

**IX JUNIORSKA MATEMATIČKA
OLIMPIJADA BIH**

SARAJEVO, 28.05.2011. GODINE

www.umtk.info

IX JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 28.05.2011. godine

1. Riješiti u skupu prirodnih brojeva jednačinu

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5} - \frac{1}{xy}$$

2. Dokazati da za nenegativne brojeve a i b važe nejednakosti

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \leq \frac{2(a+b)}{2+a+b}$$

3. U jednakokrakom trouglu ABC ($|AC| = |BC|$), simetrala ugla BAC i visina CD spuštena iz vrha C na osnovicu (D je podnožje visine) sijeku se u tački O, tako da je $|CO| = 3 |OD|$. U kojem omjeru dijeli visinu CD, visina spuštena iz vrha A na krak BC, trougla ABC?
4. Razmotrimo sljedeću matematičku križaljku u koju se upisuju cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, tako da važi:

	1	2	3		
4	2	3	7	0	5
6			7		
8		9			
	10				

- i) Sve cifre se pojavljuju tačno 2 puta.
- ii) 10 vodoravno je faktor od 4 vodoravno
- iii) $4(4 \text{ vodoravno} - 4 \text{ uspravno} + 5) = 1 \text{ uspravno}$
- iv) 36 je faktor od 1 vodoravno i 5 uspravno
- v) 9 uspravno je faktor od 5 uspravno

Na koliko različitih načina je moguće riješiti ovu matematičku križaljku?

Vrijeme za izradu zadataka je 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

1. Riješiti u skupu prirodnih brojeva jednačinu

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{5} - \frac{1}{xy}$$

Rješenje:

Množenjem sa $5xy$ data jednačina je ekvivalentan redom sa:

$$5(y - x) = xy - 5$$

$$xy + 5x - 5y - 5 = 0$$

$$xy + 5x - 5y - 25 = -20$$

$$(x - 5)(y + 5) = -20$$

$$(5 - x)(y + 5) = 20$$

Kako su $5 - x$ i $y + 5$ djelioci broja 20 i pri tome je $0 < 5 - x < 5 < y + 5$, imamo sljedeća dva slučaja

$$\text{i) } 5 - x = 1, y + 5 = 20,$$

$$\text{ii) } 5 - x = 2, y + 5 = 10.$$

Pa je rešenje $(x, y) = \{(4, 15), (3, 5)\}$.

2. Dokazati da za nenegativne brojeve a i b važe nejednakosti

$$\frac{a + b}{1 + a + b} \leq \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} \leq \frac{2(a + b)}{2 + a + b}$$

Rješenje:

Lijeva nejednakost važi jer je ekvivalentna redom sa

$$\begin{aligned} \frac{a}{1 + a + b} - \frac{a}{1 + a} &\leq \frac{b}{1 + b} - \frac{b}{1 + a + b} \\ \frac{a(1 + a - 1 - a - b)}{1 + a} &\leq \frac{b(1 + a + b - 1 - b)}{1 + b} \\ \frac{-ab}{1 + a} &\leq \frac{ab}{1 + b} \end{aligned}$$

Desna nejednakost je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} \frac{b}{1 + b} - \frac{2b}{2 + a + b} &\leq \frac{2a}{2 + a + b} - \frac{a}{1 + a} \\ \frac{b(2 + a + b - 2 - 2b)}{1 + b} &\leq \frac{a(2 + 2a - 2 - a - b)}{1 + a} \\ \frac{b(a - b)}{1 + b} &\leq \frac{a(a - b)}{1 + a} \end{aligned}$$

$$(a - b) \left(\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} \right) \geq 0$$

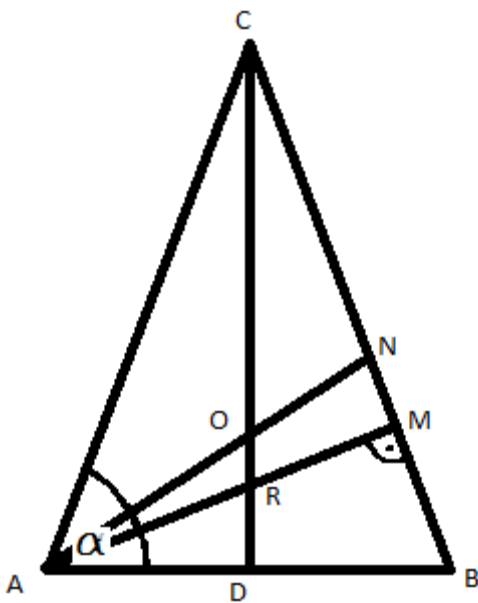
$$(a - b) \frac{a + ab - b - ab}{(1+a)(1+b)} \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0$$

Pa očito važi.

