Petak, 10. juli 2015.

1. zadatak. Konačan skup $\mathcal{S}$ tačaka u ravni zovemo *uravnoteženim* ako za svake dvije različite tačke A i B skupa $\mathcal{S}$ postoji tačka C u skupu $\mathcal{S}$ takva da je $\overline{AC} = \overline{BC}$. Skup $\mathcal{S}$ zovemo *bescentričnim* ako ni za koje tri različite tačke A, B i C skupa $\mathcal{S}$ ne postoji tačka P u $\mathcal{S}$ takva da je $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.

(a) Dokazati da za svaki prirodan broj $n \geqslant 3$ postoji uravnotežen skup koji se sastoji od n tačaka.

(b) Odrediti sve prirodne brojeve $n \geqslant 3$ za koje postoji uravnotežen bescentričan skup od n tačaka.

2. zadatak. Naći sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) takve da je svaki od brojeva

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

stepen broja 2.

(*Stepen broja* 2 *je broj oblika* 2^n, *gdje je* n *nenegativan cio broj.*)

3. zadatak. Neka je ABC oštrougli trougao u kome je $\overline{AB} > \overline{AC}$. Neka je Γ njegova opisana kružnica, H ortocentar, a F podnožje visine iz tjemena A. Tačka M je središte duži BC. Neka je Q tačka na kružnici Γ takva da je $\sphericalangle HQA = 90^\circ$, a K tačka na kružnici Γ takva da je $\sphericalangle HKQ = 90^\circ$. Smatramo da su tačke A, B, C, K i Q međusobno različite i da leže na kružnici Γ tim redom.

Dokazati da se opisane kružnice trouglova KQH i FKM dodiruju.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

Subota, 11. juli 2015.

4. zadatak. Neka je Ω opisana kružnica trougla ABC i O njen centar. Kružnica Γ sa centrom u tački A siječe duž BC u tačkama D i E tako da su tačke B, D, E i C međusobno različite i leže na pravoj BC tim redom. Neka su F i G tačke presjeka kružnica Γ i Ω, pri čemu tačke A, F, B, C i G leže na kružnici Ω tim redom. Neka je K druga tačka presjeka opisane kružnice trougla BDF i duži AB. Neka je L druga tačka presjeka opisane kružnice trougla CGE i duži CA.

Pretpostavimo da su prave FK i GL različite i da se sijeku u tački X. Dokazati da tačka X leži na pravoj AO.

5. zadatak. Sa $\mathbb{R}$ je označen skup svih realnih brojeva. Odrediti sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju jednakost

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

za sve realne brojeve x i y.

6. zadatak. Niz cijelih brojeva $a_1, a_2, \ldots$ zadovoljava sljedeće uslove:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2015$ za sve $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ za sve $1 \leqslant k < \ell$.

Dokazati da postoje prirodni brojevi b i N takvi da važi

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqslant 1007^2$$

za sve cijele brojeve m i n za koje je $n > m \geqslant N$.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova