53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Bosnian**

Day: **1**

Utorak, 10. jul 2012.

1. zadatak U trouglu ABC tačka J je centar spolja pripisane kružnice naspram tjemena A. Ova kružnica dodiruje stranicu BC u tački M, a produžetke stranica AB i AC u tačkama K i L redom. Prave LM i BJ sijeku se u tački F, a prave KM i CJ u tački G. Neka je S presječna tačka pravih AF i BC, a neka je T presječna tačka pravih AG i BC.

Dokazati da je M središte duži ST.

(*Spolja pripisana kružnica* trougla ABC naspram tjemena A je kružnica koja dodiruje stranicu BC i produžetke stranica AB i AC.)

2. zadatak Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj, i neka su $a_2, a_3, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Dokazati da vrijedi

$$(1+a_2)^2 (1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \;>\; n^n.$$

3. zadatak *Pogađalica* je igra koju igraju dva igrača, A i B. Pravila igre zavise od prirodnih brojeva k i n koji su poznati i jednom i drugom igraču.

Na početku igre igrač A bira prirodne brojeve x i N takve da je $1 \leqslant x \leqslant N$. Igrač A ne saopštava informacije o broju x, a saopštava tačnu vrijednost broja N igraču B. Nakon toga igrač B pokušava da dobije informacije o broju x postavljajući igraču A pitanja sledećeg oblika: u svakom pitanju igrač B bira proizvoljan podskup S skupa prirodnih brojeva (može birati isti podskup više puta) i pita igrača A da li broj x pripada skupu S. Igrač B može postaviti pitanja koliko želi. Nakon svakog pitanja igrač A mora odmah odgovoriti sa *da* ili *ne*, ali smije lagati koliko god puta želi, jedino ograničenje je da među proizvoljnih $k+1$ uzastopnih odgovora barem jedan mora biti istinit.

Nakon što B postavi onoliko pitanja koliko smatra potrebnim, on mora odabrati skup X koji se sastoji od najviše n prirodnih brojeva. Ako broj x pripada skupu X onda igrač B pobjeđuje; inače B gubi.

Dokazati da:

1. Ako je $n \geqslant 2^k$, onda igrač B može garantovati pobjedu.
2. Za svako dovoljno veliko k, postoji prirodni broj $n \geqslant 1.99^k$ takav da igrač B ne može garantovati pobjedu.

Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

Srijeda, 11.jul 2012.

4. zadatak Odrediti sve funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da, za sve cijele brojeve a, b, c koji zadovoljavaju $a+b+c=0$, vrijedi sledeća jednakost:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Skup $\mathbb{Z}$ je skup cijelih brojeva.)

5. zadatak Neka je ABC trougao u kome je $\sphericalangle BCA = 90^\circ$ i neka je D podnožje visine iz tjemena C. Neka je X tačka na duži CD različita od krajeva te duži. Neka je K tačka na duži AX takva da je $BK = BC$. Analogno, neka je L tačka na duži BX takva da je $AL = AC$. Neka je M presječna tačka pravih AL i BK.

Dokazati da je $MK = ML$.

6. zadatak Odrediti sve prirodne brojeve n za koje postoje nenegativni cijeli brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takvi da vrijedi

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \ldots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Vrijeme rada: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 poena