3. U jednakokrakom trouglu ABC ($|AC| = |BC|$), simetrala ugla BAC i visina CD spuštena iz vrha C na osnovicu (D je podnožje visine) sijeku se u tački O, tako da je $|CO| = 3 |OD|$. U kojem omjeru dijeli visinu CD, visina spuštena iz vrha A na krak BC, trougla ABC?

Rješenje:



Iz uslova zadatka je $|CO| = 3 |OD|$ i $|CO| : |OD| = b : (a/2)$, tj. $B = 3a/2$.

Iz sličnosti trouglova ABM i DBC, slijedi

$$|BM| : a = \frac{a}{2} : b = \frac{a}{2} : \frac{3a}{2}$$

Odnosno $|BM| = a/3$.

Iz sličnosti trouglova ADR i ABM slijedi

$$|DR| : |BM| = |AD| : |AM|$$

$$|DR| : \frac{a}{3} = \frac{a}{2} : \frac{2a\sqrt{2}}{3}$$

$$|DR| = \frac{a\sqrt{2}}{8}$$

Kako je $|CR| + |DR| = |CD|$, dobijamo

$$\frac{|CR|}{|RD|} = \frac{|CD|}{|RD|} - 1 = 7$$

Tj. $|CR| : |RD| = 7:1$.

4. Razmotrimo sljedeću matematičku križaljku u koju se upisuju cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, tako da važi:

	1	2	3	
4	2	3	7	5
6			7	
8		9		
	10			

- i) Sve cifre se pojavljuju tačno 2 puta.
- ii) 10 vodoravno je faktor od 4 vodoravno
- iii) $4(4 \text{ vodoravno} - 4 \text{ uspravno} + 5) = 1 \text{ uspravno}$
- iv) 36 je faktor od 1 vodoravno i 5 uspravno
- v) 9 uspravno je faktor od 5 uspravno

Na koliko različitih načina je moguće riješiti ovu matematičku križaljku?

Rješenje:

Kako je $23705 = 5 \cdot 11 \cdot 431$, to iz drugog uslova imamo da je 10 vodoravno 431.

Iz četvrtog uslova je mogućnost za 5 uspravno 504, 540 i 576, a kako je samo 504 djeljivo sa dvocifrenim brojem koji završava sa 3, to je na osnovu 5. Uslova 9 uspravno jednako 63 i 5 uspravno jednako 504.

Na osnovu prvog uslova (svaka cifra se pojavljuje 2 puta) i četvrtog uslova, te zbog trećeg uslova je:

$$1 \text{ uspravno} \geq 4 \cdot (23705 - 299 + 5) = 93644$$

Pa je jedina mogućnost za 1 vodoravno 972.

Sada tabela izgleda:

	1	2	3	
	9	7	2	
4	2	3	7	5
6	x	z		0
8	y	u	6	4
	10			
	4	3	1	

Uvrštavanjem u treći uslov dobijamo:

$100z + 10u + 40x + 4y = 1036$, odakle zaključujemo da y može biti 4 ili 9, ali zbog prvog uslova je moguće jedino $y = 9$.

Sada dobijamo $10z + 4x + u = 100$, pa provjerom sa prvim uslovom dobijamo $z = 6$ i $x = u = 8$, pa je tabela:

	1	2	3	
	9	7	2	
4	2	3	7	5
6	8	6		0
8	9	8	6	4
	10			
	4	3	1	

Za preostala dva mjesta su kandidati 1 i 5, koji u bilo kojem poretku zadovoljavaju uslove zadatka, pa je ukupan broj različitih rješenja 2.

