VII JUNIORSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Vitez, 30.05.2009. godine

1. Duljine stranica trokuta ABC su prirodni brojevi, a najmanja stranica duga je $2cm$. Kolika je površina trokuta P ako je $v_c = v_a + v_b$, pri čemu su v_a, v_b, v_c duljine visina redom na stranice a, b, c?

2. Neka su a, b, c, d pozitivni brojevi takvi da je $a+b+c+d=8$. Dokazati da je
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq 8 .$$

3. Neka je p prost broj, $p \neq 3$ i neka su a i b cijeli brojevi takvi da $p \mid a+b$ i $p^2 \mid a^3+b^3$. Pokazati da $p^2 \mid a+b$ ili $p^3 \mid a^3+b^3$.

4. Na kružnici je napisano 2009 prirodnih brojeva čija je suma 7036. Pokazati da je moguće naći dva para susjednih brojeva takvih da je suma oba para veća ili jednaka 8.

Vrijeme za izradu je 180 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Takmičarska komisija Vam želi puno uspjeha u izradi zadataka!

RJEŠENJA ZADATAKA

1. Iz jednakosti $v_c = v_a + v_b$ slijedi da je v_c najveća visina, pa je stranica *c* najkraća, tj. $c = 2cm$. Iz jednakosti $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$ slijedi $v_a = \frac{2 \cdot P}{a}$. Analogno se dobije $v_b = \frac{2 \cdot P}{b}$ i $v_c = \frac{2 \cdot P}{c}$, što uvršteno u danu jednakost daje $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, tj. $\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Odatle dobijamo $(a-2)(b-2) = 4$. Budući da su a i b prirodni brojevi, dobijamo ove mogućnosti: $a - 2 = 1 \wedge b - 2 = 4$, odnosno $a - 2 = 4 \wedge b - 2 = 1$ i $a - 2 = 2 \wedge b - 2 = 2$. U prve dvije mogućnosti dobivamo da su duljine stranica 2 *cm*, 3 *cm* i 6 *cm*, što ne čini trokut. Dakle, jedino rješenje je $a = 4 \wedge b = 4$, tj. riječ je o jednakokračnom trokutu sa stranicama duljine 2 *cm*, 4 *cm* i 4 *cm*. Duljinu visine na stranicu $c = 2cm$ računamo koristeći Pitagorin poučak: $v_c = \sqrt{(4cm)^2 - (1cm)^2} = \sqrt{15}cm$. Površina trokuta *ABC* jednaka je $P = \frac{c \cdot v_c}{2} = \sqrt{15}cm$.

2.
Prvo rješenje:

Kako za x, y > 0 važi $(x+y)^2 \geq 4xy$ slijedi da je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, pa primjenjujući ovu nejednakost, dobijemo da je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{16}{a+b+c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d} = 8.$$

Drugo rješenje:

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine je:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{\frac{c}{2}} + \frac{1}{\frac{c}{2}} + \frac{1}{\frac{d}{4}} + \frac{1}{\frac{d}{4}} + \frac{1}{\frac{d}{4}} + \frac{1}{\frac{d}{4}} \geq \frac{64}{a+b+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}+\frac{d}{4}+\frac{d}{4}+\frac{d}{4}+\frac{d}{4}} = 8.$$

3. Pretpostavimo da $p^2 \nmid a+b$. Tada je dovoljno dokazati da $p^3 \mid a^3 + b^3$. Primjetimo da je $p^2 \mid (a+b)^3 - 3ab(a+b)$, odakle imamo da $p^2 \mid 3ab$. Kako je p prost broj različit od 3, to mora vrijediti $p \mid a$ ili $p \mid b$. Kako *p* dijeli njihov zbir, to *p* mora dijeliti oba, odakle slijedi $p^3 \mid a^3$ i $p^3 \mid b^3$, a otuda i tvrdnja zadatka.

4. Suma 2009 parova susjednih brojeva jednaka je $2 \cdot 7036 = 14072$. Pretpostavimo da najviše jedan par brojeva ima sumu veću ili jednaku 8. To znači da barem 2008 parova imaju sumu članova najviše 7, što u zbiru daje najviše $7 \cdot 2008 = 14056$. Otuda slijedi da postoji par čija je suma barem $14072 - 14056 = 16$, odnosno čiji je bar jedan član veći ili jednak 8. Taj broj, sa svoja dva susjedna broja formira dva para čija je suma veća ili jednaka 8, što predstavlja kontradikciju sa početnom pretpostavkom.

Rezultati

Pozicija	Šifra	Ime i prezime	1	2	3	4	Ukupno
1	42	Harun Hindija	10	10	10	6	36
2	18	Dejan Gvozdenac	7	1	10	5	23
2	10	Faruk Mustafić	7	0	10	6	23
4	25	Aleksandar Novaković	10	0	10	0	20
4	29	Dajana Cvijić	3	10	0	7	20
6	32	Hadžem Hadžić	10	1	2	6	19
7	5	Abdulah Jašarević	10	0	3	2	15
7	17	Marko Rajković	10	2	3	0	15
9	20	Ivona Jurošević	10	0	4	0	14
10	3	Irma Hadžić	4	0	8	0	12
11	28	Milica Malešević	3	0	0	8	11
11	23	Slavko Ivanović	9	0	1	1	11
13	30	Stipe Jurčević	10	0	0	0	10
14	24	Aleksandra Stevanović	7	1	0	1	9
15	8	Ema Hujić	2	0	6	0	8
16	13	Lejla Čusto	2	0	5	0	7
17	6	Fadil Žilić	3	0	0	3	6
17	16	Miloš Tomić	4	1	0	1	6
17	21	Slavica Matić	3	0	0	3	6
20	26	Nemanja Lukić	5	0	0	0	5
20	11	Rijad Muminović	5	0	0	0	5
22	9	Dino Dizdarević	4	0	0	0	4
23	38	Aida Bjelopoljak	3	0	0	0	3
23	1	Đuma Ugarak	3	0	0	0	3
25	14	Adelisa Muratović	2	0	0	0	2
25	12	Amra Fočo	2	0	0	0	2
25	37	Anđela Mandić	2	0	0	0	2
25	22	Dragan Babić	2	0	0	0	2
25	33	Ivan Bartulović	2	0	0	0	2
25	31	Josip Jazvić	2	0	0	0	2
25	15	Nudžeim Selimović	2	0	0	0	2
25	41	Semir Omerović	2	0	0	0	2
25	40	Tea Jozić	2	0	0	0	2
25	19	Vedran Ivić	2	0	0	0	2
25	35	Zdravka Pokrajčić	2	0	0	0	2
36	7	Ahmed Adžemović	1	0	0	0	1
36	4	Ali Damardžić	1	0	0	0	1
36	27	Anja Švraka	1	0	0	0	1
36	2	Elmedin Jašić	1	0	0	0	1
36	39	Iva Domljan	1	0	0	0	1
36	36	Ivan Raič	1	0	0	0	1
36	34	Nikola Balta	1	0	0	0	1