

8. JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Pale, 29.05.2010. god.

1. Dokazati da je broj $2^{2008} \cdot 2^{2010} + 5^{2012}$ složen.
2. Posmatrajmo sve polinome trećeg stepena $P(x)$ sa koeficijentima iz skupa \mathbb{N}_0 koji zadovoljavaju uslov $P(1) = 20$. Među njima odrediti polinom za kojeg se dostiže:
 - a) minimalna vrijednost izraza $P(4)$,
 - b) maksimalna vrijednost izraza $P(3)/P(2)$.
3. Tačke M i N su date na stranama AD i BC romba $ABCD$ redom. Prava MC siječe duž BD u T , prava MN duž BD u U , prava CU siječe stranu AB u Q , a prava QT siječe stranu CD u P . Dokazati da trouglovi QCP i MCN imaju jednake površine.
4. Na kružnici su u smijeru kretanja kazaljke na satu napisani svi prirodni brojevi od 1 do 2010. Precrtajmo najprije broj 1, zatim broj 10, pa 19, i tako redom svaki deveti broj u istom smijeru. Koji će broj prvi biti precrtan dva puta? Koliko je brojeva u tom trenutku još neprecrtano?

Vrijeme za izradu zadataka: 180 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

8. JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Pale, 29.05.2010. god.

1. Dokazati da je broj $2^{2008} \cdot 2^{2010} + 5^{2012}$ složen.

Rješenje:

$$\begin{aligned} 2^{2008} \cdot 2^{2010} + 5^{2012} &= (2^{2009})^2 + 2 \cdot 2^{2009} \cdot 5^{1006} + (5^{1006})^2 - 2 \cdot 2^{2009} \cdot 5^{1006} \\ &= (2^{2009} + 5^{1006})^2 - (2^{1005} \cdot 5^{503})^2 \\ &= (2^{2009} + 5^{1006} + 2^{1005} \cdot 5^{503})(2^{2009} + 5^{1006} - 2^{1005} \cdot 5^{503}). \end{aligned}$$

Jasno je da je $2^{2009} + 5^{1006} + 2^{1005} \cdot 5^{503} > 1$. Lako se pokaže da je

$$2^{2009} + 5^{1006} - 2^{1005} \cdot 5^{503} \equiv 2 \pmod{5}.$$

2. Posmatrajmo sve polinome trećeg stepena $P(x)$ sa koeficijentima iz skupa \mathbb{N}_0 koji zadovoljavaju uslov $P(1) = 20$. Među njima odrediti polinom za kojeg se dostiže:
- minimalna vrijednost izraza $P(4)$,
 - maksimalna vrijednost izraza $P(3)/P(2)$.

Rješenje:

Označimo taj polinom $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$. Iz $P(1) = 20$ dobijamo relaciju $a + b + c + d = 20$.

Sada, $P(4) = 64a + 16b + 4c + d = (a + b + c + d) + 63a + 15b + 3c = 20 + 63a + 15b + 3c$. Kako je a barem 1, jasno je da se minimum dostiže kad je $a = 1, b = 0, c = 0, d = 19$ i ta minimalna vrijednost je $P(4) = 83$ i dostiže se za polinom $P(x) = x^3 + 19$.

Na sličan način dobijamo $P(3) = 27a + 9b + 3c + d$ te $P(2) = 8a + 4b + 2c + d$. Stavimo da je $\frac{27a+9b+3c+d}{8a+4b+2c+d} \leq L$ odakle transformacijom dobijamo

$$(27 - 8L)a + (9 - 4L)b + (3 - 2L)c + (1 - L)d \leq 0(*).$$

Iz nenegativnosti koeficijenata a, b, c, d jasno je da će za $L \geq 27/8, L \geq 9/4, L \geq 3/2, L \geq 1$, odnosno $L \geq 27/8$ uvijek biti ispunjen uslov(*).

Pokažimo da je $L = 27/8$ maksimalna vrijednost traženog izraza. Posmatrajmo polinom $P(x) = 20x^3$. Za njega je vrijednost $P(3)/P(2) = 27/8$.

3. Tačke M i N su date na stranama AD i BC romba $ABCD$ redom. Prava MC siječe duž BD u T , prava MN duž BD u U , prava CU siječe stranu AB u Q , a prava QT siječe stranu CD u P . Dokazati da trouglovi QCP i MCN imaju jednake površine.

Rješenje:

Udaljenosti tačke M od prave BC i tačke Q od prave DC su jednake, jer je $ABCD$ romb. Stoga je dovoljno pokazati da je $CP = CN$, odnosno $DP = BN$.

Koristeći Talesovu teoremu imamo da vrijedi $\frac{BU}{UD} = \frac{QU}{UC} = \frac{NU}{UM}$, što daje $NQ \parallel MC$ i analogno $MP \parallel CQ$.

Sada su trouglovi MDP i BQC slični (tri jednaka ugla), pa vrijedi

$$\frac{DP}{BQ} = \frac{MD}{BC} = \frac{DT}{BT}$$

Na sličan način se dobija da je i $\frac{BN}{MD} = \frac{BQ}{DC}$, a otuda slijedi $\frac{DP}{MD} = \frac{BN}{MD}$ odnosno $DP = BN$, što daje traženu tvrdnju.

4. Na kružnici su u smjeru kretanja kazaljke na satu napisani svi prirodni brojevi od 1 do 2010. Precrtajmo najprije broj 1, zatim broj 10, pa 19, i tako redom svaki deveti broj u istom smjeru. Koji će broj prvi biti precrtan dva puta? Koliko je brojeva u tom trenutku još neprecrtano?