REZULTATI
IX JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE
Sarajevo, 28. 5. 2011. godine

Mjesto	Prezime i ime	Šifra	Škola	1	2	3	4	Σ
1.	Jašarević Abdulah	RAVAN	Sarajevo koledž	10	10	10	3	33
2.	Samardžić Petar	NEJEDNAČINA	OŠ „Risto Proroković“ Nevesinje	10	9	10	1	30
3.	Muminović Rijad	MI	Druga gimnazija Sarajevo	10	10	5	2	27
4.	Mustafić Ibrahim	BROJ	OŠ „Dulistan“ Ilijaš	10	10	0	1	21
4.	Mustafić Kemal	UNIJA	OŠ „Čengić Vila I“ Sarajevo	10	10	1	0	21
4.	Jojić Đorđe	JEDNAČINA	OŠ „Veselin Masleša“ Foča	10	9	0	2	21
7.	Šišić Melika	KRUG	OŠ „Kovačići“ Sarajevo	10	9	0	1	20
7.	Babić Milica	KOCKA	OŠ „Georgij Stojkov Rakovski“ Banja Luka	10	0	0	10	20
9.	Papić Demir	ETA	Deveta osnovna škola Ilidža	9	9	0	1	19
10.	Kreho Adnan	DUŽ	OŠ „Behaudin Selmanović“ Sarajevo	8	9	1	0	18
11.	Zdilar Paško	NI	OŠ „Kiseljak“ Kiseljak	8	9	0	0	17
11.	Subotić Nikola	PITAGORA	OŠ „Sveti Sava“ Doboj	8	9	0	0	17
11.	Brkić Haris	KUPA	SŠ „Tursko – Bosanski koledž“ Lukavac	5	9	2	1	17
14.	Šipovac Milena	PODSKUP	OŠ „Jovan Dučić“ Kasindo	9	0	1	5	15
14.	Kurtović Nejra	ŠESTAR	OŠ „Edhem Mulabdić“ Sarajevo	10	3	0	2	15
14.	Gačić Dajana	KRUŽNICA	OŠ „Vuk Karadžić“ Teslić	10	4	0	1	15
17.	Sarajlić Dina	POVRŠINA	Druga gimnazija Sarajevo	10	0	1	1	12
17.	Biogradlija Senija	PSI	OŠ „Edhem Mulabdić“ Zenica	10	0	0	2	12
17.	Nurkanović Ajla	PRESJEK	OŠ „Jala“ Tuzla	10	0	2	0	12
20.	Senković Anto	OMJER	OŠ „Vladimir Nazor“ Odžak	9	0	0	1	10
20.	Spahić Vedad	PIRAMIDA	OŠ „Meša Selimović“ Zenica	1	5	0	4	10
22.	Topalović Božo	KVADRAT	OŠ „Vuk Karadžić“ Višegrad	5	3	0	1	9
23.	Modrić Emina	DI	OŠ „Banovići“ Banovići	6	0	0	2	8
24.	Crnčević Elvir	PRAVA	OŠ „Skender Kulenović“	5	0	0	2	7
25.	Đonlagić Azur	GAMA	OŠ „Novi Grad“ Tuzla	0	0	1	5	6
26.		TEOREMA		4	0	1	0	5
27.		SKUP		2	0	0	2	4
27.		EPSILON		0	0	0	4	4
29.		TETA		2	0	1	0	3
29.		LAMBDA		2	0	0	1	3
31.		OMIKRON		1	0	0	1	2
31.		PREČNIK		1	0	0	1	2
31.		PROIZVOD		0	0	1	1	2
34.		VOLUMEN		1	0	0	0	1
34.		BETA		0	0	0	1	1
34.		VALJAK		0	0	0	1	1
34.		LOPTA		0	0	0	1	1
38.		KOLIČNIK		0	0	0	0	0
38.		KVADAR		0	0	0	0	0
38.		TROUGAO		0	0	0	0	0
38.		RAZLOMAK		0	0	0	0	0
38.		ALFA		0	0	0	0	0
38.		DELTA		0	0	0	0	0
38.		PRIZMA		0	0	0	0	0
38.		RADIJUS		0	0	0	0	0
38.		POLUPREČNIK		0	0	0	0	0