

ponedeljak, 18. 07. 2011.

**1. zadatak.** Za zadani skup  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , sastavljen od četiri različita prirodna broja, označimo sumu elemenata  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  sa  $s_A$ . Neka je  $n_A$  broj parova indeksa  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , za koje broj  $a_i + a_j$  dijeli  $s_A$ . Odrediti sve takve skupove  $A$ , sastavljene od četiri različita prirodna broja, za koje  $n_A$  postiže maksimalnu vrijednost.

**2. zadatak.** Neka je  $S$  konačan skup tačaka u ravni koji sadrži bar dvije tačke. Nikoje tri tačke skupa  $S$  nisu kolinearne. *Vjetrenjača* je sljedeći postupak u kojem na samom početku biramo pravu  $l$  koja sadrži tačno jednu tačku  $P \in S$ .

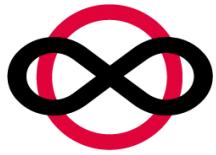
Prava  $l$  rotira u smjeru kazaljke na satu oko *centra*  $P$  do prvog momenta u kojem prava sadrži neku drugu tačku skupa  $S$  (označimo ovu tačku sa  $Q$ ). Nakon toga, prava rotira u smjeru kazaljke na satu oko novog centra  $Q$  do (prvog) momenta u kojem prava sadrži neku drugu tačku skupa  $S$ . Ovaj postupak se ponavlja beskonačno mnogo puta, pri čemu je centar rotacije uvijek tačka iz skupa  $S$ .

Dokazati da je moguće odabrati neku tačku  $P \in S$  i neku pravu  $l$  koja sadrži tačku  $P$ , tako da za dobijenu *vjetrenjaču* svaka tačka skupa  $S$  postaje *centar* rotacije beskonačno mnogo puta.

**3. zadatak.** Neka funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadovoljava sljedeći uslov

$$f(x+y) \leq y \cdot f(x) + f(f(x)),$$

za sve realne brojeve  $x$  i  $y$ . Dokazati da je  $f(x) = 0$  za sve  $x \leq 0$ .



utorak, 19. 07. 2011.

**4. zadatak.** Neka je  $n$  prirodan broj. Data je ravnotežna vaga sa dva tasa i  $n$  utega sa težinama  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ . Sve utege moramo postaviti na vagu, jedan za drugim. U svakom koraku odaberemo jedan od utega koji još nije postavljen na vagu i postavimo ga na lijevi ili desni tas vase, tako da težina desnog tasa nije veća od težine lijevog tasa.

Odrediti broj načina na koje je ovo postavljanje moguće uraditi.

**5. zadatak.** Zadana je funkcija  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ , sa skupa cijelih brojeva na skup prirodnih brojeva, takva da je razlika  $f(m) - f(n)$  djeljiva brojem  $f(m-n)$ , za bilo koja dva cijela broja  $m$  i  $n$ .

Dokazati da je broj  $f(n)$  djeljiv brojem  $f(m)$ , za sve cijele brojeve  $m$  i  $n$  za koje je  $f(m) \leq f(n)$ .

**6. zadatak.** Zadan je oštrogli trougao  $ABC$  sa opisanom kružnicom  $\Gamma$ . Neka je prava  $l$  tangentna sa kružnicom  $\Gamma$ , a neka su prave  $l_a, l_b$  i  $l_c$  prave simetrične pravoj  $l$  u odnosu na stranice  $BC, CA$  i  $AB$ , respektivno. Dokazati da je kružnica opisana oko trougla određenog pravama  $l_a, l_b$  i  $l_c$  tangentna sa kružnicom  $\Gamma$ .