Utorak, 8. jul 2014.

Zadatak 1. Neka je $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva. Dokazati da postoji tačno jedan prirodan broj n takav da važi

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

Zadatak 2. Dat je prirodan broj $n \geqslant 2$. Posmatrajmo šahovsku tablu $n \times n$ koja se sastoji od n^2 polja. Raspored n topova na tabli zovemo *miroljubivim* ako se u svakoj vrsti i u svakoj koloni nalazi tačno jedan top. Naći najveći prirodan broj k takav da, za svaki miroljubiv raspored n topova, postoji kvadrat $k \times k$ koji ne sadrži topa ni na jednom od svojih k^2 polja.

Zadatak 3. U konveksnom četvorouglu $ABCD$ je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 90°$. Tačka H je podnožje normale iz tačke A na pravu BD. Tačke S i T su odabrane na stranicama AB i AD, redom, tako da je tačka H unutar trougla SCT i važi

$$\sphericalangle CHS - \sphericalangle CSB = 90° \quad \text{i} \quad \sphericalangle THC - \sphericalangle DTC = 90°\,.$$

Dokazati da prava BD dodiruje opisani krug trougla TSH.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

Srijeda, 9. jul 2014.

Zadatak 4. Tačke P i Q na stranici BC oštrouglog trougla ABC su takve da važi $\sphericalangle PAB = \sphericalangle BCA$ i $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$. Tačke M i N na pravim AP i AQ, redom, su takve da je tačka P središte duži AM, a tačka Q središte duži AN. Dokazati da se prave BM i CN sijeku na opisanom krugu trougla ABC.

Zadatak 5. Za svaki prirodan broj n, Kejptaunska banka izdaje novčiće vrijednosti $\frac{1}{n}$. Ako imamo konačno mnogo takvih novčića (ne obavezno različitih vrijednosti), čija ukupna vrijednost nije veća od $99+\frac{1}{2}$, dokazati da možemo da ih podijelimo u najviše 100 grupa tako da svaka grupa ima ukupnu vrijednost ne veću od 1.

Zadatak 6. Za skup pravih u ravni kažemo da su u *opštem položaju* ako nikoje dvije nisu paralelne i nikoje tri ne prolaze kroz istu tačku. Skup pravih u opštem položaju dijeli ravan na oblasti; one oblasti koje imaju konačnu površinu nazivamo *ograničenim oblastima*. Dokazati da za svako dovoljno veliko n važi sljedeće tvrđenje: u svakom skupu od n pravih u opštem položaju možemo obojiti u plavo bar $\sqrt{n}$ pravih tako da nijedna od ograničenih oblasti nema potpuno plavu granicu.

Napomena: Dokazi tvrđenja u kojima je $\sqrt{n}$ zamijenjeno sa $c\sqrt{n}$ biće bodovani u zavisnosti od vrijednosti konstante c.