

Language: Bosnian

Day: 1

Petak, 10. juli 2015.

**1. zadatak.** Konačan skup  $\mathcal{S}$  tačaka u ravni zovemo *uravnoteženim* ako za svake dvije različite tačke  $A$  i  $B$  skupa  $\mathcal{S}$  postoji tačka  $C$  u skupu  $\mathcal{S}$  takva da je  $\overline{AC} = \overline{BC}$ . Skup  $\mathcal{S}$  zovemo *bесcentričnim* ako ni za koje tri različite tačke  $A, B$  i  $C$  skupa  $\mathcal{S}$  ne postoji tačka  $P$  u  $\mathcal{S}$  takva da je  $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ .

- Dokazati da za svaki prirodan broj  $n \geq 3$  postoji uravnotežen skup koji se sastoji od  $n$  tačaka.
- Odrediti sve prirodne brojeve  $n \geq 3$  za koje postoji uravnotežen бесcentričan skup od  $n$  tačaka.

**2. zadatak.** Naći sve trojke prirodnih brojeva  $(a, b, c)$  takve da je svaki od brojeva

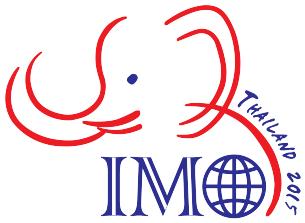
$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

stepen broja 2.

(Stepen broja 2 je broj oblika  $2^n$ , gdje je  $n$  nenegativan cio broj.)

**3. zadatak.** Neka je  $ABC$  oštrougli trougao u kome je  $\overline{AB} > \overline{AC}$ . Neka je  $\Gamma$  njegova opisana kružnica,  $H$  ortocentar, a  $F$  podnožje visine iz tjemena  $A$ . Tačka  $M$  je središte duži  $BC$ . Neka je  $Q$  tačka na kružnici  $\Gamma$  takva da je  $\angle HQA = 90^\circ$ , a  $K$  tačka na kružnici  $\Gamma$  takva da je  $\angle HKQ = 90^\circ$ . Smatramo da su tačke  $A, B, C, K$  i  $Q$  međusobno različite i da leže na kružnici  $\Gamma$  tim redom.

Dokazati da se opisane kružnice trouglova  $KQH$  i  $FKM$  dodiruju.



Language: Bosnian

Day: 2

Subota, 11. juli 2015.

**4. zadatak.** Neka je  $\Omega$  opisana kružnica trougla  $ABC$  i  $O$  njen centar. Kružnica  $\Gamma$  sa centrom u tački  $A$  siječe duž  $BC$  u tačkama  $D$  i  $E$  tako da su tačke  $B, D, E$  i  $C$  međusobno različite i leže na pravoj  $BC$  tim redom. Neka su  $F$  i  $G$  tačke presjeka kružnice  $\Gamma$  i  $\Omega$ , pri čemu tačke  $A, F, B, C$  i  $G$  leže na kružnici  $\Omega$  tim redom. Neka je  $K$  druga tačka presjeka opisane kružnice trougla  $BDF$  i duži  $AB$ . Neka je  $L$  druga tačka presjeka opisane kružnice trougla  $CGE$  i duži  $CA$ .

Prepostavimo da su prave  $FK$  i  $GL$  različite i da se sijeku u tački  $X$ . Dokazati da tačka  $X$  leži na pravoj  $AO$ .

**5. zadatak.** Sa  $\mathbb{R}$  je označen skup svih realnih brojeva. Odrediti sve funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju jednakost

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

za sve realne brojeve  $x$  i  $y$ .

**6. zadatak.** Niz cijelih brojeva  $a_1, a_2, \dots$  zadovoljava sljedeće uslove:

- (i)  $1 \leq a_j \leq 2015$  za sve  $j \geq 1$ ;
- (ii)  $k + a_k \neq \ell + a_\ell$  za sve  $1 \leq k < \ell$ .

Dokazati da postoje prirodni brojevi  $b$  i  $N$  takvi da važi

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

za sve cijele brojeve  $m$  i  $n$  za koje je  $n > m \geq N$ .