Rješenje:

Kako je $2010 = 9 \cdot 223 + 3$ to će u prvom obilasku biti precrtani brojevi

$$1 = 0 \cdot 9 + 1, 10 = 1 \cdot 9 + 1, \dots, 2008 = 223 \cdot 9 + 1.$$

U sljedećem obilaženju će biti precrtani brojevi

$$7 = 0 \cdot 9 + 7, 16 = 1 \cdot 9 + 7, \dots, 2005 = 222 \cdot 9 + 7.$$

U trećem obilaženju će biti precrtani

$$4 = 0 \cdot 9 + 4, 13 = 1 \cdot 9 + 4, \dots, 2002 = 222 \cdot 9 + 4.$$

U četvrtom obilaženju ćemo prvo morati precrtati broj 1 i to će biti prvi ponovo precrtani broj.

Ukupno smo precrtali $224 + 223 + 223 = 670$ brojeva. Prema tome, neprecrtanih brojeva je ostalo $2010 - 670 = 1340$.

8. JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE
Pale, 29.05.2010. god.

REZULTATI

Р.бр.	Шифра	Име и презиме	Школа	Мјесто	1	2	3	4	укупно
1	1	Ивона Јурошевић	ОШ "Бранко Радичевић"	Братунац	10	2	2	10	24
2	40	Абдулах Јашаревић	ОШ "Травник"	Травник	10	2	2	10	24
3	16	Харис Бркић	ОШ "Лукавац Мјесто"	Лукавац	7	6	2	8	23
4	18	Марко Палангетић	СШЦ "Милорад Влацић"	Власеница	10	1	2	10	23
5	27	Ања Шврака	ОШ "Алекса Шантић"	Бања Лука	10	2	1	10	23
6	38	Милан Кузмановић	ОШ "Бранко Ћопић"	Бања Лука	10	1	0	10	21
7	19	Фадил Жилић	ОШ "Крека"	Тузла	8	4	0	8	20
8	39	Милица Малешевић	ОШ "Бранко Ћопић"	Бања Лука	9	4	3	3	19
9	28	Ријад Муминовић	ОШ "Ченгић Вила"	Сарајево	1	6	0	10	17
10	11	Дина Сарајлић	ОШ "М.Ѓазим Ѓатић"	Сарајево	8	7	0	0	15
11	15	Хаџем Хаџић	"Сарајево колеџ"	Сарајево	0	2	2	10	14
12	29	Џенана Пушчул	ОШ "М.М. Башескија"	Високо	5	2	0	6	13
13	23	Филип Божић	ОШ "Свети Сава"	Бијељина	0	0	2	10	12
14	31	Ламија Кујан	ОШ "М.М. Башескија"	Сарајево	0	0	2	10	12
15	43	Ена Хашимбеговић	ОШ "Меша Селимовић"	Зеница	0	4	0	8	12
16	6	Ирма Хаџић	II ОШ	Сребреник	0	0	1	10	11
17	9	Ђорђе Јојић	ОШ "Веселин Маслеша"	Фоча	1	0	0	10	11
18	24	Аднан Купинић	ОШ "Кључ"	Кључ	2	1	0	8	11
19	26	Демир Папић	IX ОШ	Сарајево	0	1	0	10	11
20	36	Здравка Покрајчић	ОШ "Ивана Брлић Мажуранић"	Љубушки	0	0	1	10	11
21	14	Никица Перић	ОШ "Прва основна школа"	Широки Бријег	0	0	0	10	10
22	25	Милош Томић	ОШ "Петар Кочић"	Нова Топола	0	1	1	8	10
23	8	Адис Чизмић	II ОШ	Сребреник	0	0	1	8	9
24	32	Ведран Ивић	ОШ "Владимир Назор"	Оџак	0	0	0	8	8
25	21	Аднан Крехо	ОШ "Бехаудин Селмановић"	Сарајево	0	1	0	6	7
26	34	Нермана Челебић	ОШ "М.М. Башескија"	Високо	0	0	0	7	7
27	7	Ахмед Махмуд	Међународна ОШ	Тузла	0	0	0	6	6
28	22	Росана Гаврић	ОШ "Васа Пелагић"	Пелагићево	0	0	0	6	6
29	30	Петар Самарџић	ОШ "Ристо Пророковић"	Невесиње	0	0	2	2	4
30	4	Милена Шиповац	ОШ "Јован Дучић"	Источна Илиџа	0	1	1	1	3
31	13	Никола Суботић	ОШ "Свети Сава"	Добој	0	2	0	1	3
32	20	Ахмед Оруч	ОШ "М.М. Башескија"	Сарајево	0	0	0	3	3
33	5	Ана Рајковић	ОШ "Била"	Била	0	0	0	2	2
34	10	Адмир Омерагић	ОШ "С.С. Крањчевић"	Сарајево	0	0	0	2	2
35	12	Ајла Нуркановић	ОШ "Јала"	Тузла	2	0	0	0	2
36	17	Теа Јозић	ОШ "фра Ловро Караула"	Ливно	0	0	0	2	2
37	33	Асим Муџић	ОШ "Абдулвехаб Илхамија"	Тешањ	0	0	0	2	2
38	37	Драган Бабић	ОШ "Бранко Ћопић"	Приједор	0	0	2	0	2
39	44	Драгана Лујић	ОШ "Стефан Немања"	Бијељина	0	0	1	1	2
40	2	Милена Божић	ОШ "Свети Сава"	Модрича	0	0	1	0	1
41	35	Азра Хамедовић	ОШ "Кључ"	Кључ	0	0	0	1	1
42	42	Сенија Биоградлија	ОШ "Едхем Мулабдић"	Зеница	0	0	0	1	1
43	3	Амна Мухадемовић	I ОШ	Маглај	0	0	0	0	0
44	41	Сенка Стипанчић	ОШ "Владимир Назор"	Оџак	0	0	0	0	0