^2 \geq 0$ slijedi da je $a^2 - ab + b^2 \geq ab$, to je:

$$\frac{a}{3c(a^2 - ab + b^2)} \leq \frac{a}{3c \cdot ab} = \frac{1}{abc} \cdot \frac{a}{3}$$

Analogno dobijamo i druga 2 ograničenja. Nakon sabiranja ćemo dobiti:

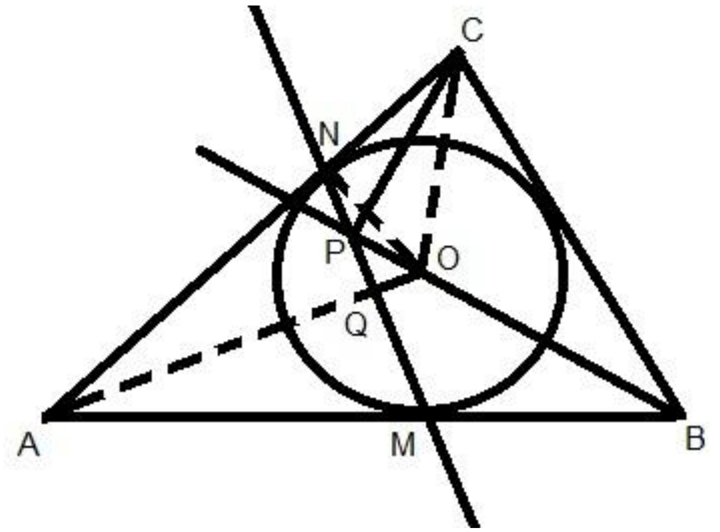
$$\frac{a}{3c(a^2 - ab + b^2)} + \frac{b}{3a(b^2 - bc + c^2)} + \frac{c}{3b(c^2 - ca + a^2)} \leq \frac{1}{abc} \cdot \frac{a+b+c}{3}$$

Sada iz $A \leq K$ nejednakosti imamo:

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1$$

Pa vrijedi data nejednakost. Iz $(a-b)^2 \geq 0$ i preostalih, te $A \leq K$ nejednakosti dobijamo da je $a = b = c$, a iz uslova $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ dobijamo da je $a = b = c = 1$.

3.



Kako je $|AM| = |AN|$, to je trokut ΔAMN jednakokračni. Pravac AO je simetrala kuta $\sphericalangle MAN$, pa je $\overline{AO} \perp \overline{MN}$. Neka je $\overline{AO} \cap \overline{MN} = \{Q\}$. Tada je kut $\sphericalangle PNC = 90^0 + \frac{\alpha}{2}$, odnosno $\sphericalangle POC = \frac{\beta+\gamma}{2}$. Slijedi $\sphericalangle PNC + \sphericalangle POC = 180^0$, što znači da je 4-kut $NPOC$ tetivan. Kutovi $\sphericalangle OPC$ i $\sphericalangle ONC$ su obodni nad tetivom $\overline{OC}$, pa je kut $\sphericalangle OPC = \sphericalangle ONC = 90^0$. U slučaju da se točka P nalazi izvan trokuta ΔABC, dokaz je sličan.

4. Neka je a_i broj kojim je označeno tjeme $A_i, (i \in \{1, 2, \dots, 2013\})$. Iz uslova zadataka je $a_1 + a_2 + \cdots + a_8 + a_9 = a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}$ odakle je $a_1 = a_{10}$. Slično se dobije da je $a_2 = a_{11}$, $a_3 = a_{12}$, … Sada imamo da je:

$$a_1 = a_{10} = a_{19} = \cdots = a_{2008} = a_4 = a_{13} = \cdots = a_{2011} = a_7 = a_{16} = \cdots = a_{2005} = a_1$$
$$a_2 = a_{11} = a_{20} = \cdots = a_{2009} = a_5 = a_{14} = \cdots = a_{2012} = a_8 = a_{17} = \cdots = a_{2006} = a_2$$
$$a_3 = a_{12} = a_{21} = \cdots = a_{2010} = a_6 = a_{15} = \cdots = a_{2013} = a_9 = a_{18} = \cdots = a_{2007} = a_3$$

pa je $a_{2013} = 67$.

Rang lista

Šifra	Ime i prezime	Zadatak 1	Zadatak 2	Zadatak 3	Zadatak 4	Ukupno	
15	Zlatko Salko Lagumdžija	10	8	10	10	38	
13	Tijana Babić	10	6	10	10	36	
26	Milica Babić	10	3	10	10	33	
37	Berin Spahović	10	9	10	0	29	
23	Narija Djedović	10	7	1	10	28	Uvažena žalba na 2. zadatak (+2 boda)
24	Amar Kurić	10	9	0	6	25	
22	Emin Mrkonja	10	6	1	4	21	
1	Azur Đonlagić	9	2	0	9	20	
4	Maja Trninić	10	0	0	4	14	
25	Aleksandar Jelić	1	0	0	10	11	
11	Đorđe Mitrović	4	1	2	4	11	Uvažena žalba na 3. zadatak (+2 boda)
6	Amra Alihodžić	10	0	0	0	10	
31	Milica Đokić	0	6	0	4	10	
2	Adisa Bolić	4	0	1	4	9	
10	Ašida Čatić	4	0	2	2	8	
17	Nura Tursić	1	0	2	4	7	
5	Hana Ibrahimpašić	1	1	0	4	6	
21	Stefan Jurošević	1	0	1	4	6	
32	Amela Tufo	0	0	2	4	6	
8	Stefan Malbašić	3	0	1	1	5	
12	Dalila Alibegović	1	0	0	4	5	
28	Mirza Sinanović	3	0	0	2	5	
33	Dajana Jovanić	1	0	0	4	5	
34	Stjepan Barukčić	3	0	0	2	5	
36	Adi Karakaš	1	0	0	4	5	
18	Jovana Obradović	0	0	0	4	4	
30	Mirko Beštić	1	0	1	2	4	Uvažena žalba na 4. zadatak (+1 boda)
3	Tatjana Vujičić	0	0	0	2	2	
7	Ajla Šehović	1	0	1	0	2	
27	Amela Abdić	1	1	0	0	2	
35	Vesna Bjeloglav	1	1	0	0	2	
9	Marko Jugović	1	0	0	0	1	
14	Dženeta Kudumović	0	1	0	0	1	
20	Nemanja Torbica	0	0	0	1	1	
29	Anđela Spaić	1	0	0	0	1	
38	Nedim Kukuruzović	1	0	0	0	1	
41	Marko Kukrika	0	1	0	0	1	
42	Lidija Đikić	1	0	0	0	1	
43	Elvedina Mehić	0	1	0	0	1	
16	Bećir Tabaković	0	0	0	0	0	
19	Branko Ribić	0	0	0	0	0	
39	Danijel Opačak	0	0	0	0	0	
40	Marija Bradara	0	0	0	0	0	