Srijeda, 7. jul , 2010

Zadatak 1. Odrediti sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f\big(\lfloor x \rfloor y\big) = f(x)\big\lfloor f(y) \big\rfloor$$

($\lfloor z \rfloor$ je najveći cijeli broj ne veći od z.)

Zadatak 2. Neka je I centar upisanog kruga trokuta $\triangle ABC$ i neka je Γ opisana kružnica tom trokutu. Neka prava AI siječe Γ u tačkama A i D. Neka je E tačka na luku $\widehat{BDC}$ i F tačka na duži BC tako da je

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BAC.$$

Neka je G središte duži IF. Dokazati da presjek pravih DG i EI pripada Γ.

Zadatak 3. Neka je $\mathbb{N}$ skup svih prirodnih brojeva. Odrediti sve funkcije $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tako da je

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

kvadrat prirodnog broja za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

Language: **Bosnian**

Day: **2**

Četvrtak, 8.jul, 2010

Zadatak 4. Neka je P tačka u unutrašnjosti trokuta $\triangle ABC$. Neka prave AP, BP i CP sijeku opisanu kružnicu Γ trokuta $\triangle ABC$ po drugi put u tačkama K, L i M respektivno. Tangenta kružnice Γ u tački C siječe pravu AB u S. Pretpostavimo da je $SC = SP$. Dokazati da je tada $MK = ML$.

Zadatak 5. U svakoj od šest kutija $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ na početku se nalazi tačno jedan novčić. Dozvoljene su dvije vrste poteza:

Type 1: Izaberemo nepraznu kutiju B_j za $1 \leq j \leq 5$. Uklonimo jedan novčić iz B_j i dodamo dva novčića u B_{j+1}.

Type 2: Izaberemo nepraznu kutiju B_k za $1 \leq k \leq 4$. Uklonimo jedan novčić iz B_k i zamjenimo sadržaje (moguće praznih) kutija B_{k+1} i B_{k+2}.

Ispitati postoji li konačan niz dozvoljenih poteza takav da su na kraju kutije B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 prazne i kutija B_6 sadrži tačno $2010^{2010^{2010}}$ novčića. (Važi $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Zadatak 6. Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ niz pozitivnih realnih brojeva. Pretpostavimo da za neki prirodan broj s, važi

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

za sve $n > s$. Dokazati da postoje prirodni brojevi ℓ i N, takvi da je $\ell \leq s$ i za koje važi $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ za sve $n \geq N$.

Vrijeme: 4 sata i 30 minuta
Svaki problem vrijedi 7 bodova.